КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

М. К. Лебенча и С. И. Новоселов

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ 1

Высшая школа
1960

М. К. ГРЕБЕНЧА и С. И. НОВОСЕЛОВ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ I

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для физико-математических факультетов
педагогических институтов
и государственных университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва—1960

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел первый

Учение о функциях

Глава I. **Понятие функции**

		Стр.
§ 1.	Понятие множества	9
§ 2.	Множество действительных чисел	10
§ 3.	Числовые промежутки	15
§ 4.	Понятие функции	17
§ 5.	Функции, рассматриваемые на данном множестве	23
§ 6.	Отображение	24
§ 7.	Сложные функции	27
§ 8.	Действия над функциями	29
§ 9.	Элементарные функции	31
§ 10.	Функции, заданные формулой	34
§ 11.	График функции	38
§ 12.	Некоторые специальные классы функций	42
§ 13.	Обратная функция	51
§ 14.	Функции, заданные параметрически	56

Глава II. **Теория пределов**

§ 15.	Понятие окрестности	59
§ 16.	Окрестности в множестве действительных чисел	64
§ 17.	Предельные точки	68
§ 18.	Локальные свойства функций	69
§ 19.	Предел функции	72
§ 20.	Некоторые замечательные пределы	83
§ 21.	Предел функции на множестве. Односторонние пределы	88
§ 22.	Общие теоремы о конечных и бесконечных пределах	91
§ 23.	Теоремы о неравенствах	99
§ 24.	Теоремы о конечных пределах	103
§ 25.	Теоремы о бесконечных пределах	112
§ 26.	Верхняя и нижняя грани числового множества	119
§ 27.	Предел монотонной функции	125
§ 28.	Число e	128
§ 29.	Принцип стягивающихся сегментов	131
§ 30.	Критерий Коши	134
§ 31.	Определение предела по Гейне	140
§ 32.	Принцип предельных точек	142

Глава III. **Непрерывные функции**

§ 33.	Приращения аргумента и функции	145
§ 34.	Функции, непрерывные в точке	146
§ 35.	Отображение с помощью непрерывных функций	148
§ 36.	Точки разрыва. Разрывные функции	148

Стр.

§ 37. Теоремы о функциях, непрерывных в данной точке 153
§ 38. Функции, непрерывные на данном множестве 159
§ 39. Свойства функций, непрерывных на сегменте 162
§ 40. Отображение сегмента при помощи непрерывной функции 174
§ 41. Теоремы существования и непрерывности обратной функции . . . 176
§ 42. Непрерывные линии 179

Глава IV. **Элементарные функции**

§ 43. Степенная функция с целым показателем 185
§ 44. Многочлен 186
§ 45. Рациональная функция 188
§ 46. Степенная функция с дробным показателем 190
§ 47. Показательная функция на множестве рациональных чисел 194
§ 48. Иррациональная степень положительного числа 196
§ 49. Показательная функция 197
§ 50. Логарифмическая функция 198
§ 51. Степенная функция с произвольным действительным показателем 199
§ 52. Сложная показательная функция 200
§ 53. Тригонометрические функции 201
§ 54. Обратные тригонометрические функции 203
§ 55. Гиперболические функции 204
§ 56. Техника вычисления пределов элементарных функций 207
§ 57. Примеры нахождения пределов последовательностей 219
§ 58. Построение графиков функций 227

Раздел второй

Дифференциальное исчисление

Глава V. **Производная**

§ 59. Касательная к линии 236
§ 60. Угловой коэффициент касательной 239
§ 61. Производная 240
§ 62. Геометрическая интерпретация производной 243
§ 63. Механическая интерпретация производной 244
§ 64. Теоремы о производных 245
§ 65. Производные элементарных функций 251
§ 66. Дифференцируемые функции 259
§ 67. Дифференциал 261
§ 68. Теорема о наилучшей локальной аппроксимации 264
§ 69. Обозначение Лейбница 265
§ 70. Односторонние производные 265
§ 71. Бесконечные производные 267
§ 72. Примеры функций, имеющих разрывную производную 270
§ 73. Дифференцирование функций, заданных параметрически 275
§ 74. Угол касательной с радиусом-вектором точки касания 277
§ 75. Производные высших порядков 278
§ 76. Производные высших порядков от сложных функций 282
§ 77. Формула Лейбница 283
§ 78. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически 285
§ 79. Производные высших порядков от обратной функции 287
§ 80. Преобразование дифференциальных выражений 287

Стр.

Глава VI. **Основные теоремы дифференциального исчисления**

§ 81. Основные леммы 292
§ 82. Теорема Ролля 294
§ 83. Теорема Лагранжа 298
§ 84. Формула Лагранжа 299
§ 85. Следствия теоремы Лагранжа 300
§ 86. Теорема Коши 305
§ 87. Теорема о промежуточном значении производной 307
§ 88. Точки разрыва производной 308
§ 89. Правило Лопиталя 310

Глава VII. **Применение дифференциального исчисления к исследованию функций**

§ 90. Монотонные функции 316
§ 91. Теорема о неравенствах 320
§ 92. Наибольшее и наименьшее значения функции . 321
§ 93. Локальные экстремумы 323
§ 94. Признаки существования локальных экстремумов 325
§ 95. Отыскание локальных экстремумов дифференцируемых функций . 328
§ 96. О локальных экстремумах недифференцируемых функций 332
§ 97. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций на сегменте 334
§ 98. Кривые линии, вогнутые вверх и вниз, точки перегиба 340
§ 99. Исследование функций. Построение графиков 349

Глава VIII. **Формула Тейлора**

§ 100. Основная лемма 357
§ 101. Полиномы Тейлора 358
§ 102. Формула Тейлора и ее остаточный член 361
§ 103. Формула Тейлора для простейших элементарных функций . . . 365
§ 104. Теорема о наилучшей локальной аппроксимации 368
§ 105. Применение формулы Тейлора к исследованию функций в окрестности данной точки 370
§ 106. Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям . . 373

Раздел третий

Интегральное исчисление

Глава IX. **Отыскание примитивных функций**

§ 107. Неопределенный интеграл 377
§ 108. Непосредственное интегрирование 379
§ 109. Интегрирование методом разложения 382
§ 110. Интегрирование методом подстановки 384
§ 111. Интегрирование по частям 385
§ 112. Интегрирование в конечном виде 389
§ 113. Интегрирование простейших рациональных функций 390
§ 114. Разложение рациональной функции в сумму элементарных дробей 395
§ 115. Интегрирование рациональных функций 406
§ 116. Интегрирование иррациональных функций 408
§ 117. Интегрирование тригонометрических функций 417
§ 118. Тригонометрические и гиперболические подстановки . . . 427
§ 119. Интегрирование некоторых трансцендентных функций . . . 428
§ 120. Метод неопределенных коэффициентов 431

Стр.

Глава X. **Определенный интеграл**

§ 121. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла 435
§ 122. Разбиение сегмента 438
§ 123. Верхняя и нижняя суммы 440
§ 124. Интегральные суммы 442
§ 125. Предел интегральных сумм 444
§ 126. Теорема о пределах верхних и нижних сумм 446
§ 127. Условия интегрируемости 448
§ 128. Основные классы интегрируемых функций 451
§ 129. Расширение понятия интеграла 460
§ 130. Формула Лейбница—Ньютона 461
§ 131. Теоремы о действиях над интегрируемыми функциями 463
§ 132. Свойство аддитивности интеграла 466
§ 133. Основные неравенства 469
§ 134. Теорема о среднем значении 474
§ 135. Интеграл как непрерывная функция верхнего предела 476
§ 136. Вторая теорема о среднем значении 478
§ 137. Интегрирование и отыскание примитивных функций 480
§ 138. Интегрирование подстановкой 483
§ 139. Интегрирование по частям 487
§ 140. Примеры на применение формул интегрирования подстановкой и по частям 488
§ 141. Формула Валлиса 491
§ 142. Интеграл как аддитивная функция сегмента 492

Глава XI. **Приложения интегрального исчисления**

§ 143. Вычисление площадей плоских фигур 495
§ 144. Вычисление объемов тел вращения 500
§ 145. Длина дуги кривой линии 503
§ 146. Вычисление длины дуги посредством интеграла 509
§ 147. Длина дуги как параметр 514
§ 148. Площадь поверхности тел вращения 516
§ 149. Физические приложения интегрального исчисления 518
§ 150. Приближенные вычисления определенных интегралов 520

Глава XII. **Несобственные интегралы**

§ 151. Простейшие несобственные интегралы 527
§ 152. Теоремы о простейших несобственных интегралах 531
§ 153. Интегралы с несколькими особыми точками 538
§ 154. Обобщенная формула Лейбница—Ньютона 541

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый вниманию читателей курс математического анализа предназначается главным образом для студентов физико-математических факультетов, будущих учителей математики. Это обстоятельство и определило как содержание, так и характер изложения курса. Мы сочли правильным уделить значительное внимание основным понятиям математического анализа, каковыми являются понятия: функция, предел, непрерывность. Эти понятия имеют решающее значение не только для понимания самого курса анализа, но они имеют и самостоятельное значение, так как именно эти вопросы непосредственно относятся к школьной математике и ее преподаванию. По этой причине мы не считаем правильной тенденцию к скорейшему переходу от введения в анализ к дифференциальному и интегральному исчислениям. По этой же причине мы в изложении стремимся к тому, чтобы студенты получили максимально отчетливое представление об основных понятиях математического анализа.

Отдавая себе отчет в трудности усвоения основ анализа ввиду их абстрактности, мы, исходя из многолетнего педагогического опыта, сопровождаем изложение большим числом примеров, которые настоятельно рекомендуем вниманию читателя. Учитывая индивидуальную особенность некоторых читателей, состоящую в том, что при первом чтении они предпочитают ограничиваться небольшим по объему основным материалом, чтобы лучше охватить основную идею содержания книги, мы значительную часть текста изложили петитом, к чтению которого читатель может впоследствии обратиться, по мере возникновения в том необходимости. Само собой разумеется, что если лектор не сочтет педагогически целесообразным изложение на I семестре доказательств основных теорем о непрерывных функциях, он может перенести таковое по своему усмотрению, ограничившись на I семестре лишь перечислением этих теорем.

Преследуя, кроме педагогических целей, и ту, чтобы дать возможность студенту читать современную научную литературу по математическому анализу, мы в изложении курса по возможности старались использовать идеи современной математики (окрестность, отображение, понятие аддитивной функции множества), не говоря уже о том, что привлечение этих идей делает основные понятия классического анализа более прозрачными.

В процессе написания этой книги мы часто пользовались советами проф. В. В. Степанова, которому приносим искреннюю благодарность.

Весьма значительную поддержку в своей работе мы имели от Московского городского педагогического института, которому приносим глубокую благодарность.

Редактор книги С. В. Филичев проявил исключительное внимание к этой книге, за что его сердечно благодарим.

Москва, 25 декабря 1940 г.

М. Гребенча.
С. Новоселов.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке в 1948 г. второго издания настоящего курса книга была подвергнута коренной переработке: было полностью изменено изложение теории определенного интеграла и приближено к общепринятому; в теории пределов мы, сохранив основную концепцию, значительно упростили изложение. Мы разгрузили книгу от ряда деталей, излишних в учебнике по общему курсу математического анализа. Существенным образом был изменен характер изложения. Излишне большой объем книги в первом издании справедливо отмечался как один из ее существенных недостатков. При переработке книги мы решительно сокращали бесполезное многословие, так вредно отражающееся на качестве учебной литературы. Известно, что первоначальное изучение математического анализа сопряжено для учащихся с трудностями, однако было бы глубокой ошибкой думать, что пространные повествования способны помочь преодолению этих трудностей. Краткое, строго систематическое и отчетливое изложение было всегда свойственно лучшим произведениям русской учебной литературы.

В последующие издания внесены лишь отдельные изменения и исправления в соответствии с пожеланиями, высказанными в отзывах лиц, ведущих преподавание по данной книге.

С. Новоселов.

Москва 1 октября 1959 г

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

УЧЕНИЕ О ФУНКЦИЯХ

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Понятие множества

Понятие множества является одним из первоначальных понятий, не поддающихся определению через другие, более простые понятия.

Поясним это понятие рассмотрением примеров конкретных множеств. Так, можно говорить о множестве букв на странице книги, о множестве планет солнечной системы, о множестве учащихся в данной аудитории, о множестве молекул, составляющих данное тело, о множестве всех точек плоскости, о множестве всех шаров в пространстве и т. д. С понятием множества приходится встречаться на самых ранних этапах изучения математики. Так, например, процесс счета предметов приводит к понятию множества натуральных чисел 1, 2, 3, ..., называемого натуральным рядом. Все целые и дробные положительные и отрицательные числа и число 0 образуют множество рациональных чисел. В элементарной геометрии окружность рассматривается как множество точек плоскости, находящихся от данной точки на одном и том же расстоянии.

Вместо слова «множество» употребляются также следующие его синонимы: «совокупность», «собрание», «система», «комплекс», «класс» и т. д. Употребление этих синонимов заменяет лишь одно слово другим, ему равнозначащим, но не определяет само понятие множества.

Множество $\mathfrak{M}$ *считается заданным, если относительно каждого предмета* x *можно установить, принадлежит он или не принадлежит* $\mathfrak{M}$. Утверждение, что предмет x принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, записывается символически так:

$$x \in \mathfrak{M}.$$

Если все элементы некоторого множества $\mathfrak{N}$ принадлежат множеству $\mathfrak{M}$, то множество $\mathfrak{N}$ называется частью множества $\mathfrak{M}$. Символически это обозначается так:

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}.$$

Примеры.

1. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех натуральных чисел, тогда $1 \in \mathfrak{M}$, $2 \in \mathfrak{M}$, $3 \in \mathfrak{M}$, но $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, окружность радиуса 1, данный треугольник суть предметы, не принадлежащие $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{N}$ — множество всех четных положительных чисел 2, 4, 6, ..., тогда имеем $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$.

Если R обозначает множество всех рациональных чисел, а Z — множество всех действительных чисел, тогда имеем:

$$\mathfrak{M} \subset R \subset Z.$$

2. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех треугольников на плоскости, а x — «египетский» прямоугольный треугольник, стороны которого равны 3, 4 и 5 единицам длины. Имеем $x \in \mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{N}$ означает множество всех равнобедренных треугольников, то $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$.

Всякое множество $\mathfrak{M}$ содержит все свои элементы, а потому $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. Если множество $\mathfrak{M}$ содержит все элементы множества $\mathfrak{N}$, но существует хотя бы один элемент множества $\mathfrak{M}$, не принадлежащий $\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}$ называется правильной частью $\mathfrak{M}$. Так, например, множество всех треугольников на плоскости есть правильная часть множества всех многоугольников.

§ 2. Множество действительных чисел

Понятие действительного числа, а также основные свойства действительных чисел предполагаются известными читателю. Ниже дано перечисление основных положений теории действительного числа. На эти положения мы будем опираться в последующем изложении.

I. *Действительные числа, положительные, отрицательные, (как рациональные, так и иррациональные) и число* 0 *связаны соотношениями взаимного расположения «равно», «больше», «меньше».* Эти соотношения обладают следующими свойствами:

1° *Для произвольных чисел* a *и* b *имеет место одно и только одно из соотношений*:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

2° Свойство необратимости неравенств:
если $a < b$, *то* $b > a$, *если же* $a > b$, *то* $b < a$.

3° Свойство транзитивности неравенств:
если

$$a < b \text{ и } b < c, \text{ то } a < c.$$

4° Свойство транзитивности равенства:
если

$$a = b \text{ и } b = c, \text{ то } a = c.$$

5° Свойство рефлексивности равенства: *всегда* $a = a$.

II. *В множестве действительных чисел выполнимы действия сложения и умножения, которым присущи следующие свойства:*

1° Коммутативность (переместительность) сложения:

$$a+b=b+a.$$

2° Ассоциативность (сочетательность) сложения:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

3° Коммутативность умножения:

$$ab=ba.$$

4° Ассоциативность умножения:

$$(ab)c=a(bc).$$

5° Дистрибутивность (распределительность) умножения относительно сложения:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

В множестве действительных чисел всегда выполнимо действие, обратное сложению, — вычитание.

В множестве действительных чисел выполнимо действие, обратное умножению, — деление, кроме деления на нуль.

Деление на нуль является невыполнимой операцией; выражение вида $\frac{a}{0}$ рассматривается как не имеющее смысла.

Отметим нижеследующие свойства монотонности сложения и умножения.

1° Монотонность сложения: *если* $a<b$, *то* $a+c<b+c$.

2° Монотонность умножения: *если* $a<b$, *то* $ac<bc$ *при* $c>0$ *и* $ac>bc$ *при* $c<0$.

Из перечисленных основных положений выводятся правила действий с любым числом компонентов и правила выполнения тождественных преобразований.

Правила сравнения по величине и действий применительно к различным видам чисел (положительные, отрицательные и нуль, рациональные и иррациональные) устанавливаются в арифметике и алгебре. Мы считаем эти правила известными.

III. Всякое рациональное число r можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа; если $r\neq 0$, то среди дробей, изображающих данное число, существует единственная несократимая дробь с положительным знаменателем. *Всякое действительное число можно представить в виде десятичной дроби, при этом рациональные числа изображаются либо конеч-*

ными, либо бесконечными периодическими дробями; иррациональные числа изображаются бесконечными непериодическими дробями.

Всякую конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной периодической дроби двояким образом: с периодом 0 и с периодом 9. Так, например, число $\frac{1}{5}$ допускает двоякое представление в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\frac{1}{5}=0{,}200\ \ldots \text{ и } \frac{1}{5}=0{,}199\ \ldots$$

Всякое отрицательное действительное число может быть представлено в виде десятичной дроби с отрицательной целой частью и с положительной мантиссой (дробной частью). Так, например:

$$-2{,}79183\ \ldots = -3+(1-0{,}79183\ \ldots)=\overline{3}{,}20816\ \ldots$$

При сравнении действительных чисел по величине можно пользоваться их представлением посредством десятичных дробей. При этом, во избежание двойственности в изображении чисел, дроби с периодом 9 обычно не употребляются.

IV. Нижеследующая теорема выражает свойство плотности расположения рациональных и иррациональных чисел в множестве всех действительных чисел.

Теорема. *Каковы бы ни были два различные действительные числа α и β, существует бесконечное множество действительных чисел, как рациональных, так и иррациональных, заключенных между α и β.*

Доказательство. Пусть

$$\alpha=p_0,p_1p_2\ \ldots\ p_n\ \ldots \text{ и } \beta=q_0,q_1q_2\ \ldots\ q_n\ \ldots$$

бесконечные десятичные дроби, изображающие данные числа (дроби с периодом 9 не употребляются в данном рассуждении). Сопоставим приближенные значения данных чисел:

$$p_0;\quad p_0,p_1;\quad p_0,p_1p_2;\ \ldots$$
$$q_0;\quad q_0,q_1;\quad q_0,q_1q_2;\ \ldots$$

Пусть $\alpha<\beta$, тогда в верхнем ряду найдется первое по порядку число $p_0, p_1p_2\ \ldots\ p_k$, меньшее соответствующего числа нижнего ряда; значит,

$$p_0, p_1p_2\ldots p_{k-1}=q_0, q_1q_2\ \ldots\ q_{k-1},$$

но $p_k<q_k$ (не исключена возможность, что $p_0<q_0$). Построим бесконечную десятичную дробь:

$$\xi=p_0, p_1p_2\ \ldots\ p_kl_{k+1}l_{k+2}\ \ldots,$$

сохранив k первых десятичных знаков числа α. Каковы бы ни были последующие десятичные знаки l_{k+1}, l_{k+2} ..., имеем $\xi < \beta$. Если $p_{k+1} \neq 9$, то возьмем в качестве l_{k+1} любое число, большее p_{k+1} (но, разумеется, не большее 9), тогда при произвольных последующих десятичных знаках l_{k+2}, l_{k+3} будем иметь $\alpha < \xi$. Если $p_{k+1} = 9$, но $p_{k+2} < 9$, тогда положим $l_{k+1} = 9$ и l_{k+2} равным любому числу, большему p_{k+2}, а остальные знаки выберем произвольно, и т. д. Так как не все десятичные знаки p_{k+1}, p_{k+2}, ... девятки, то всегда можно выбрать число ξ большим α.

Следовательно, получим:

$$\alpha < \xi < \beta.$$

Десятичные знаки l_{k+1}, l_{k+2}, начиная с некоторого, можно выбирать произвольно, поэтому существует б е с к о н е ч н о е множество чисел ξ, заключенных между α и β. Если эти знаки выбрать так, чтобы соответствующая дробь была периодической (в частности, конечной), тогда число ξ будет иррациональным, ч. т. д.

Примеры.

1. $\alpha = 2{,}735...$; $\beta = 4{,}01$. Любое из чисел 2,8; 2,81; 3,8039... больше α, но меньше β.
2. $\alpha = 0{,}713994...$; $\xi = 0{,}714005...$; число $\beta = 0{,}713995...$ удовлетворяет условию $\alpha < \beta < \xi$.
3. $\alpha = 2{,}7301$; $\beta = 2{,}7415...$; непериодическая дробь

$$\xi = 2{,}73101001000100001...$$

изображает иррациональное число, заключенное между α и β.

V. Действительные числа принято изображать точками прямой линии (оси), на которой выбраны единица измерения отрезков и начальная точка и установлено положительное направление. При этом *всякому действительному числу ставится в соответствие единственная точка прямой линии, и обратно: всякой точке числовой прямой ставится в соответствие единственное число.* Это позволяет в математическом анализе пользоваться геометрической терминологией, именно: для числа и изображающей его точки употребляется общий термин «точка». Соответствие между числами и точками числовой прямой обладает следующим свойством «сохранения порядка»: *из двух различных чисел большему числу соответствует на числовой оси точка, расположенная «правее»* *.

Нижеследующая геометрическая аксиома (непрерывности прямой линии) дает возможность обосновать обычный способ изображения действительных чисел точками прямой линии.

---

* Как обычно, направлением «вправо» называется направление числовой оси, принятое за положительное.

Аксиома (принцип стягивающихся отрезков).
Если последовательность отрезков прямой

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_nB_n,\ \ldots$$

обладает следующими свойствами:

1° *каждый последующий отрезок содержится в предыдущем;*

2° *каким бы ни был заданный отрезок P, существует такое число n, что отрезок A_nB_n (а значит, и любой последующий) меньше P,*

то существует одна единственная точка прямой, принадлежащая всем отрезкам данной последовательности.

Рациональное число $\frac{m}{n}$ (где $n > 0$) принято изображать концом отрезка, который получим, отложив от начальной точки O (вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$) $|m|$ раз $\frac{1}{n}$-ю часть единичного отрезка E. Пусть α — иррациональное число:

$$\alpha = p_0, p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$

Рассмотрим точки A_0, A_1, A_2, ..., изображающие (соответственно) десятичные приближения числа α по недостатку:

$$p_0,\ p_0 + \frac{p_1}{10},\quad p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100},\ \ldots,$$

и точки B_0, B_1, B_2, ..., изображающие десятичные приближения числа α по избытку:

$$p_0 + 1,\ p_0 + \frac{p_1 + 1}{10},\quad p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2 + 1}{100},\ \ldots$$

Последовательность стягивающихся отрезков

$$A_0B_0,\ A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots$$

(длины 1; 0,1; 0,01 и т. д.) определяет единственную точку P прямой линии, которая и рассматривается как изображение числа α.

Обратно, всякой точке P прямой может быть поставлено в соответствие действительное число α. Это достигается процессом десятичного измерения отрезка OP. Если единичный отрезок E содержится в OP целое число p раз, то длина OP равна p. В противном случае отрезок OP может быть представлен в виде суммы двух отрезков $OA_1 = p$ и A_1P, где $A_1P < E$ (не исключена возможность, что $OP < E$, тогда $p = 0$). Разделим E на 10 равных частей, $\frac{1}{10}$ часть E либо содержится в A_1P целое число раз, либо в остатке получится отрезок A_2P, меньший $\frac{1}{10}E$. Далее, остаток A_2P измеряется посредством $\frac{1}{100}E$ и т. д. Этот процесс определяет дей-

ствительное число α, изображающееся десятичной дробью (конечной или бесконечной):

$$\alpha = p, p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$

Точке P ставится в соответствие число α или $-\alpha$ в зависимости от направления отрезка OP.

§ 3. Числовые промежутки

Определения. *Если a и b — любые два действительные числа, причем $a<b$, то будем называть:*

1° *Интервалом (a, b) множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих системе неравенств:*

$$a < x < b.$$

2° *Сегментом $[a, b]$ множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих системе неравенств:*

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

3° *Полуинтервалом $(a, b]$ множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих системе неравенств:*

$$a < x \leqslant b.$$

4° *Полусегментом $[a, b)$ множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих системе неравенств:*

$$a \leqslant x < b.$$

Черт. 1.

Геометрически интервал изображается на числовой прямой множеством точек, лежащих между двумя данными точками a и b, т. е. отрезком с концами в точках a и b; при этом сами концы исключаются (черт. 1).

Сегмент изображается отрезком с концами в точках a и b, причем сами концы a и b включаются в отрезок (черт. 2).

Черт. 2.

Черт. 3.

Черт. 4.

Геометрическим изображением полуинтервала $(a, b]$ является отрезок с исключенным левым концом и с присоединенным правым (черт. 3).

Геометрическим изображением полусегмента является отрезок с присоединенным левым концом и исключенным правым (черт. 4).

Условимся в следующих обозначениях.

1° Множество всех действительных чисел будем обозначать символом $(-\infty, +\infty)$ и называть интервалом от $-\infty$ (минус бесконечности) до $+\infty$ (плюс бесконечности).

2° Множество всех действительных чисел x, больших числа a,

$$a < x$$

будем обозначать символом $(a, +\infty)$ и называть интервалом от a до $+\infty$.

Совершенно аналогично:

3° Интервал $(-\infty, a)$ есть множество действительных чисел x, меньших a:

$$x < a.$$

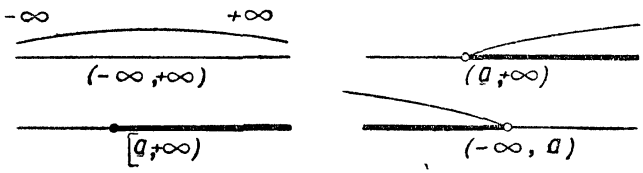
4° Полусегмент $[a, +\infty)$ есть множество действительных чисел, не меньших a:

$$a \leqslant x.$$

5° Полуинтервал $(-\infty, a]$ есть множество действительных чисел, не больших a:

$$x \leqslant a.$$

Геометрически интервал $(-\infty, +\infty)$ изображается множеством всех точек числовой прямой, интервал $(a, +\infty)$ — множеством



Черт. 5.

всех точек прямой, расположенных правее точки a, полусегмент $[a, +\infty)$ — множеством всех точек, лежащих правее a, включая саму точку a, и т. д. (черт. 5).

Все рассмотренные выше виды интервалов, сегментов, полуинтервалов и полусегментов будем объединять общим термином промежуток. Символы $+\infty$ и $-\infty$ в целях единообразия терминологии будем называть «точкой $+\infty$» и «точкой $-\infty$».

В том случае, когда несущественно, принимаются во внимание «конечные» точки промежутка или нет, будем употреблять обозначение $\langle a, b\rangle$. Таким образом, рассуждения, в которых употребляется термин «промежуток», справедливы как для интервала, так и для сегмента, а равно и для полусегмента и полуинтервала.

Если хотя бы одним из концов промежутка $\langle a, b\rangle$ является символ $+\infty$ или $-\infty$, то такой промежуток называется бес-

конечным. Если оба конца данного промежутка суть некоторые действительные числа, то промежуток называется конечным. Примерами бесконечных промежутков могут служить:

$$(-\infty, +\infty),\ (2, +\infty),\ (-3, +\infty),\ (-\infty, 0) \text{ и т. д.}$$

Промежутки $[-1, 1]$, $(0, 2)$, $(-5, 5]$, $[4, 1)$ являются конечными.

Символы $+\infty$ и $-\infty$ не следует рассматривать как числа; никакие арифметические операции над этими символами не считаются допустимыми.

Условимся символы $+\infty$ и $-\infty$ считать связанными с действительными числами и между собой соотношениями неравенств, именно *будем считать всякое действительное число с меньшим, чем* $+\infty$, *и большим, чем* $-\infty$, *а символ* $-\infty$ *меньшим, чем* $+\infty$:

$$-\infty < c < +\infty$$

В частности, имеем $-\infty < 0$ и $0 < +\infty$.

Неравенствами $-\infty < x < +\infty$ обозначают, что под x можно подразумевать любое действительное число; аналогично, неравенствами $a < x < +\infty$ обозначают, что под x можно подразумевать любое действительное число, большее a, и т. д.

Примеры.

1. Множество всех положительных чисел образует интервал $(0, +\infty)$ множество всех отрицательных чисел образует интервал $(-\infty, 0)$.

Имеем:

$$1 \in (0, +\infty),\quad 2 \in [0, +\infty),\quad -\frac{1}{2} \in (-\infty, 0);$$

$$[0,1] \subset (-\infty, +\infty),\quad [-1, 1] \subset [-2, 2].$$

2. Выражение $\arcsin x$ имеет смысл, если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, т. е на сегменте $[-1, 1]$.

3. Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет действительные значения, если $1 \leqslant x$, т. е. на полусегменте $[1, +\infty)$.

4. Выражение $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет действительные значения, если $-1 < x < 1$, т. е. в интервале $(-1, 1)$.

§ 4. Понятие функции

Понятие соответствия (как и понятие множества) является простейшим понятием. Разъясним его на конкретных примерах.

Примеры.

1. Всякому многоугольнику x на плоскости можно поставить в соответствие число y—его площадь.

2. Всякой точке x на плоскости можно поставить в соответствие точку y, являющуюся ее ортогональной проекцией на данную прямую.

3. Всякому шару x в пространстве можно поставить в соответствие точку y—его центр.

4. Всякой системе x трех положительных чисел a, b и c, взятых при условиях $a<b<c$ и $c<a+b$, соответствует треугольник y, длины сторон которого выражаются числами a, b и c.

Несмотря на разнообразие рассмотренных примеров, нетрудно подметить то общее, что им свойственно. Именно, *даны некоторые два множества* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$, *причем каждому элементу* x *первого множества* $\mathfrak{M}$ *ставится в соответствие некоторый элемент* y *второго множителя* $\mathfrak{N}$.

Если установлено такое соответствие, то условимся говорить, что на множестве $\mathfrak{M}$ *задана функция со значениями, принадлежащими множеству* $\mathfrak{M}$.

Для обозначения функции употребляется следующая символическая запись:

$$y=f(x).$$

Элементы x *множества* $\mathfrak{M}$, *которым ставится в соответствие элементы второго множества* $\mathfrak{N}$, *называются значениями аргумента, а все данное множество* $\mathfrak{M}$ *называется множеством значений аргумента или областью определения данной функции.*

Элемент y *множества* $\mathfrak{N}$, *поставленный в соответствие значению аргумента* x, *называется значением функции, соответствующим* x. *Совокупность элементов множества* $\mathfrak{N}$, *поставленных в соответствие элементам множества* $\mathfrak{M}$, *называется множеством значений функции.*

Из сказанного следует, что функция определяется:

1° *множеством* $\mathfrak{M}$ *значений аргумента*;

2° *множеством* $\mathfrak{N}$, *которому принадлежат значения функции*;

3° *законом соответствия, в силу которого всякому значению аргумента отнесено некоторое, вполне определенное значение функции.*

Если $x=a$ есть некоторое вполне определенное значение аргумента, то соответствующее значение функции обозначается символом $f(a)$.

Всякое значение аргумента a принято также называть прообразом, а соответствующее ему значение функции $f(a)$ — его образом. Следовательно, всякому элементу множества $\mathfrak{M}$ соответствует его образ в множестве $\mathfrak{N}$. Все множество значений функции назовем образом множества значений аргумента. Вместо термина «функция» употребляется в качестве синонима термин «отображение».

Вернемся к рассмотренным в начале параграфа примерам 1 — 4 и поясним на этих примерах конкретный смысл введенных понятий.

Примеры.

1. Область определения функции есть множество всех многоугольников на плоскости. Значения аргумента (прообразы) суть многоугольники. Значение функции (образы) суть числа. При этом не всякое число может быть

значением функции, так как площадь выражается лишь положительным числом. Каково бы ни было данное положительное число k, существуют многоугольники, имеющие площадь, равную k; поэтому множество значений функций есть множество всех положительных чисел. Функция отображает множество всех многоугольников на множестве всех положительных чисел. Обозначим, например, через a квадрат, сторона которого равна 2, тогда соответствующее значение функции равно числу 4:

$$f(a)=4.$$

2. Область определения функции есть множество всех точек плоскости значения аргумента (прообразы)—точки плоскости, значения функции (образы) точки на оси проекции. Множество значений функции заполняет всю ось проекции.

3. Область определения функции—множество всех шаров пространства, значения аргумента (прообразы)—шары, значения функции—точки пространства, множество значений функции заполняет все пространство.

4. Множество значений аргумента есть множество всех систем трех положительных чисел, удовлетворяющих указанным условиям, значения аргумента (прообразы)—упомянутые системы, значения функции суть треугольники, множество значений функции—множество всех треугольников. Обозначим через A систему чисел 3, 4, 5, тогда $f(A)$ обозначает египетский прямоугольный треугольник. Обозначим через B систему чисел 1, 2, 100; символ $f(B)$ не имеет смысла.

При одновременном рассмотрении двух или нескольких различных функций будем обозначать эти функции разными символами: для этой цели, кроме $f(x)$, используются, например, также символы; $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\Phi(x)$, а также

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\quad \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots$$

Для обозначения функции можно употреблять любые буквы: $A(x)$, $\alpha(x)$, $\lambda(x)$ и т. д.

Понятие функции есть одно из важнейших понятий современной науки. При изучении явлений природы, в технике, в нашей практической деятельности мы постоянно встречаемся с необходимостью рассматривать соответствие между различными величинами. Так, например, путь, пройденный свободно падающим телом, зависит от времени, в течение которого происходило движение, именно, каждому моменту времени соответствует пройденный путь.

Период колебания маятника определяется его длиной.

Денежная сумма, уплаченная за данный товар, определяется количеством купленного товара.

Обычно при изучении явлений природы методами математики вместо самих физических величин рассматривают измеряющие их числа, вследствие этого соответствие между физическими величинами заменяется соответствием между числами. Так, например, в формуле пути свободно падающего тела

$$s=\frac{gt^2}{2} \qquad (s)$$

s и t суть числа, измеряющие (соответственно) путь и время, а формула (s) дает математическое выражение закона соответствия между этими числами.

В силу изложенного, особо важное значение имеет изучение числовых функций от числового аргумента. В настоящем общем курсе анализа будут рассматриваться только действительные функции от действительного аргумента.

Понятие числовой функции от числового аргумента можно описать следующим образом:

y есть функция от x, если дано множество $\mathfrak{M}$ чисел и если каждому числу x этого множества поставлено в соответствие некоторое определенное число y.

Для числовой функции от числового аргумента значения аргумента и значения функции суть числа, а область определения (т. е. множество значений аргумента) и множество значений функции суть числовые множества.

Числовая функция от числового аргумента определяется:

1° *множеством значений аргумента* (*областью определения*);

2° *законом соответствия.*

Две функции, заданные на различных множествах значений аргумента, следует рассматривать как различные, хотя бы их закон соответствия был одинаков. Пусть, например, множество значений аргумента есть множество рациональных чисел, а закон соответствия задан формулой $f(x)=x^2$ и пусть, с другой стороны, множество значений аргумента есть множество всех действительных чисел и закон соответствия задан при помощи той же формулы $\varphi(x)=x^2$. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ различные, так как у них различные множества значений аргумента, хотя для получения значения функции в обоих случаях надо значение аргумента возвести в квадрат. Так, например, числу $\sqrt{3}$ функция $f(x)$ не ставит в соответствие никакого числа, ибо $\sqrt{3}$ не входит в ее область определения, тогда как функция $\varphi(x)$ ставит в соответствие этому числу число 3.

Символ $f(a)$ есть число, равное значению функции $f(x)$ при значении аргумента, равном a.

В геометрической терминологии $f(a)$ называют значением функции $f(x)$ «в точке a».

Если число a не принадлежит области определения функции, то символ $f(a)$ не имеет смысла. Например, если множество значений аргумента есть

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

а закон соответствия $f(x)=x!$, то $f(3)=3!=6$; $f(5)=5!=120$, но $f\left(\frac{3}{2}\right)$ и $f(\sqrt{2})$ — символы, не имеющие смысла.

С помощью символа $f(x)$ можно записывать некоторые свойства функций. В качестве примеров рассмотрим известные из курса элементарной математики функции: a^x, $\log_a x$ и $\operatorname{tg} x$.

1) Обозначим $a^x = f(x)$, тогда свойство $a^{x+y} = a^x a^y$ можно записать так: $f(x+y) = f(x) f(y)$.

2) Положим $\varphi(x) = \log_a x$; свойство

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

можно записать так:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

3) Положим $\psi(x) = \operatorname{tg} x$, тогда теорему сложения

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

можно записать так:

$$\psi(x+y) = \frac{\psi(x) + \psi(y)}{1 - \psi(x)\psi(y)}.$$

4) Свойство периодичности тангенса $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$ запишется так:

$$\psi(x + k\pi) = \psi(x).$$

Областью определения функции может быть любое числовое множество. В частности, если областью определения функции является интервал (или полуинтервал), то говорят, что функция определена *в интервале* (или *полуинтервале*); если областью определения функции является сегмент (или полусегмент), то говорят, что функция определена *на сегменте* (или полусегменте).

Множеством значений функции также может быть любое числовое множество. В частности, это множество может состоять лишь из одного числа C. В этом случае всякому значению аргумента ставится в соответствие одно и то же число C, т. е. при любом значении аргумента x имеем $f(x) = C$.

Если при любом значении аргумента соответствующее значение функции равно одному и тому же числу, то говорят, что эта функция постоянна или что функция есть константа.

Если функция $f(x)$ постоянна, то пишут:

$$f(x) = \text{const}.$$

Примеры постоянных функций встречаются в элементарной математике.

1. Пусть, например, R есть радиус данной окружности, а $n > 2$ — некоторое натуральное число. Рассмотрим правильный n-угольник, описанный около данной окружности. Заданием n вполне определяется многоугольник, а следовательно, длина его апофемы b есть функция n, т. е. $b = f(n)$. Легко видеть, что $f(n) = \text{const}$, ибо $f(n) = R$ при любом $n > 2$.

2. Рассмотрим функцию, определенную на множестве всех действительных чисел следующим законом соответствия:

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x;\ \text{имеем}\ f(x)=\text{const}=1.$$

Примеры.

1. Выражение x^2 ставит в соответствие всякому действительному числу x число $y=x^2$, а потому определяет функцию $f(x)=x^2$.

Для этой функции область определения — множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$. Имеем $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(5)=25$, $f(-0{,}1)=0{,}01$. Каждое неотрицательное число $y\geqslant 0$ является значением функции в точках $\sqrt{y}$ и $-\sqrt{y}$. Отрицательные числа не принадлежат множеству значений функции. Множеством значения функции служит множество всех неотрицательных действительных чисел, т. е. полусегмент $0\leqslant y<+\infty$.

2. Выражение $y=\log_2 x$ ставит в соответствие всякому положительному числу его логарифм при основании 2, а потому определяет функцию $y=\varphi(x)$. Для этой функции область определения есть интервал $(0, +\infty)$. Имеем $\varphi(2)=1$, $\varphi(1)=0$; $\varphi(8)=3$; $\varphi(-1)$ не имеет смысла.

Каждое действительное число y есть значение функции в точке $x=2^y$. Множеством значений функции служит множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

3. Всякое рациональное число $r\neq 0$ может быть единственным образом представлено в виде несократимой дроби с положительным знаменателем $r=\frac{p}{q}$. Поставив в соответствие числу r знаменатель q, получим функцию $f(r)=q$.

Так, например,

$$f(0{,}5)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2;\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=3;\quad f(-0{,}25)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=4.$$

Для этой функции область определения есть множество всех рациональных чисел, отличных от нуля. Множество значений функции — множество всех чисел натурального ряда. В самом деле, любое натуральное число n является значением функции при значении аргумента $r=\frac{m}{n}$, где m — произвольное число, взаимно простое с числом n:

$$1=f(1)=f(-1)=f(2)=f(-2)=\ldots$$

$$2=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\ldots$$

$$3=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=\ldots \text{ и т. д.}$$

4. Всякое неотрицательное действительное число можно представить единственным образом в виде бесконечной десятичной дроби, если условиться:

1) всякую конечную дробь рассматривать как бесконечную с цифрой 0 в периоде;

2) не употреблять дроби с периодом 9 (во избежание двойственности в изображении действительных чисел).

Всякому неотрицательному действительному числу

$$x=N,\ p_1p_2p_3\ldots$$

(где N — целая часть, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — десятичные знаки) поставим в соответствие число y, изображающееся десятичной дробью

$$y = 0,\ p_1 p_3 p_5 \ldots,$$

полученной из данной сохранением десятичных знаков, стоящих после запятой на нечетных местах. Функция $y = f(x)$ определена этим законом на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$.

Так, например,

$$f(0) = 0;\quad f(5) = f(5{,}00\ldots) = 0;\quad f(2{,}345) = 0{,}35;\quad f(1{,}136)) =$$
$$= f(1{,}136136136\ldots) = 0,(163);\quad f(0{,}909090\ldots) = 0{,}99\ldots = 1.$$

Множество значений функции есть сегмент $0 \leqslant y \leqslant 1$. В самом деле, пусть $y = 0{,}q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$ — любое число $y \in [0,1]$. Число y есть значение функции в точке

$$x = N{,}q_1 z_2 q_2 z_4 q_3 z_6 \ldots,$$

где N — любое натуральное число, а десятичные знаки $z_2, z_4, z_6, \ldots$ можно выбирать как угодно.

§ 5. Функции, рассматриваемые на данном множестве

Нередко приходится данную функцию рассматривать не во всей области определения, а лишь в некоторой ее части. Так, например, в тригонометрии функции $\sin x$ и $\cos x$ определяются на множестве всех действительных чисел (под x подразумевается радианная мера любого угла). Однако в формулах для решения треугольников эти функции рассматриваются лишь для положительных углов, меньших π.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ есть множество, являющееся частью области определения $\mathfrak{M}$ функции $f(x)$. Если $x \in \mathfrak{M}_1$, то $x \in \mathfrak{M}$, а потому всякому числу множества $\mathfrak{M}_1$ ставится в соответствие некоторое вполне определенное значение $f(x)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, для которой область определения есть множество $\mathfrak{M}_1$, а закон соответствия тот же, что и для функции $f(x)$:

$$\varphi(x) = f(x), \quad \text{если } x \in \mathfrak{M}_1.$$

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ различны, так как различны их области определения; однако *принято для функции* $\varphi(x)$ *не вводить специального обозначения, а говорить, что* $\varphi(x)$ *есть данная функция* $f(x)$, *рассматриваемая на множестве* $\mathfrak{M}_1$.

Понятие функции, рассматриваемой на данном множестве, применимо к произвольным, а не только к числовым функциям.

Примеры.

1. Положим $f(x) = x^3$ в интервале $(-\infty, +\infty)$. В этом примере $\mathfrak{M}$ есть $-\infty, +\infty)$. Эта функция имеет как положительные, так и отрицательные значения. Если данную функцию рассматривать в интервале $0 < x < +\infty$ (множество $\mathfrak{M}_1$), то $x^3 > 0$. Следовательно, функция x^3 положительна в интервале $(0, +\infty)$. Эта же функция отрицательна в интервале $(-\infty, 0)$.

2. Значениями функции $\operatorname{tg} x$ может быть любое действительное число. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ значения тангенса неотрицательны и не превосходят 1.

3. Функция $\sin x$ постоянна на множестве чисел вида $x = k\pi$ (k — любое целое число): имеем $\sin x = 0$, если $x = k\pi$.

4. Пусть, например, значения аргумента суть точки плоскости, а значение функции — их проекции на данную ось. Проектируя на ось некоторую фигуру, мы рассматриваем функцию не во всей плоскости (множество $\mathfrak{M}$), а лишь в ее части: именно мы принимаем во внимание лишь точки данной фигуры (множество $\mathfrak{M}_1$).

§ 6. Отображение

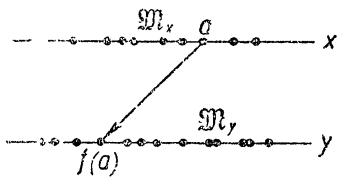
Если задана функция, то известны:

1° множество значений аргумента $\mathfrak{M}_x$,

2° закон соответствия $f(x)$,

3° множество значений функции; обозначим это множество через $\mathfrak{M}_y$.

Пусть a — некоторое значение аргумента, т. е. $a \in \mathfrak{M}_x$; соответствующее значение функции $f(a)$ есть число, принадлежащее множеству $\mathfrak{M}_y$. При помощи данного закона соответствия число a отображается в число $f(a)$. Значение функции $f(a)$ есть образ числа a, а значение аргумента a — прообраз числа $f(a)$. Все множество значений функции $\mathfrak{M}_y$ есть образ множества $\mathfrak{M}_x$, а множество $\mathfrak{M}_x$ — прообраз множества $\mathfrak{M}_y$.



Черт. 6.

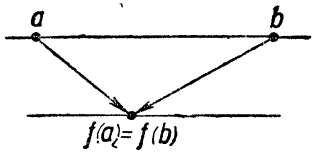
Пример.

Пусть множество $\mathfrak{M}_x$ значений аргумента есть множество всех натуральных чисел 1, 2, 3, ..., n, ... и закон соответствия $n!$ Тогда $\mathfrak{M}_y$ есть множество чисел вида 1, 2, 6, ..., $n!$, ... Образом натурального числа n является $n!$, а n является прообразом $n!$ Отображение множества $\mathfrak{M}_x$ на множество $\mathfrak{M}_y$ иллюстрировано наглядно следующей схемой, где стрелки направлены от прообразов к соответствующим образам:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1, & 2, & 6, & 24, & \ldots, & n! & \ldots \end{array}$$

Представим себе множество действительных чисел, взятое в двух экземплярах X и Y. На чертеже 6 оба эти экземпляра изображены в виде двух параллельных прямых. Будем мыслить область определения $\mathfrak{M}_x$ функции $y = f(x)$, находящейся на первом экземпляре X, а множество значений функции $\mathfrak{M}_y$ — на втором экземпляре Y. В геометрической интерпретации всякая точка x множества $\mathfrak{M}_x$ на прямой X отображается на некоторую точку $y = f(x)$, расположенную на прямой Y. Прообраз и соответствующий ему образ будем

соединять стрелкой, направляя ее от прообраза к образу (черт. 6). Полностью осуществить это построение в общем случае невозможно, ибо множество значений аргумента является, вообще говоря, бесконечным, и невозможно практически провести бесконечное множество прямых (стрелок). Однако, взяв некоторое конечное число прообразов и соответствующих им образов, можно во многих случаях получить схему, дающую достаточно ясное представление о данном отображении.

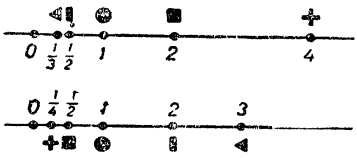


Черт. 7.

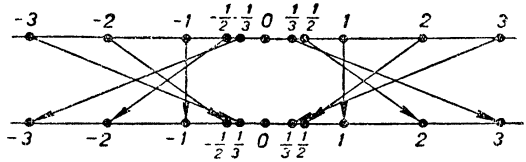
В силу определения понятия функции, каждому значению аргумента $x=a$ соответствует $f(a)$ — его единственный образ. Но было бы ошибкой думать, что всякому образу соответствует один единственный прообраз: может оказаться, что при двух различных значениях аргумента a и b имеет место равенство $f(a)=f(b)$; тогда число $f(a)$, наверное, имеет два прообраза: a и b (черт. 7). Число прообразов, соответствующих данному значению функции, может быть разнообразным в зависимости от характера закона соответствия $f(x)$.

Примеры.

1. Пусть $\mathfrak{M}_x$ есть множество положительных действительных чисел, т. е. интервал $(0, +\infty)$. Пусть закон соответствия есть $y=\frac{1}{x}$. Если $0<x<1$, то $y=\frac{1}{x}>1$, значит точка x, лежащая в интервале $(0,1)$, отображается в точку y, лежащую в интервале $1<y<+\infty$. При этом всякая точка y, принадлежащая интервалу $1<y<+\infty$, имеет своим прообразом точку $x=\frac{1}{y}$, принадлежащую интервалу $0<x<1$. Следовательно, функция $y=\frac{1}{x}$ отображает интервал $0<x<1$ на интервал $1<y<+\infty$. Точка $x=1$ отображается в точку $y=1$, а интервал $1<x<+\infty$, как легко проверит читатель, отображается на интервал $0<y<1$.



Черт. 8.



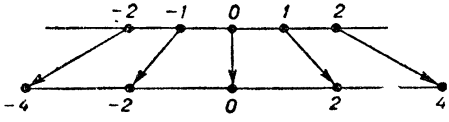
Черт. 9.

На верхнем чертеже 8 изображены точки $x=\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 4 (эти точки отмечены различными фигурками); на нижнем чертеже 8 изображены соответствующие точки: $y=3$, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, которые отмечены теми же фигурками. Функция $\frac{1}{x}$ переводит расположение фигурок на верхнем чертеже в рас-

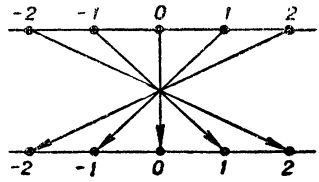
положение, данное на нижнем чертеже. Схема отображения функции $y=\frac{1}{x}$ представлена на чертеже 9.

2. Положим $f(x)=2x$, схема отображения дана на чертеже 10.

3. На чертеже 11 дана схема отображения для функции $f(x)=-x$.



Черт. 10.

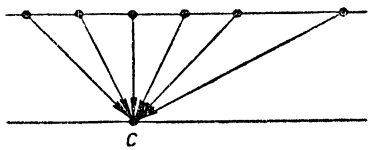


Черт. 11.

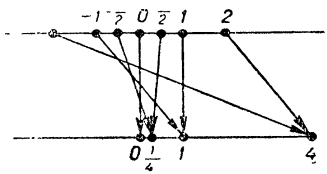
4. Если $f(x)=\text{const}$ [пусть $f(x)=C$], тогда образами всех значений аргумента служит одна точка с абсциссой C, все стрелки сходятся в одну точку (черт. 12).

5. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Интервал $0<x<+\infty$ отображается на интервал $0<y<+\infty$. В самом деле, если $x>0$, то и $y=x^2>0$; кроме того, всякое положительное число y является образом единственного положительного числа $x=\sqrt{y}$. Далее, точка $x=0$ переходит в точку $y=0$. Интервал $-\infty<x<0$ переходит в интервал $0<y<+\infty$. В самом деле, если x — отрицательное число, $x<0$, то $x^2=(-x)^2>0$. Значит, точка $y=x^2$ служит образом двух точек: x и $-x$. Всякое положительное число y имеет два прообраза: $x=\pm\sqrt{y}$. До-



Черт. 12.



Черт. 13.

пуская фигуральное выражение, можем сказать, что интервал $0<y<+\infty$ оказывается «дважды покрытым» — на него отображаются два интервала:

$$0<x<+\infty \quad \text{и} \quad -\infty<x<0$$

(схема отображения дана на чертеже 13).

6. Рассмотрим $f(x)=\sin x$ в интервале $-\infty<x<+\infty$. Значения $f(x)$ расположены на сегменте $-1\leqslant y\leqslant 1$. Каждое число $|y|\leqslant 1$ имеет бесконечное множество прообразов:

$$x=(-1)^n \arcsin y+n\pi.$$

7. Рассмотрим функцию $f(n)$, определенную на множестве натуральных чисел следующим законом соответствия: $f(n)=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

Имеем:

$$f(n)=\begin{cases} 0 \text{ (если } n\text{ — нечетное число);} \\ 1 \text{ (если } n\text{ — четное число);} \end{cases}$$

множество точек $n=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ отображается на две точки: 0 и 1

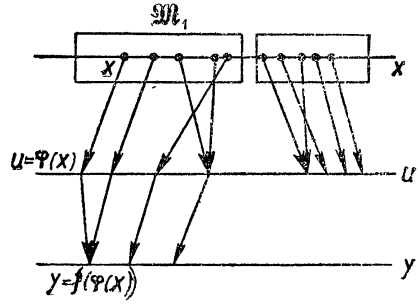
§ 7. Сложные функции

Рассмотрим две функции: $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$.

Всякому данному численному значению аргумента x функции $\varphi(x)$ ставится в соответствие численное значение u. Если значение $u=\varphi(x)$ принадлежит области определения функции $f(u)$, то последовательное выполнение двух отображений $x \to u \to y$ ста ит в соответствие значению x значение

$$y=f(u)=f(\varphi(x)).$$

Значения x, для которых $\varphi(x)$ принадлежит области определения функции $f(u)$, образуют некоторое множество $\mathfrak{M}_1$, являющееся ч а с т ь ю области определения $\mathfrak{M}$ функции $\varphi(x)$. Для всякого значения $x \in \mathfrak{M}_1$ символ $f(\varphi(x))$ имеет вполне определенный смысл (черт. 14). В частности, множеством $\mathfrak{M}_1$ может оказаться вся область определения функции $\varphi(x)$.



Черт. 14.

Если значение $u=\varphi(x)$ не принадлежит области определения функции $f(u)$, то символ $f(\varphi(x))$ не имеет смысла. Не исключена возможность, что $f(\varphi(x))$ не имеет смысла ни при каком x; тогда говорят, что множество $\mathfrak{M}_1$ оказалось п у с т ы м.

Итак, каждому значению $x \in \mathfrak{M}_1$ соответствует определенное значение $f(\varphi(x))$, т. е. y является функцией аргумента x, определенной на множестве $\mathfrak{M}_1$.

Определение. *Функция от аргумента x с законом соответствия $f(\varphi(x))$, областью определения которой является множество всех тех значений x, при которых значение $u=\varphi(x)$ принадлежит области определения $f(u)$, называется сложной функцией, аргумент $u=\varphi(x)$ называется промежуточным аргументом.*

Если множество $\mathfrak{M}_1$ является пустым, то сложная функция не существует.

Можно рассматривать функции с любым числом промежуточных аргументов. Так, например, если

$$y=f(v), \quad v=\varphi(u), \quad u=\psi(x),$$

то эти последовательные отображения определят сложную функцию на множестве всех значений x, для которых имеет смысл

$$f(\varphi(\psi(x))).$$

Понятие сложной функции как последовательного выполнения двух (или нескольких) отображений носит общий характер, оно применимо к произвольным (а не только к числовым) функциям.

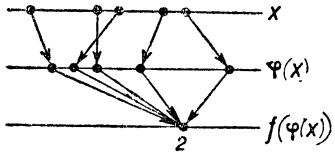
Так, например, в элементарной математике тригонометрические функции числового аргумента вводятся в рассмотрение как сложные функции. Рассмотрим, например, синус. Всякому действительному числу x поставим в соответствие угол

$$u = \varphi(x),$$

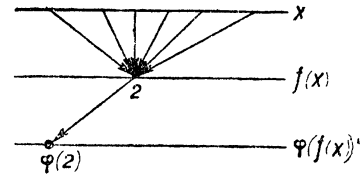
измеряющийся (в радианной мере) этим числом. Всякому углу u поставим в соответствие синус этого угла:

$$y = f(u) = \sin u.$$

Сложная функция $y = f(\varphi(x))$ ставит в соответствие всякому действительному числу x число y — синус угла, радианная мера которого равна x. Эту сложную функцию обозначают тем же



Черт. 15.



Черт. 16.

символом $\sin x$. Таким образом, в элементарной математике тригонометрические функции рассматриваются как функции от числового аргумента, для этих функций промежуточным аргументом является угол.

Примеры.

1. Положим $y = f(u) = \log_2 u$ в интервале $0 < u < +\infty$, а $u = \varphi(x) = x - 1$ в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Значение $u = \varphi(x)$ принадлежит интервалу $0 < u < +\infty$, если $x - 1 > 0$, т. е. если $1 < x$.

Множество $\mathfrak{M}_1$ есть интервал $1 < x < +\infty$. В полуинтервале $-\infty < x \leqslant 1$ имеем $u = x - 1 \leqslant 0$; следовательно, $\log_2 u$ не имеет смысла.

Итак, для сложной функции $f(\varphi(x)) = \log_2(x - 1)$ область определения есть интервал $1 < x < +\infty$.

2. Положим $y = f(u) = 2^u$ в интервале $-\infty < u < +\infty$ и $u = \varphi(x) = x^2$ в интервале $-\infty < x < +\infty$. Имеем $f(\varphi(x)) = 2^{x^2}$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

3. Положим $y = f(u) = \lg u$ в интервале $0 < u < +\infty$ и $u = \varphi(x) = -1 - x^2$ в интервале $-\infty < x < +\infty$; сложная функция $f(\varphi(x))$ не имеет смысла, так как

$$u = -1 - x^2 < 0.$$

4. Пусть

$$f(u) = \text{const}, \quad u = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция. Положим, например, $f(u) = 2$; функция $f(\varphi(x))$ определена на том же множестве, что и $\varphi(x)$ и $f(\varphi(x)) = 2$ (черт. 15).

5. Пусть f и φ — функции, рассмотренные в предыдущем примере, тогда $\varphi(f(x)) = \varphi(2) = \text{const}$, если только число 2 принадлежит области определения $\varphi(x)$ (черт. 16).

6. Положим в интервале $(-\infty, +\infty)$

$$u=\varphi(x)=\begin{cases} 1 \text{ (если } x \text{ — рациональное число);} \\ -1 \text{ (если } x \text{ — иррациональное число);} \end{cases}$$

$f(u)=u^3+u^2$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Имеем:

$$f(\varphi(x))=\begin{cases} 2 \text{ (если } x \text{ — рациональное число);} \\ 0 \text{ (если } x \text{ — иррациональное число).} \end{cases}$$

7. При фотографировании каждому снимаемому предмету x ставится в соответствие его изображение u на негативе, и изображению u предмета на негативе ставится в соответствие изображение на снимке. В конечном результате всякому (снимаемому) предмету ставится в соответствие его изображение на снимке. Здесь значения аргумента — снимаемые предметы, значения промежуточного аргумента — изображения на негативе, значения сложной функции — изображения на снимке.

§ 8. Действия над функциями

Рассмотрим систему n функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x).$$

Пусть $\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{M}_n$ — области их определения. Эти области определения в общем случае являются различными числовыми множествами. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех действительных чисел, принадлежащих каждому из множеств $\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{M}_n$; иначе говоря, $\mathfrak{M}$ есть общая часть данных множеств.

При совместном задании системы функций каждая из этих функций рассматривается на одном и том же множестве $\mathfrak{M}$, являющемся общей частью всех множеств $\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{M}_n$. Разумеется, что можно рассматривать данную систему функций не на всем множестве $\mathfrak{M}$, а на некоторой его части.

Если окажется, что множества $\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{M}_n$ не имеют ни одной общей точки, то совместное рассмотрение данной системы функций не имеет смысла.

Примеры.

1. Положим $f_1(x)=2\lg x$ в интервале $(0, +\infty)$ (множество $\mathfrak{M}_1$); $f_2(x)=2\lg x^2$ при $x\neq 0$, т. е. в совокупности двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ (множество $\mathfrak{M}_2$); $f_3(x)=\arcsin x$ на сегменте $[-1, 1]$ (множество $\mathfrak{M}_3$).

Совместное рассмотрение данных функций возможно в полуинтервале $(0,1]$ (или в его части), являющемся общей частью областей определения данных функций.

2. Совместное рассмотрение функций $\varphi_1(x)=\lg x$, заданной в интервале $0, +\infty)$, и $\varphi_2(x)=\lg(-x)$, заданной в интервале $(-\infty, 0)$, не имеет смысла.

При совместном рассмотрении нескольких функций понятия «больше», «меньше», «равно», а также действия над функциями устанавливаются посредством нижеследующих определений.

Определение. 1° *Если при всех значениях аргумента* $x \in \mathfrak{M}$ *имеет место равенство* $f_1(x) = f_2(x)$, *то функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *называются равными на множестве* $\mathfrak{M}$.

2° *Если значения функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *при всех значениях* $x \in \mathfrak{M}$ *связаны одним и тем же знаком неравенства* ($>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$), *то данные функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *считаются связанными тем же знаком неравенства.*

3° *Функция* $f(x)$, *областью определения которой является общая часть областей определения данных функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ *и значение которой равно сумме значений данных функций:*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

называется суммой данных функций.

Аналогично определяются: произведение данных функций:

$$f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x),$$

произведение функций на числовой множитель $kf(x)$, *линейная комбинация данных функций*

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x),$$

где k_1, k_2, ..., k_n *— числовые коэффициенты, степень, а также частное двух функций* $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$,

соответственно как функции, значения которых равны произведению, линейной комбинации и частному значений данных функций, причем в последнем случае из области определения частного следует исключить значения аргумента, обращающие знаменатель в нуль.

Примеры.

1. Положим $f_1(x) = 2 \lg x$ в интервале $(0, +\infty)$, $f_2(x) = \lg x^2$ в системе интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; имеем $f_1(x) = f_2(x)$ в интервале $(0, +\infty)$

2. Функция $f_1(x) = \arcsin x$ рассматривается на сегменте $[-1, 1]$, а функция $f_2(x) = x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$. Равенство в силу определения арксинуса)

$$\sin(\arcsin x) = x$$

имеет место на сегменте $[-1, 1]$.

3. Положим $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Имеем:

$x^3 < x^2$ в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0,1)$;

$x^3 \leqslant x^2$ в интервале $(-\infty, 1)$ (равенство при $x = 0$);

$x^3 > x^2$ в интервале $(1, +\infty)$.

4. Положим $f_1(x) = \lg x$ в интервале $(0, +\infty)$ и $f_2(x) = \arcsin x$ на сегменте $[-1, 1]$. Сумма $\lg x + \arcsin x$ и произведение $\lg x \cdot \arcsin x$ имеют областью определения общую часть двух промежутков $(0, +\infty)$ и $[-1, 1]$ т. е. полуинтервал $(0, 1]$; частное $\frac{\lg x}{\arcsin x}$ имеет ту же область определе-

ния. Областью определения частного $\frac{\arcsin x}{\lg x}$ является интервал (0,1), так как значение $x=1$ (как обращающее в нуль знаменатель) надлежит исключить.

5. Положим

$f_1(x)=\sqrt{x}$ на полусегменте $[0, +\infty)$, $f_2(x)=\sqrt{-x}$ в полуинтервале $(-\infty, 0]$, $f_3(x)=\lg x$ в интервале $(0, +\infty)$.

Промежутки $[0, +\infty)$, $(-\infty, 0]$ и $(0, +\infty)$ не имеют (все три) ни одной общей точки, а потому не имеют смысла ни сумма $\sqrt{x}+\sqrt{-x}+\lg x$, ни произведение $\sqrt{x}\sqrt{-x}\lg x$.

§ 9. Элементарные функции

В элементарной математике рассматриваются нижеследующие основные элементарные функции:

$f(x)=\text{const}$, x^n, $\sqrt[n]{x}$, a^x (где $a>0$), $\log_a x$ (где $a>0$ и $a\neq 1$), x^α (α — иррациональное число), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Определение. *Функции, которые могут быть получены из основных элементарных посредством арифметических действий и образования сложных функций, называются элементарными функциями.*

Такова, например, функция $f(x)=\sqrt{x-1}+\sin^2 x$. В данном примере $f(x)$ есть сумма $\sqrt{x-1}$ и $\sin^2 x$. Первое слагаемое есть сложная функция;

$$\sqrt{u}, \text{ где } u=x-1;$$

второе есть также сложная функция:

$$u^2, \quad \text{где} \quad u=\sin x.$$

Основные элементарные функции рассматриваются каждая в соответствующей области определения. Так, функции $f(x)=\text{const}$, x^n (n — натуральное число), a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ рассматриваются в интервале $(-\infty, +\infty)$; функции $\log_a x$, x^α — в интервале $(0, +\infty)$; функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ — на сегменте $[-1, 1]$ и т. д. В теории функций действительного аргумента функция $\sqrt[2k]{x}$ рассматривается на полусегменте $[0, +\infty)$, на котором ее значения действительны.

Для всякой элементарной функции область определения устанавливается по правилам установления области определения суммы, произведения, частного, сложной функции. Следовательно, *функция, заданная посредством некоторого выражения, содержащего символы простейших операций и арифметических действий, рассматривается при всех значениях аргумента, при которых значения данного выражения имеют смысл и являются действительными числами.* Область определения может оказаться пустым

множеством; в этом случае данное выражение не имеет действительного значения ни при каком значении аргумента и потому не определяет никакой функции.

Так, для рассмотренной выше функции

$$f(x)=\sqrt{x-1}+\sin^2 x$$

область определения устанавливается следующим образом: $\sqrt{x-1}$ имеет действительные значения на полусегменте $1\leqslant x<+\infty$, $\sin^2 x$ в интервале $-\infty<x<+\infty$. Областью определения $f(x)$ является общая часть этих промежутков, т. е. полусегмент $[1, +\infty)$.

Элементарные функции классифицируются следующим образом.

1° Функции, которые могут быть образованы из функций $f_1(x)=x$ и $f_2(x)=\text{const}=1$ посредством действий сложения, умножения и умножения на числовые коэффициенты, называются многочленами. Общий вид многочлена таков:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — любые действительные числа, а n — натуральное число. Область определения есть $(-\infty, +\infty)$.

2° Функции, которые могут быть образованы из $f_1(x)=x$, $f_2(x)=1$ посредством указанных в 1° действий и действия деления, называются рациональными функциями. Многочлен есть частный случай рациональной функции. Многочлены называются также целыми рациональными функциями. Как учит алгебра, всякое рациональное выражение путем тождественных преобразований может быть представлено в виде отношения двух взаимно простых многочленов:

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}\ *$$

Если знаменатель $b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ не есть константа, то рациональная функция, определенная данным выражением, называется дробной рациональной функцией. Областью определения рациональной функции является множество всех действительных чисел, отличных от корней знаменателя.

---

* Это представление единственно с точностью до общих числовых множителей числителя и знаменателя. Если рациональное выражение при $x=x_0$ теряет смысл, но полученная в результате тождественных преобразований несократимая дробь смысла не теряет, то (как условились в алгебре) значением данного выражения при $x=x_0$ считается значение в точке x_0, тождественной несократимой дроби. Так, например, выражение

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$$

при $x=1$ имеет значение, равное 0, а при $x=-2$ теряет смысл.

3° Функции, которые могут быть получены из $f_1(x)=x$ и $f(x)=1$ посредством операций, указанных в 1°, 2°, и действия извлечения корня называются алгебраическими (явными) функциями. При изучении функций действительного аргумента для радикалов четной степени всегда берется арифметическое значение. Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется иррациональной. Иррациональная функция может быть задана посредством алгебраического выражения, содержащего действие извлечения корня, но не может быть представлена в виде алгебраической дроби или многочлена.

4° Все прочие элементарные функции называются элементарными трансцендентными функциями. Таковы, например, функции

$$x^{\alpha}\ (\alpha \text{ — иррациональное число}),\ \sin x,\ a^x,\ \log_a x,\ \arcsin x,\ \sin^3\frac{1}{x},$$

$$\lg_{10}(x^2+1),\ \frac{\sin x+2^x-x^2}{\operatorname{arc\,tg} 2x};\ x^x.$$

Примеры.

Функции $y=\sqrt[3]{x^2}$; $y=\sqrt{x-5}$; $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$ являются иррациональными.

Функция $\sqrt{(x^2+1)^2}$, заданная иррациональным выражением, не является иррациональной, так как она тождественна многочлену x^2+1.

Установление области определения элементарных функций.

1. $y=\dfrac{1}{x}$ — область определения — множество действительных чисел, отличных от нуля, т. е. совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

2. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Первое слагаемое имеет действительные значения на полусегменте $0\leqslant x<+\infty$; второе — в интервале $-\infty<x<1$. Область определения — полусегмент $[0, 1)$.

3. $y=\sqrt{-1-x^2}$ не определяет никакой действительной функции.

4. $y=\lg\sin x$. Область определения находится из условия $\sin x>0$; она состоит из бесконечного множества интервалов $\ldots, (-2\pi, -\pi), (0, \pi), (2\pi, 3\pi), \ldots$ или в общем виде $(2k\pi\ (2k+1)\pi)$

5. $y=\sqrt{\log_2\sin x}$. Имеем $\log_2\sin x\leqslant 0$, ибо $\sin x\leqslant 1$. Равенство $\sin x=1$ имеет место в точках $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$. Область определения из изолированных точек: $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.

6.

Функция:	Область определения:
$f(x)=\sqrt[4]{2-x^4}$	Сегмент $\left[-\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{2}\right]$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$	Совокупность интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$
$f(x)=\arcsin(2+x^2)$	Пустое множество
$f(x)=x^x$	Интервал $(0, +\infty)$
	Множество интервалов

$f(x)=\sqrt{\cos 2x}$	$\left[\frac{4k-1}{4}\pi, \frac{4k+1}{4}\pi\right]$
$f(x)=\log_2(\log_2 x)$	Интервал $(1, +\infty)$
$f(x)=\log_2(\log_2(\log_2 x))$	Интервал $(2, +\infty)$

Примеры сложных элементарных функций.

Примечание. При рассмотрении функции от функции нет необходимости аргументы данных функций обозначать разными буквами. Пусть, например, даны функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Выполняя операцию f над значениями функции φ, получим сложную функцию $f(\varphi(x))$.

1. $f(x)=\lg x$; $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$; $f(\varphi(x))=\lg(\operatorname{tg} x)$.
2. $f(x)=1-x$; $\varphi(x)=2^x$; $f(\varphi(x))=1-2^x$.
3. $f(x)=x^2$; $f(f(x))=(x^2)^2=x^4$.
4. $f(x)=2x$; $\varphi(x)=1-x^3$; $\psi(x)=\operatorname{tg} x$; $f\{\varphi[\psi(x)]\}=2(1-\operatorname{tg}^3 x)$.

Ниже даны примеры введения промежуточных аргументов:

5. $y=\log_2(x^2-x+1)$.

Имеем:

$$\begin{cases} u=x^2-x+1; \\ y=\log_2 u. \end{cases}$$

6. $y=3\cdot 2^{\cos 2x}$.

Имеем:

$$\begin{cases} y=3\cdot 2^v; \\ v=\cos u; \\ u=2x. \end{cases}$$

7. $y=\sin^3 x^2$.

Имеем:

$$\begin{cases} y=v^3; \\ v=\sin u; \\ u=x^2. \end{cases}$$

8. Функция $\lg(\cos x)$ может быть представлена в виде $f(\varphi(x))$, где $f(x)=\lg x$, $\varphi(x)=\cos x$.

9. Функция $\lg(\sin(1-x))$ может быть представлена в виде $f(\varphi(x))$ несколькими способами, например:

a) $f(x)=\lg x$; $\varphi(x)=\sin(1-x)$;
b) $f(x)=\lg\sin x$; $\varphi(x)=1-x$;
c) $f(x)=\lg(\sin(1+x))$: $\varphi(x)=-x$.

§ 10. Функции, заданные формулой

Для часто встречающихся функций вводятся специальные обозначения. Примерами могут служить простейшие элементарные функции (см. предыдущий параграф). Предположим, что для функций, принятых за основные, введены специальные символы. Отправляясь от основных функций посредством принятого знакоположения, можно символически обозначать различные функции, которые

могут быть получены из основных при помощи арифметических действий и образования сложных функций. Таким образом, представляется возможным задание функций «при помощи формул». Понятие функции, заданной формулой, является относительным, оно получает смысл лишь тогда, когда точно указано, какие математические операции приняты за основные.

Так, например, если принять в качестве основных действий лишь сложение, вычитание, умножение и деление, то операция извлечения корня не является изобразимой при помощи формулы. Если мы условимся операцию извлечения корня присоединить к числу основных и ввести для нее специальный символ $\sqrt[n]{x}$, то класс функций, изобразимых формулой, расширяется. Теперь становятся аналитически изобразимыми иррациональные (явные) функции, которые ранее не были изобразимыми. Аналогично обстоит дело с введением тригонометрических функций. Допустим, что мы встретились с некоторой функцией, закон соответствия которой не выражается через операции, принятые в качестве основных; тогда можно расширить класс основных функций, присоединив к нему данную функцию, и ввести для нее специальное обозначение.

Закон соответствия функции может задаваться различными формулами в разных частях области определения. Предположим, что данное множество $\mathfrak{M}$ разбито на части $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ..., не имеющие попарно общих точек. Рассмотрим выражения $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ ... такие, что $\Phi_1(x)$ имеет смысл во всех точках множества $\mathfrak{M}_1$, $\Phi_2(x)$ — во всех точках множества $\mathfrak{M}_2$ и т. д. (соответственно). Каждому значению $x \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие значение $f(x)$ посредством следующего закона:

$$f(x) = \begin{cases} \Phi_1(x) & (\text{если } x \in \mathfrak{M}_1); \\ \Phi_2(x) & (\text{если } x \in \mathfrak{M}_2); \\ \Phi_3(x) & (\text{если } x \in \mathfrak{M}_3); \\ \cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

и т. д.

При указанном способе задания функции $f(x)$ будем говорить, что функция определена разными формулами на различных частях области определения.

Примеры.

1. Положим,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\text{если } x < 0); \\ x^3 & (\text{если } x \geqslant 0); \end{cases}$$

имеем $f(0) = 0$; $f(2) = 2^3 = 8$; $f(-2) = (-2)^2 = 4$. В данном примере функция задается формулой $y = x^2$ в интервале $(-\infty, 0)$ и формулой $y = x^3$ на полусегменте $[0, +\infty)$.

2. Положим,

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (\text{если } x\neq 0);\\ -1 & (\text{если } x=0).\end{cases}$$

Функция задается формулой $y=x^2$ в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и значением $f(0)=-1$ в точке 0.

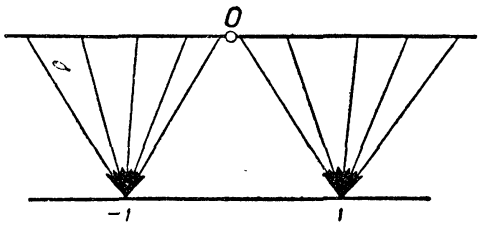
3. Положим, $f(x)=|x|$. Согласно определению абсолютной величины, имеем:

$$|x|=\begin{cases} x & (\text{если } x\geqslant 0);\\ -x & (\text{если } x<0).\end{cases}$$

Заметим, что функция $|x|$ может быть задана одной формулой: $|x|=\sqrt{x^2}$.

4. Функция $\frac{|x|}{x}$; область определения — совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Закон соответствия может быть задан в этих интервалах посредством двух формул:

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases} -1 & (\text{если } x<0);\\ 1 & (\text{если } x>0).\end{cases}$$



Черт. 17.

Функция $y=\frac{|x|}{x}$ постоянна в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0,+\infty)$. Первый интервал отображается в точку -1, а второй — в точку 1 (черт. 17).

5. Для функции, заданной формулой $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$, имеем (по определению арктангенса) $\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x$, причем $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$y=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x+\pi \quad \left(\text{если } -\frac{3}{2}\pi<x<-\frac{\pi}{2}\right);\\ x \quad \left(\text{если } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right);\\ x-\pi \quad \left(\text{если } \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right);\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Таким образом, область определения есть множество интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ \text{где } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

В этих интервалах имеем соответственно $y=x-k\pi$.
Закон соответствия может быть задан в различных интервалах различными линейными функциями.

В математическом анализе вводятся различные специальные обозначения для разнообразных классов функций и тем самым представляется возможным изображать формулами многие и неэлементарные функции. Ниже мы приводим общепринятое обозначение для ряда функций, которые будут часто встречаться в примерах.

Функция Дирихле $y=\chi(x)$ определяется в интервале $(-\infty, +\infty)$ следующим законом соответствия:

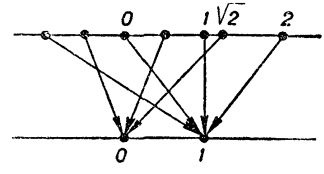
$$\chi(x)=\begin{cases} 1 \text{ (если } x \text{ — рациональное число);} \\ 0 \text{ (если } x \text{ — иррациональное число).} \end{cases}$$

Так, например, $\chi(0)=\chi(1)=\chi\left(-\frac{1}{2}\right)=\chi(0,\,1)=1;$

$$\chi(\sqrt{2})=\chi(\pi)=\chi(\sqrt{10})=0.$$

Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$.

Функция $\chi(x)$ постоянна на множестве рациональных чисел и отображает это множество в точку 1. Аналогично $\chi(x)=0$ на множестве иррациональных чисел и отображает это множество в точку 0 (черт. 18).



Черт. 18.

Множество значений функции состоит из двух точек $y=0$ и $y=1$.

Целая часть (антье) $y=[x]$ определяется следующим законом соответствия: y есть наибольшее целое число, не превосходящее x,

$$y\leqslant x<y+1;$$

например:

$$\left[\frac{1}{2}\right]=0,\quad [\sqrt{5}]=2,\quad [4]=4,\quad [-2{,}75]=-3.$$

Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$.

Если n — целое число, то при любом значении x на полусегменте $n\leqslant x<n+1$ имеем $y=[x]=n$. Следовательно, функция $[x]=n$ есть константа на полусегменте $[n,\ n+1)$ и отображает этот полусегмент в точку $y=n$. Так, полусегмент $[0,\ 1)$ отображается в точку $y=0$, полусегмент $[1,\ 2)$ — в точку $y=1$ и т. д.

Множество значений функции есть множество точек $y=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Дробная часть $y=\{x\}$ определяется следующим законом соответствия: $y=x-[x]$. Например:

$$\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},\quad \left\{\frac{3}{2}\right\}=\frac{1}{2},\quad \left\{\frac{7}{3}\right\}=\left\{2+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3},$$

$$\left\{-\frac{7}{3}\right\}=\left\{-3+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}.$$

$$\{\pi\}=\{3{,}14\ldots\}=0{,}14\ldots$$

Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$.

На полусегменте $n\leqslant x<n+1$ (где n — любое целое число) функция $\{x\}$ может быть задана формулой:

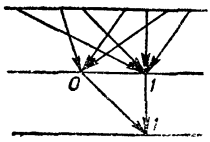
$$\{x\}=x-n \text{ (ибо } [x]=n).$$

Множество значений функции есть полусегмент $0 \leqslant y < 1$.

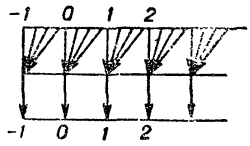
Функция $\pi(x)$ определяется в интервале $0 < x < +\infty$ следующим законом соответствия: $\pi(x)$ есть количество простых чисел, не больших x. Имеем:

$$\pi(1) = 0, \quad \pi(2) = 1, \quad \pi\left(\frac{5}{2}\right) = 1, \quad \pi(5) = 3, \quad \pi(10) = 4.$$

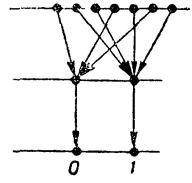
Функция $\pi(x)$ постоянна на полусегменте $[p_n, p_{n+1})$, где p_n и p_{n+1} — два последовательные простые числа, и отображает этот полусегмент в точку $y = p_n$. Свойства функции $\pi(x)$ изучаются в теории чисел.



Черт. 19.



Черт. 20.



Черт. 21.

Функция $y = \operatorname{sign} x$ (сигнум) определяется в интервале $(-\infty + \infty)$ следующим законом соответствия:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ (если } x > 0); \\ 0 \text{ (если } x = 0); \\ -1 \text{ (если } x < 0). \end{cases}$$

Примеры.

1. Имеем $\chi(\chi(x)) = 1$, так как значение $\chi(x)$ есть рациональное число (черт. 19).
2. $\chi([x]) = 1$.
3. $[[x]] = [x]$. В самом деле, если $n \leqslant x < n+1$ (n — целое число), то $[x] = n$, а потому $[[x]] = [n] = n = [x]$ (черт. 20).
4. $[\chi(x)] = \chi(x)$ (черт. 21).
5. $\chi(\{x\}) = \chi(x)$, так как числа x и $x - [x]$ — оба рациональные или иррациональные.
6. $\{\chi(x)\} = \text{const} = 0$.
7. $[\pi(x)] = \pi(x)$.
8. $\operatorname{sign} \chi(x) = \chi(x)$; $\chi(\operatorname{sign} x) = 1$; $[\operatorname{sign} x] = \operatorname{sign} x$; $\operatorname{sign}(\operatorname{sign} x) = \operatorname{sign} x$.

§ 11. График функции

Значение аргумента x и соответствующее значение функции $y = f(x)$ образуют пару чисел (x, y); поставим в соответствие этой паре точку M плоскости с абсциссой x и ординатой y. Таким образом, всякому значению аргумента x ставится в соответствие точка плоскости $M(x, f(x))$. Эту точку будем рассматривать как образ (на плоскости) значения аргумента x (черт. 22).

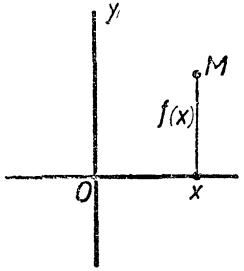
Образ всей области определения функции называется графиком функции $f(x)$.

Определение. *График функции есть множество всех точек плоскости, обладающих следующими свойствами:*

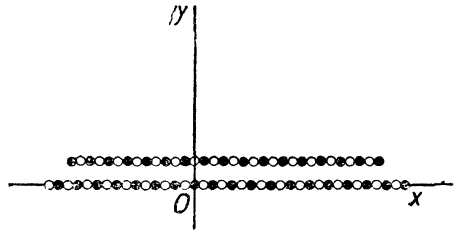
1° *Всякая точка этого множества имеет абсциссу, равную некоторому значению аргумента, и ординату, равную соответствующему значению функции.*

2° *Всякая точка, абсцисса которой равна значению аргумента и ордината — соответствующему значению функции, принадлежит графику функции.*

Построение графиков функции, областью определения которой является бесконечное множество, невозможно выполнить «по



Черт. 22.



Черт. 23.

точкам», так как фактически нельзя нанести на чертеж бесконечное множество точек. *В основу построения графиков должно быть положено исследование свойств данной функции*, отдельными же точками можно пользоваться лишь для уточнения графика. Поэтому вопрос о графическом изображении функций будет ниже рассматриваться постепенно по мере изучения свойств функций.

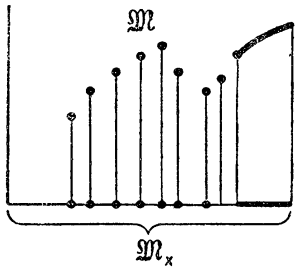
Не для всякой функции график может быть начерчен посредством обычных чертежных инструментов. Так, например, график функции Дирихле $y = \chi(x)$ состоит из точек прямой $y = 0$, имеющих иррациональные абсциссы, и из точек прямой $y = 1$, имеющих рациональные абсциссы. На любом отрезке каждой из прямых $y = 0$ и $y = 1$ имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие графику. Однако чертежные инструменты наносят «точки» в виде малых кружков (черт. 23), а потому «пустоты», которые должны быть на каждом отрезке указанных прямых, окажутся заполненными, и на чертеже получатся две прямые, $y = 0$ и $y = 1$, что не соответствует истинной структуре графика.

Всякое множество точек $\mathfrak{M}$ плоскости, имеющее с любой параллелью оси ординат не более одной общей точки, можно рассматривать как график некоторой функции. В самом деле, задание всякого такого множества определяет функцию, для которой областью определения служит проекция $\mathfrak{M}_x$ множества $\mathfrak{M}$ на ось абсцисс и которая всякому числу $x \in \mathfrak{M}_x$ ставит в соответ-

ствие ординату точки множества $\mathfrak{M}$ (черт. 24), проектирующейся на ось OX в точку x.

Примеры.

1. На чертеже 25 представлены графики ряда функций. Эти графики строятся в элементарной математике на основе вычисления отдельных значений, а также с учетом простейших свойств данных функций.



Черт. 24.

2. График функции $x=n^2$, заданной на множестве всех целых чисел, состоит из отдельных «изолированных» точек (черт. 26).

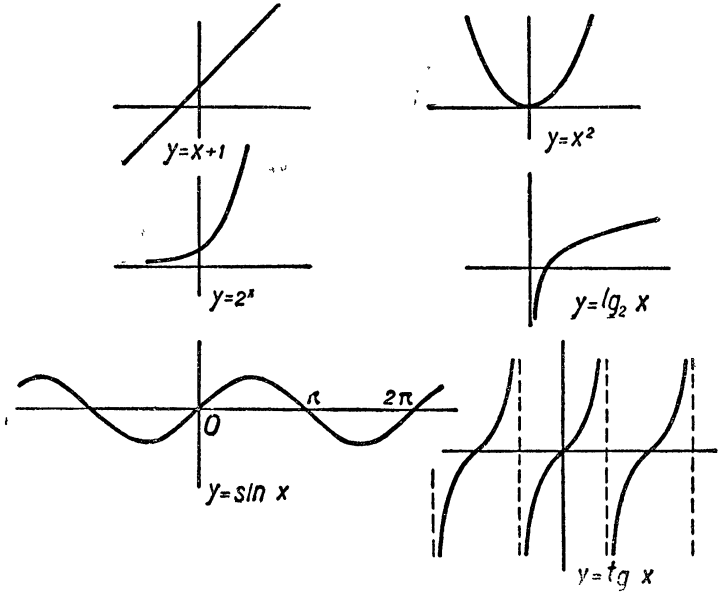
3. График функции $y=r^2$, заданной на множестве рациональных чисел, невозможно начертить по тем же причинам, что и график функций Дирихле.

4. $f(x)=|x|$. График этой функции есть ломаная, состоящая из биссектрис углов между осями координат в 1-м и 2-м квадрантах (черт. 27).

5. $f(x)=[x]$. График состоит из прямолинейных отрезков, параллельных оси OX, показанных на чертеже 28. Из этих отрезков исключаются правые концы.

6. $f(x)=\{x\}$. График состоит из прямолинейных отрезков, показанных на чертеже 29.

7. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. График состоит из двух лучей, показанных на чертеже 30. Конечные точки этих лучей исключаются.



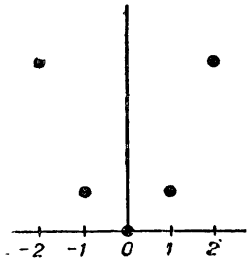
Черт. 25.

8. $f(x)=\operatorname{sign} x$. График состоит из тех же лучей, что в предыдущем примере, и из точки O (0, 0) (черт. 31).

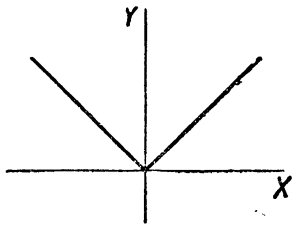
9. $$f(x)=\operatorname{sign} x)^2=\begin{cases}1 \text{ (если } x\neq 0);\\ 0 \text{ (если } x=0).\end{cases}$$

График состоит из прямой $y=1$ с исключенной точкой (0, 1) и из точки $O(0, 0)$ (черт. 32).

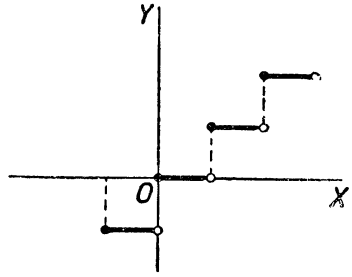
Графики функций можно строить не только в декартовой, но вообще в любой системе координат. Возьмем, например, полярную



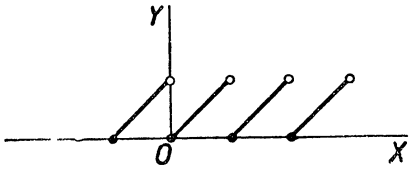
Черт. 26.



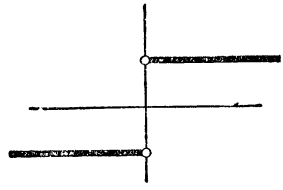
Черт. 27.

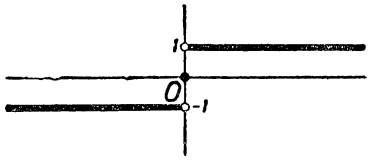


Черт. 28.

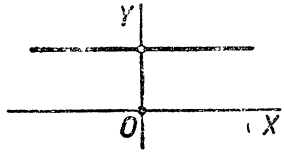


Черт. 29.


Черт. 30.

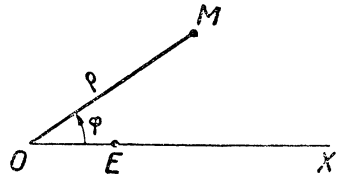


Черт. 31.



Черт. 32.

систему координат. Выберем на плоскости луч OX и примем некоторый отрезок OE (черт. 33) за единицу измерения длин. Тогда каждой упорядоченной паре действительных чисел (φ, ϱ), где $\varrho > 0$, можно поставить в соответствие точку плоскости M, для которой $OM = \varrho$ и $\angle XOM$ измеряется (в радианной мере) числом φ. Числа ϱ (радиус-вектор) и φ (полярный угол) называются полярными координатами точки M. Пара чисел $(\varphi, 0)$ при любом значении φ изображается одной и той же точкой O.



Черт. 33.

Будем обозначать через φ значения аргумента, а через ϱ — соответствующие значения данной функции. Значению аргумента φ соответствует значение функции $\varrho = f(\varphi)$, а паре чисел (φ, ϱ) соответствует точка плоскости. Образ всей области определения функции есть некоторое множество точек плоскости,

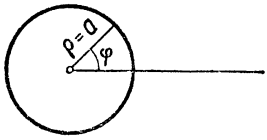
называемое графиком данной функции в полярных координатах. Заметим, что в полярных координатах различным значениям аргумента может соответствовать одна и та же точка. Если, например, $f(a+2\pi)=f(a)$, то значения аргумента a и $a+2\pi$ отобразятся в одну и ту же точку.

Если значение функции отрицательно, $\rho<0$, то иногда в качестве образа берется точка с полярными координатами $(\varphi+\pi, \rho)$, симметричная точке (φ, ρ) относительно полюса.

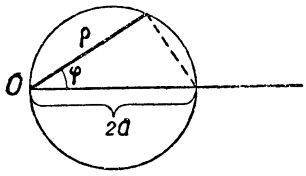
Примеры.

1. Если функция постоянна, $\rho=f(\varphi)=a$, где $a>0$, то графиком является окружность радиуса a с центром в полюсе (черт. 34).

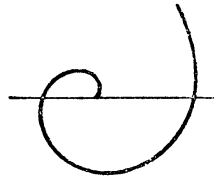
2. Графиком функции $\rho=2a\cos\varphi$, заданной на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, является окружность. Это нетрудно установить, рассматривая чертеж 35.



Черт. 34.



Черт. 35.



Черт. 36.

3. График $\rho=k\varphi$ (где $k>0$) изображен (при $k=1$) на чертеже 36 (спираль Архимеда). В первом приближении форму графика можно установить, вычисляя значения ρ при отдельных значениях φ $\left(\varphi=0, 1, \frac{\pi}{2}\pi \text{ и т. д.}\right)$.

§ 12. Некоторые специальные классы функций

Ограниченные и неограниченные функции.

Определения. *Функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ называется:*

1° *ограниченной сверху, если существует такое число P, что при всех значениях аргумента $x\in\mathfrak{M}$ имеет место неравенство*

$$f(x)<P;$$

2° *ограниченной снизу, если существует число p, что при всех значениях $x\in\mathfrak{M}$ имеет место неравенсто*

$$p<f(x);$$

3° *ограниченной, если она ограничена сверху и снизу.*

В частности, функция может быть ограниченной сверху или снизу, или быть ограниченной во всей области ее определения. Если для функции $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ не удовлетворяется условие 1° или 2°, или 3°, то $f(x)$ называется (соответственно) неог-

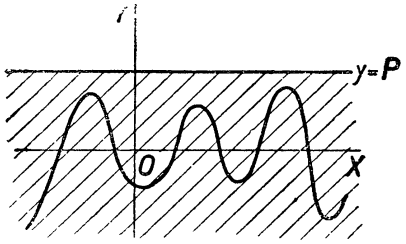
раниченной сверху, неограниченной снизу и неограниченной на данном множестве.

Теорема. *Если функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ ограничена, то существует такое число M, что*

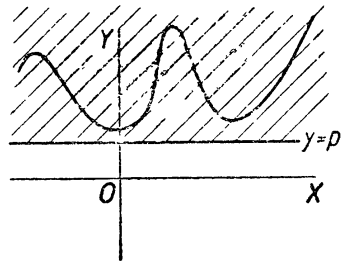
$$|f(x)| < M$$

при всех значениях $x \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$



Черт. 37.



Черт. 38.

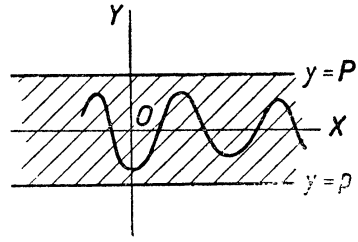
ограничена и сверху и снизу, то при любом $x \in \mathfrak{M}$ имеют место неравенства

$$p < f(x) < P.$$

Обозначим через M любое число, большее чем $|p|$ и $|P|$, тогда будем иметь:

$-M < f(x) < M$ или $|f(x)| < M$, ч. т. д.

Обратная теорема тоже имеет место. Это очевидно, ибо если $|f(x)| < M$, то $f(x) < M$ (ограничена сверху) и $-M < f(x)$ (ограничена снизу).



Черт. 39.

Геометрическая интерпретация. Если функция $f(x)$ ограничена сверху, то ее график расположен ниже некоторой прямой $y = P$ (черт. 37). Если функция $f(x)$ ограничена снизу, то ее график расположен выше некоторой прямой $y = p$ (черт. 38). Если функция $f(x)$ ограничена, то ее график лежит в полосе $p < y < P$ (черт. 39).

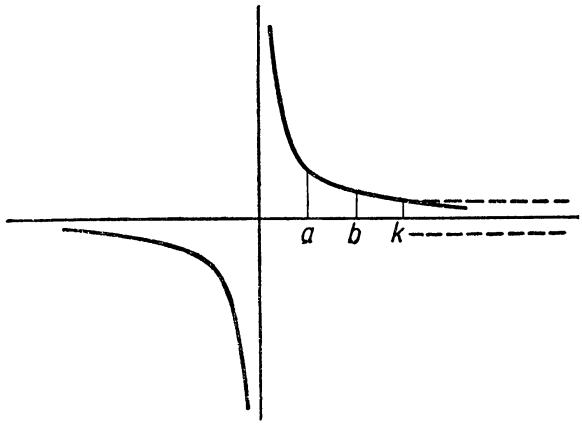
Примеры.

1. Функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены во всем интервале $(-\infty, +\infty)$, так как $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$. Достаточно взять любое число, большее 1, например 2, чтобы иметь строгие неравенства: $|\sin x| < 2$, $|\cos x| < 2$.

2. Функция 2^x в интервале $(-\infty, +\infty)$ ограничена снизу числом 0, так как $0 < 2^x$. В интервале $(-\infty, 0)$ функция 2^x ограничена, так как $0 < 2^x < 1$, если $x < 0$.

3. Функция $y=\frac{1}{x}$ неограничена во всей области ее определения. В самом деле, каким бы большим ни было взято число M, неравенство $\left|\frac{1}{x}\right|>M$ имеет место, если $|x|<\frac{1}{M}$.

Эта функция ограничена снизу, но не ограничена сверху в интервале $(0, +\infty)$, так как $0<y<+\infty$, если $0<x<+\infty$; ограничена сверху, но не ограничена снизу в интервале $-\infty<x<0$, так как $-\infty<y<0$, если



Черт. 40.

$-\infty<x<0$; ограничена в любом промежутке $<a, b>$, если a и b — числа одного знака. Так, например, $\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{a}$, если $0<a\leqslant x\leqslant b$. Ограничена в любом интервале $(k, +\infty)$, где $k>0$; в самом деле, $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$, если $k<x$ (черт. 40).

4. Функция Дирихле ограничена: $0\leqslant\chi(x)\leqslant 1$. Функция $[x]$ неограничена ни сверху, ни снизу: $-\infty<[x]<+\infty$. Функция $\{x\}$ ограничена: $0\leqslant\{x\}<1$. Функция sign x ограничена: $|\operatorname{sign} x|\leqslant 1$. Функция $\pi(x)$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

Последовательности.

Определение. *Функция, заданная на множестве натуральных чисел, т. е. образ натурального ряда, называется последовательностью.*

Иначе говоря, *последовательность есть функция от натурального аргумента.*

В этом случае принято значения функции обозначать одной буквой, отмечая снизу индексом то натуральное число, которое является значением аргумента. Пишут:

$$f(1)=s_1,\ f(2)=s_2,\ \ldots,\ f(n)=s_n,\ \ldots$$

Условились элементы последовательности называть так: s_1 — первый член, s_2 — второй член и т. д., s_n — n-й член. Символы, обо-

значающие члены последовательности, обычно пишут, располагая их в том порядке, как расположены числа натурального ряда: на первом месте пишут s_1, на втором пишут s_2 и т. д.

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$$

Для обозначения последовательности принято писать $\{s_n\}$.

Если члены последовательности (т. е. значения функции натурального аргумента) суть числа, то $\{s_n\}$ называется числовой последовательностью. В математике нередко рассматриваются и не числовые последовательности, например: последовательности точек, последовательности многоугольников, последовательности отрезков и т. п.

Примеры.

1. $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$; имеем: $s_1=1,\ s_2=\frac{1}{2},\ \ldots,\ s_n=\frac{1}{n},\ \ldots$

2. $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ Здесь члены, стоящие на нечетных местах, равны единице: $s_{2n+1}=1$. Члены, стоящие на четных местах, равны нулю: $s_{2n}=0$.

Закон соответствия между номером члена и его величиной может быть записан так: $s_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$.

3. $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ Здесь $s_1=s_2=\ldots=s_n=\ldots=1$.

4. Пусть закон соответствия задан формулой $s_n=\frac{n+1}{n!}$; последовательность можно записать в виде:

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{6},\ \ldots,\ \frac{n+1}{n!},\ \ldots$$

5. Последовательность 2, 3, 5, 7, ..., p_n, ... есть последовательность простых чисел (p_n есть n-е по порядку простое число).

Монотонные функции.

Определения. 1° *Функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ называется возрастающей, если при любых двух различных значениях аргумента x, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}$, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.*

2° *Функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ называется убывающей, если при любых двух различных значениях аргумента, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}$, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.*

Следовательно, если $x_1\in\mathfrak{M}$, $x_2\in\mathfrak{M}$ и $x_1<x_2$, то имеем для возрастающей функции

$$f(x_1)<f(x_2);$$

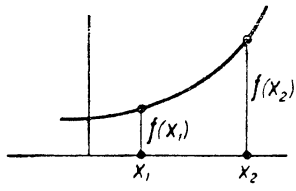
для убывающей функции

$$f(x_1)>f(x_2).$$

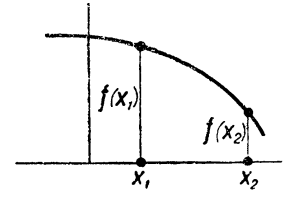
В частности, функция может быть возрастающей (черт. 41) или убывающей (черт. 42) во всей области ее определения.

Если при соблюдении основных условий: $x_1 \in \mathfrak{M}$, $x_2 \in \mathfrak{M}$ и $x_1 < x_2$ *выполняется условие* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, *то функция* $f(x)$ *на множестве* $\mathfrak{M}$ *называется неубывающей; если же выполняется условие* $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, *то функция* $f(x)$ *на множестве* $\mathfrak{M}$ *называется невозрастающей.*

Всякая возрастающая функция является неубывающей, однако не всякая неубывающая функция является возрастающей.



Черт. 41.

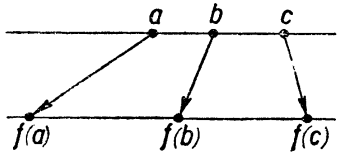


Черт. 42.

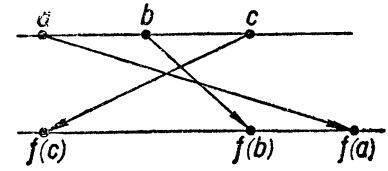
В самом деле, для неубывающей функции возможно равенство значений функции при двух различных значениях аргумента, что невозможно для возрастающей функции. Аналогичное замечание относится к убывающим и невозрастающим функциям.

Определение. *Функция неубывающая или невозрастающая на некотором множестве называется монотонной на этом множестве. Функции возрастающие и убывающие называются строго монотонными.*

При отображении посредством возрастающей функции $f(x)$ образы точек того множества, на котором $f(x)$ возрастает, связаны теми же неравенствами, как и прообразы. Так, если $a < b < c$,



Черт. 43.

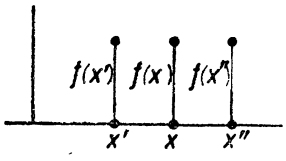


Черт. 44.

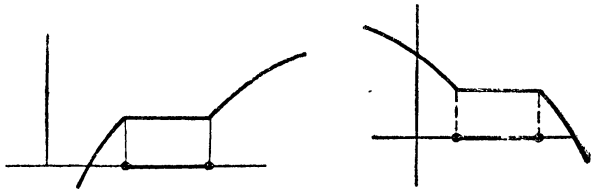
то $f(a) < f(b) < f(c)$ (черт. 43). Из двух точек a и b точка b, расположенная правее a, переходит в точку $f(b)$, расположенную правее точки $f(a)$.

При отображении с помощью убывающих функций знаки неравенств, связывающие прообразы, переходят в противоположные. Так, если $a < b < c$, то $f(a) > f(b) > f(c)$ (черт. 44). Точка b, расположенная правее a, переходит в точку $f(b)$, расположенную левее $f(a)$.

Если значения монотонной функции в двух точках x' и x'' равны, то значение функции при любом значении аргумента $x \in \mathfrak{R}$, принадлежащем сегменту $[x', x'']$, равно значению функции в точках x' и x''. Предположим для определенности, что функция $f(x)$ не убывает. Пусть $f(x') = f(x'')$ и x — значение аргумента, промежуточное между x' и x''; пусть, например, $x' < x < x''$. Так как функция неубывающая, то $f(x') \leqslant f(x) \leqslant f(x'')$, что возможно лишь при условии $f(x') = f(x) = f(x'')$ (черт. 45).



Черт. 45.



Черт. 46.

Если функция $f(x)$ монотонна в некотором промежутке $< a, b >$ и если $a < x_1 < x_2 < b$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то $f(x)$ постоянна на сегменте $[x_1, x_2]$. Промежутки, в которых функция $f(x)$ постоянна, называются промежутками постоянства (черт. 46). *Строго монотонная функция не может иметь промежутков постоянства.*

Примеры.

1. Функции a^x и $\log_a x$ возрастают при $a > 1$ и убывают при $a < 1$.

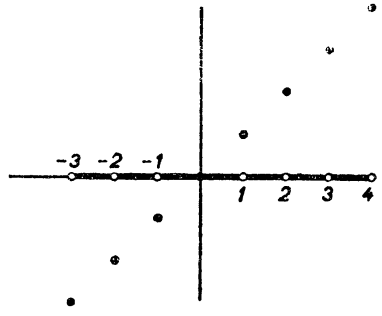
2. Функция $f(x) = x^{2k}$ не является монотонной во всей области ее определения, она возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$ и убывает в полуинтервале $(-\infty, 0]$.

В самом деле,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^{2k} - x_1^{2k} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2^{2k-1} + x_2^{2k-2}x_1 + \ldots + x_1^{2k-1}).$$

Если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то оба множителя положительны, а потому $f(x_1) < f(x_2)$; если же $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то первый множитель положителен, а второй отрицателен, а потому $f(x_1) > f(x_2)$.



Черт. 47.

3. Функция $\operatorname{tg} x$ возрастает в любом интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, но не является монотонной во всей области определения. Так, например,

$$-\frac{3}{4}\pi < 0 < \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) > \operatorname{tg} 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

4. Функция, определенная в интервале $(-\infty, +\infty)$ законом соответствия

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ (если } x \text{—целое число);} \\ 0 \text{ (если } x \text{—не целое число),} \end{cases}$$

не является монотонной в этом интервале. На множестве целых чисел $f(x)$ возрастает (черт. 47).

5. Функция $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ является неубывающей. Промежутками постоянства являются интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ (см. черт. 30). В первом интервале $\varphi(x)=-1$, а во втором $\varphi(x)=1$.

6. Функция $[x]$ является неубывающей. Промежутками постоянства являются полусегменты вида $[n, n+1)$, где n — целое число (см. черт. 28).

7. Функция Дирихле не является монотонной ни в каком промежутке. Предположим, что в некотором интервале (a, b) $\chi(x)$ монотонна. Каковы бы ни были числа a и b, между ними найдутся два рациональные числа x_1 и x_2 (пусть $x_1<x_2$), а между этими двумя числами найдется иррациональное число x_3.

Таким образом, $x_1<x_3<x_2$. Имеем $\chi(x_1)=\chi(x_2)=1$ и $\chi(x_3)=0$. Так как $\chi(x_1)>\chi(x_3)$, то функция $\chi(x)$ не может быть неубывающей; так как $\chi(x_3)<\chi(x_2)$, то функция $\chi(x)$ не может быть невозрастающей.

Четные и нечетные функции.

Будем говорить, что множество чисел $\mathfrak{M}$ симметрично относительно точки 0, если вместе с произвольным числом x этого множества в нем содержится и противоположное число $-x$, т. е.

$$\text{если } x\in\mathfrak{M}, \text{ то и } -x\in\mathfrak{M}.$$

Определение. 1° *Функция $f(x)$ называется четной, если область ее определения симметрична относительно точки 0 и ее значения равны, когда значения аргумента являются противоположными числами:*

$$f(x)=f(-x).$$

2° *Функция называется нечетной, если область ее определения симметрична относительно точки 0 и ее значения суть противоположные числа, когда значения аргумента являются противоположными числами:*

$$f(x)=-f(-x).$$

Примеры.

1. Нижеследующие функции являются четными:

$$x^{2k},\ \cos x,\ |x|,\ \chi(x).$$

2. Нижеследующие функции являются нечетными:

$$x^{2k+1},\ \sin x,\ x|x|,\ \operatorname{tg} x,\ \frac{|x|}{x}.$$

3. Нижеследующие функции не являются ни четными, ни нечетными:

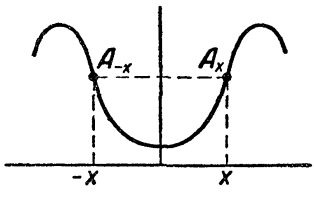
$$a^x,\ x^2+x+1,\ \sqrt{x},\ \lg_a x,\ [x],\ \{x\}.$$

4. Если область определения функции $f(x)$ симметрична относительно точки 0, то функция $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ является четной, а функция $F_2(x)=f(x)-f(-x)$ — нечетной. Так, 2^x+2^{-x} — четная, а 2^x-2^{-x} — нечетная функция.

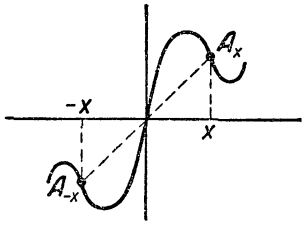
Геометрическая интерпретация. График четной функции симметричен относительно оси ординат. В самом деле, если $A_x(x, f(x))$ есть точка графика, то точка $A_{-x}(-x, f(x))$, симметричная относительно оси OY, также принадлежит графику, ибо $f(-x)=f(x)$ (черт. 48).

Для нечетной функции из соотношения $f(-x)=-f(x)$ следует, что ее график симметричен относительно начала координат, так как точки $A_x(x, f(x))$ и $A_{-x}(-x, -f(x))$ обе принадлежат графику (черт. 49).

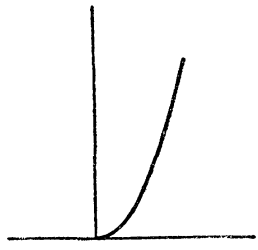
Для построения графика четной (нечетной) функции достаточно построить график для неотрицательных значений аргумента $x \geqslant 0$,



Черт. 48.



Черт. 49.



Черт. 50.

а затем построить множество точек, симметричных относительно оси OY (начала координат) точкам построенного графика.

Примечание. Определения четной и нечетной функций требуют, что $f(x)$, будучи определенной в некоторой точке a, определена также и в точке $-a$. Так, например, не имеет смысла говорить о четности или нечетности функции, заданной на полусегменте $[0, +\infty)$ законом соответствия $f(x)=x^2$, так как $f(x)$ не определена для значений $x<0$ (черт. 50).

Теорема. *Если четная функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором множестве $\mathfrak{M}_+$, принадлежащем полусегменту $[0, +\infty)$, то $f(x)$ убывает (возрастает) на множестве $\mathfrak{M}_-$, симметричном* множеству $\mathfrak{M}_+$ относительно начала координат.*

Если нечетная функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве $\mathfrak{M}_+$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве $\mathfrak{M}_-$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – четная (нечетная) функция, возрастающая на $\mathfrak{M}_+$. Если $x'<x''$ — два значения аргумента, принадлежащие $\mathfrak{M}_-$, то значения $-x'>-x''$ принадлежат $\mathfrak{M}_+$. Для четной функции имеем:

$$f(-x')>f(-x'') \text{ или } f(x')>f(x'') \quad \text{(черт. 51).}$$

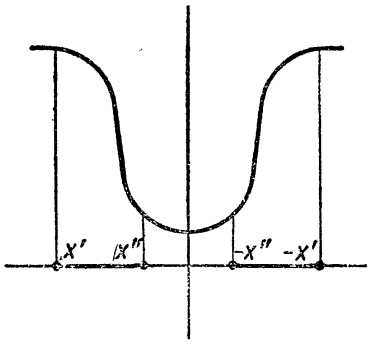
* Множества $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ составлены из взаимно противоположных чисел. Если число x принадлежит одному из этих множеств, то число $-x$ принадлежит другому. Такие множества называются симметричными.

Для нечетной функции имеем:

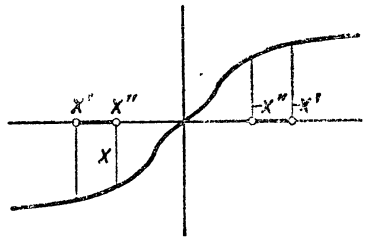
$$f(-x') > f(-x'') \quad \text{или} \quad -f(x') > -f(x''),$$

откуда $f(x) < f(x'')$ (черт. 52), ч. т. д.

Так, например, четная функция x^{2n} возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$ и убывает в полуинтервале $(-\infty, 0]$. Нечетная функция x^{2n+1} возрастает на обоих промежутках $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$.



Черт. 51.



Черт. 52.

Нечетная функция $\sin x$ возрастает в обоих промежутках $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; четная функция $\cos x$ убывает в первом промежутке и возрастает во втором.

Периодические функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число l (хотя бы одно) — такое, что при любом значении аргумента x значения $x+l$ и $x-l$* также принадлежат области определения функции $f(x)$ и ее значения в точках x, $x+l$ и $x-l$ равны:

$$f(x) = f(x+l) = f(x-l).$$

Из определения следует, что каково бы ни было значение x аргумента, всякое число вида $x+kl$ (где l — период, а k — любое целое число) принадлежит области определения периодической функции и имеет место равенство

$$f(x+kl) = f(x).$$

В самом деле,

$$f(x) = f(x \pm l) = f((x \pm l) \pm l) = f(x \pm 2l) = \ldots = f(x+kl).$$

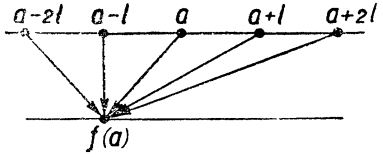
Рассмотрим бесконечное множество сегментов

$$\ldots, [-l, 0], [0, l], [l, 2l], [2l, 3l], \ldots,$$

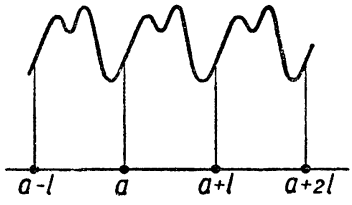
каждый из которых (кроме $[0, l]$) может быть получен из «начального» сегмента $[0, l]$ параллельным переносом.

Если l есть период функции $f(x)$, то точки a, $a \pm l$, $a \pm 2l$ и т. д. отображаются в одну точку (черт. 53). Множества значений аргумента $\mathfrak{M}_k$, принадлежащие (соответственно) каждому из сегментов $[kl, (k+1)l]$, имеют в качестве образов одно и то же множество чисел.

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом l обладает некоторыми свойствами (например, монотонна или ограничена) на



Черт. 53.



Черт. 54.

множестве точек $\mathfrak{M}_0$, принадлежащем начальному сегменту $[0, l]$, то она обладает теми же свойствами на любом из множеств $\mathfrak{M}_k$, лежащем на сегменте $[kl, (k+1)l]$ (k — любое целое число). График периодической функции бесконечное множество раз «повторяется», будучи одинаковым на каждом из сегментов $[kl, (k+1)l]$ (черт. 54).

Примеры.

1. Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ — периодические с периодом 2π. Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — периодические с периодом π.

2. Функция $\{x\}$ — периодическая с периодом 1 (см. черт. 29). В самом деле:

$$\{x+1\} = x+1-[x+1] = x-[x] = \{x\}.$$

Так как функция $\{x\}$ определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, то число $x-1$ принадлежит области определения функции, и по доказанному

$$\{x-1\} = \{(x-1)+1\} = \{x\}.$$

Число 1 является наименьшим положительным периодом. В самом деле, на полусегменте $[0, 1]$ имеем $\{x\} = x$ и $\{0\} = 0 \neq \{1\}$, если $0 < l < 1$.

3. Для функции Дирихле имеем $\chi(x \pm r) = \chi(x)$ (r — рациональное число). Поэтому периодом $\chi(x)$ служит любое рациональное число $r > 0$.

4. Функция $f(x) = \text{const}$ имеет периодом любое действительное число.

§ 13. Обратная функция

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на некотором множестве значений аргумента $\mathfrak{M}_x$. Множество $\mathfrak{M}_y$ значений функции есть образ множества $\mathfrak{M}_x$; каждому числу x множества $\mathfrak{M}_x$ соответствует одно единственное число множества $\mathfrak{M}_y$, но какое-либо число y множества $\mathfrak{M}_y$ может иметь несколько прообразов

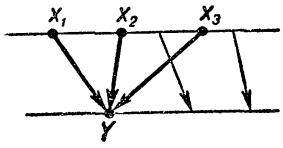
в множестве $\mathfrak{M}_x$. На чертежах-схемах отображения из одной и той же точки верхней прямой не могут выходить две стрелки, но в какой-либо точке нижней прямой могут оканчиваться несколько или бесконечное множество стрелок (черт. 55).

Взяв какое-нибудь число $y \in \mathfrak{M}_y$, поставим ему в соответствие все те значения аргумента $x_1, x_2, \ldots$, образом которых является y:

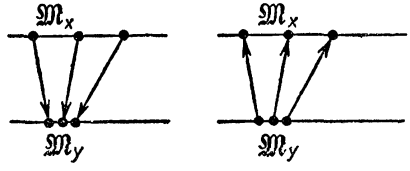
$$y = f(x_1) = f(x_2) = \ldots$$

Такое соответствие, вообще говоря, не определяет функцию, так как в общем случае нарушается основное требование, именно: числу y соответствует не одно, а некоторая совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots$ *.

В частных случаях закон соответствия функции $y = f(x)$ может оказаться таким, что всяким двум различным значениям аргу-



Черт. 55.



Черт. 56.

мента соответствуют различные значения функции, тогда каждому значению y функции можно поставить в соответствие одно единственное число x, именно то, образом которого является y:

$$y = f(x).$$

В рассматриваемом случае в каждой точке множества $\mathfrak{M}_y$ значений функции, изображенного на нижней прямой (черт. 56), оканчивается только одна стрелка, и если изменить направления стрелок на противоположные, то от каждой данной точки множества $\mathfrak{M}_y$ будет направлена одна единственная стрелка в некоторую точку множества $\mathfrak{M}_x$.

Определение. *Если каждому значению функции $y = f(x)$ соответствует в области ее определения единственный прообраз $x \in \mathfrak{M}_x$, то функцией, обратной по отношению к $y = f(x)$, называется функция $x = \bar{f}(y)$, для которой:*

1° *область определения есть множество $\mathfrak{M}_y$ значений функции $f(x)$;*

2° *закон соответствия таков: всякому значению $y \in \mathfrak{M}_y$ соответствует значение $x \in \mathfrak{M}_x$, при котором $y = f(x)$.*

---

* Иногда в этом случае говорят о многозначной функции, однако авторы считают нецелесообразным вводить это понятие в курс анализа, изучающего функции действительного аргумента.

Из этого определения следует, что функция $y=f(x)$ является обратной относительно $x=\overline{f}(y)$. Функции $y=f(x)$ и $x=\overline{f}(y)$ называются взаимно обратными. Переход от значения x посредством функции $f(x)$ приводит к значению $y=f(x)$, а переход от значения y посредством обратной функции $\overline{f}(y)$ приводит к первоначально взятому значению x, а потому

$$\overline{f}(f(x))=x \text{ (тождественно на } \mathfrak{M}_x)$$

и аналогично

$$f(\overline{f}(y))=y \text{ (тождественно на } \mathfrak{M}_y).$$

Определение понятия обратной функции применимо не только к числовым, но и к произвольным функциям. В общем случае множества значений аргумента $\mathfrak{M}_x$ и значений функции $\mathfrak{M}_y$ суть произвольные множества. Данное значение функции y_1 соответствует не одному, а некоторому множеству значений аргумента. В частности, если двум различным значениям аргумента соответствуют два различные значения функции, то возможен переход к обратной функции. *Соответствие, устанавливаемое между элементами двух множеств посредством двух взаимно обратных функций, называется взаимно однозначным соответствием.*

Примеры.

1. Положим $y=2x-3$.

По любому заданному значению y путем решения уравнения первой степени можно найти соответствующее значение x:

$$x=\frac{y+3}{2}.$$

Эта функция определена на множестве всех действительных чисел.

Функции

$$f(x)=2x-3 \quad \text{и} \quad \overline{f}(y)=\frac{y+3}{2}$$

суть взаимно обратные функции, что можно проверить следующим образом:

$$\overline{f}(f(x))=\frac{(2x-3)+3}{2}\equiv x, \quad f(\overline{f}(y))=2\left(\frac{y+3}{2}\right)-3\equiv y.$$

2. Для функции $y=x^3$ обратной является $x=\sqrt[3]{y}$. Для функции $y=a^x$ обратной является $x=\log_a y$.

3. Функция $y=x^2$ определена в интервале $(-\infty, +\infty)$ и отображает интервал $-\infty<x<+\infty$ на полусегмент $0\leqslant y<+\infty$; при этом каждому числу $y>0$ соответствует два прообраза $x=\pm\sqrt{y}$, поэтому данная функция не имеет обратной функции.

4. Функция Дирихле не имеет обратной функции: всякое рациональное число $x=r$ отображается в точку $y=\chi(x)=0$; по значению $y=0$ невозможно воспроизвести единственный прообраз.

5. Функция $y=[x]$ не имеет обратной функции, так как целому значению $y=n$ соответствует бесконечное множество прообразов, образующих полусегмент $x=[n, n+1)$.

6. Процесс счета предметов состоит в установлении взаимно однозначного соответствия между предметами данного множества и числами натурального ряда. Утверждение, что данное множество содержит n элементов, означает, что элементы данного множества могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с n-м «отрезком»

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

натурального ряда.

7. При изображении действительных чисел точками числовой прямой всякому действительному числу ставится во взаимно однозначное соответствие точка прямой линии. Обратная функция ставит в соответствие всякой точке прямой линии действительное число, называемое координатой данной точки.

8. Площадь многоугольника является функцией многоугольника (см. стр. 17). Эта функция обратной функции не имеет. В самом деле, всякому положительному числу S соответствует бесконечное множество многоугольников, имеющих площадь, равную S.

Теорема. *Всякая строго монотонная функция имеет обратную функцию.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $f(x)$ возрастает; тогда из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. образы различных значений аргумента различны, и одному образу соответствует один единственный прообраз. Следовательно, существует функция $x = \overline{f}(y)$, обратная по отношению к $y = f(x)$, ч. т. д.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то обратная функция $x = \overline{f}(y)$ также возрастает (убывает).*

Доказательство. Допустим для определенности, что функция $f(x)$ возрастает. Покажем, что $\overline{f}(y)$ также возрастает. В самом деле, пусть $y_1 < y_2$ — два значения аргумента функции $\overline{f}(y)$. Если $x_1 = \overline{f}(y_1)$, $x_2 = \overline{f}(y_2)$, то $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$, а потому $f(x_1) < f(x_2)$; но последнее неравенство [в силу возрастания $f(x)$] возможно только, если $x_1 < x_2$, откуда $\overline{f}(y_1) < \overline{f}(y_2)$, т. е. $\overline{f}(y)$ возрастает, ч. т. д.

Примечание. Если монотонная функция (неубывающая или невозрастающая) имеет промежуток постоянства, то она не имеет обратной функции.

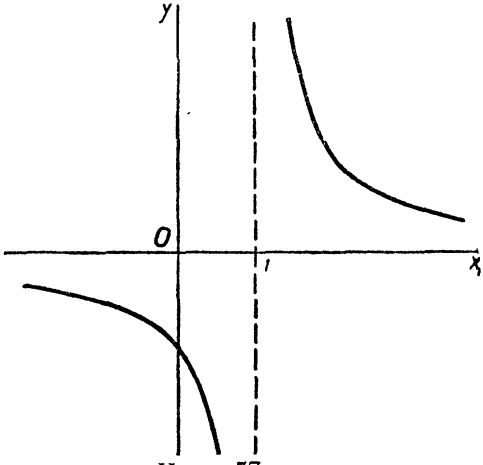
Может случиться, что функция $y = f(x)$ во всей области определения не имеет обратной функции, однако переход к обратной функции $x = \overline{f}(y)$ возможен, если $f(x)$ рассматривать на некоторой части $\mathfrak{M}_1$ области определения. Так будет, например, если функция $f(x)$ строго монотонна на множестве $\mathfrak{M}_1$. В рассматриваемом случае функция $x = \overline{f}(y)$ называется обратной относительно $y = f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}_1$.

Примеры.

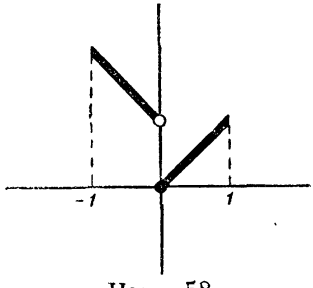
1. При нечетном $n = 2k+1$ функция $y = x^{2k+1}$ возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$. Обратная функция есть $x = \sqrt[2k+1]{y}$. При четном $n = 2k$ функ-

ция $y=x^{2k}$ возрастает на полусегменте $0\leqslant x<+\infty$ и убывает в полуинтервале $-\infty<x\leqslant 0$. Функции $x=\sqrt[2k]{y}$ и $x=-\sqrt[2k]{y}$ суть обратные по отношению к данной на полусегменте $[0, +\infty)$ и в полуинтервале $(-\infty, 0]$ соответственно. В интервале $-\infty<x<+\infty$ обратная функция не существует, так как значения $\pm x$ отображаются в одну точку $y=x^{2k}=(-x)^{2k}$.

2. Функция $y=\sin x$ возрастает на сегменте $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, функция, обратная на этом сегменте, есть $x=\arcsin y$. Функция $\arcsin y$ возрастает на сегменте $[-1, 1]$. Функции $y=\sin x$ и $x=\arcsin y$ взаимно однозначно отображают друг на друга сегменты $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $-1\leqslant y\leqslant 1$. Функция $y=\sin x$ убывает на сегменте $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$. Обратная функция на этом сегменте есть $x=\pi-\arcsin y$. Функция $\sin x$, рассматриваемая во всем интервале $(-\infty, +\infty)$, не имеет обратной функции.



Черт. 57.



Черт. 58.

Функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает в любом интервале $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$. Обратная функция в соответствующем интервале есть

$$x=\operatorname{arc\,tg} y+k\pi.$$

Эта функция возрастает в интервале $-\infty<y<+\infty$.

3. Функция $y=\frac{1}{x-1}$ убывает на каждом из интервалов $-\infty<x<1$ и $1<x<+\infty$ (черт. 57). Обратная функция для каждого из этих интервалов изображается формулой $x=\frac{y+1}{y}$. Эта функция убывает на соответственных интервалах $-\infty<y<0$ и $0<y<+\infty$.

Примечание. Не следует думать, что обратная функция существует только тогда, когда данная функция строго монотонна. Положим на сегменте $[-1, 1]$

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1 & (\text{если } -1\leqslant x<0);\\ x & (\text{если } 0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$ (черт. 58).

Эта функция немонотонна на сегменте $[-1, 1]$: она убывает на полусегменте $[-1, 0)$ и возрастает на сегменте $[0, 1]$. Однако соответствие значений y и значений x взаимно однозначное. В самом деле, полусегмент $-1 \leqslant x < 0$ взаимно однозначно отображается на полуинтервал $1 < y \leqslant 2$, а сегмент $0 \leqslant x \leqslant 1$ на сегмент $0 \leqslant y \leqslant 1$. Закон соответствия обратной функции таков:

$$x = \bar{f}(y) = \begin{cases} y & (0 \leqslant y \leqslant 1); \\ 1 - y & (1 < y \leqslant 2). \end{cases}$$

Этот пример показывает, что строгая монотонность является достаточным, но не необходимым условием существования обратной функции.

§ 14. Функции, заданные параметрически

Рассмотрим систему функций

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

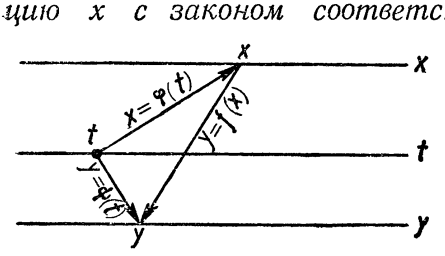
заданных совместно на некотором множестве $\mathfrak{M}$. Предположим, что (t) имеет обратную функцию:

$$t = \bar{\varphi}(x).$$

При этих условиях каждому значению x соответствует некоторое значение t, а значению t — значение y:

$$y = \psi(\bar{\varphi}(x)).$$

Таким образом, *система функций* (1) *определяет y как функцию x с законом соответствия* $y = f(x) = \psi(\bar{\varphi}(x))$ (черт. 59).



Черт. 59.

Область определения функции $f(x)$ есть множество значений функции $x = \varphi(t)$.

Задание функции $y = f(x)$ посредством системы (1) (*при выполнении указанных условий*) *называется параметрическим заданием этой функции.* Аргумент t называется параметром. Переход от системы (1) к функции $y = f(x) = \psi(\bar{\varphi}(x))$ называется исключением параметра.

При всех значениях параметра $t \in \mathfrak{M}_t$ имеет место тождество

$$\psi(t) = f(\varphi(t)).$$

В самом деле, числу t соответствует число $y = \psi(t)$, но тому же числу t соответствует в множестве $\mathfrak{M}_x$ число $x = \varphi(t)$, а числу x — число $y = f(x) = f(\varphi(t))$.

В этом можно убедиться также путем формальных преобразований. Принимая во внимание, что

$$f(x)=\psi(\bar{\varphi}(x)) \quad \text{и} \quad \bar{\varphi}(\varphi(t))=t,$$

получим:

$$f(\varphi(t))=\psi(\bar{\varphi}(\varphi(t)))=\psi(t).$$

Переход от функции $y=f(x)$ к системе (I) называется параметризацией данной функции. *Всякая функция может быть параметризована.* Достаточно указать на следующий простейший способ параметризации:

$$x=t; \quad y=f(t),$$

в котором за параметр принимается аргумент x.

Параметризация данной функции $y=f(x)$ может быть осуществлена бесконечным множеством способов. В самом деле, пусть система (1) определяет функцию $y=f(x)$. Пусть $t=\xi(\tau)$ есть какая-либо функция аргумента τ, множество значений которой есть $\mathfrak{M}_t$, и имеющая обратную функцию, тогда

$$x=\varphi(t)=\varphi(\xi(\tau)) \quad \text{и} \quad y=\psi(t)=\psi(\xi(\tau)).$$

Так как $x=\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\bar{\varphi}(x)$, а $t=\xi(\tau)$ имеет обратную функцию $\tau=\bar{\xi}(t)$, то сложная функция $x=\varphi(\xi(\tau))$ тоже имеет обратную функцию, закон соответствия которой таков:

$$\tau=\bar{\xi}(\bar{\varphi}(x)).$$

Следовательно, система $x=\varphi_1(\tau)$, $y=\psi_1(\tau)$, где $\varphi_1(\tau)=\varphi(\xi(\tau))$ и $\psi_1(\tau)=\psi(\xi(\tau))$, определяет функцию, совпадающую с $y=f(x)$, которая оказывается иначе параметризованной. Но всякая функция $y=f(x)$ может быть параметризована, а потому она может быть параметризована бесконечным множеством способов.

Если функция $y=\psi(t)$ системы (I) имеет обратную функцию $\bar{\psi}(y)$, то эта система определяет параметрически x как функцию аргумента y. Если для обеих функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ существуют обратные функции, то функции $y=\psi(\bar{\varphi}(x))$ и $x=\varphi(\bar{\psi}(y))$, определяемые системой (1), являются взаимно обратными.

Примеры.

1. Положим $f(x)=\sqrt{x^3}$. Эта функция определена на полусегменте $[0, +\infty)$. Положим $x=t^2$ на полусегменте $0\leqslant t<+\infty$, тогда множество значений t^2 есть полусегмент $[0, +\infty)$, и мы получим:

$$x=t^2, \quad y=t^3, \quad (0\leqslant t<+\infty).$$

Это представление данной функции удобно тем, что y и x выражены как рациональные функции параметра t.

2. Положим $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ (где $a>0$) на сегменте $[0, \pi]$. На этом сегменте функция $\cos t$ монотонна, а потому имеет обратную функцию:

$$t=\arccos\frac{x}{a}.$$

Исключая параметр, получим

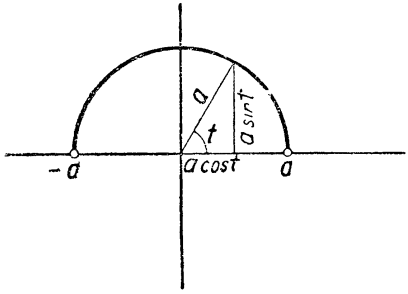
$$y=a\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)=a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$$

на сегменте $-a\leqslant x\leqslant a$.

Геометрически эта функция изображается верхней полуокружностью

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{(черт. 60)}.$$

На сегменте $[\pi,\ 2\pi]$ рассматриваемая система дает параметрическое представление функции



Черт. 60.

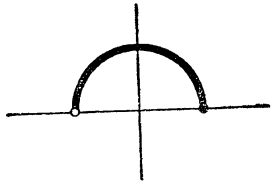
$y=-\sqrt{a^2-x^2}$ (нижняя полуокружность);

на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ возрастает; система определяет функцию $x=\sqrt{a^2-y^2}$ (правая полуокружность).

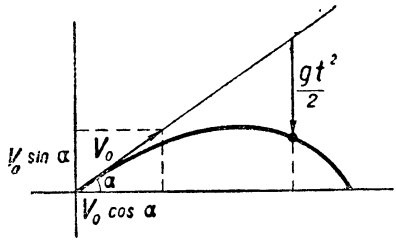
Положим $\tau=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; функция $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ возрастает на полусегменте $0\leqslant t<\pi$ и отображает этот полусегмент на полусегмент $0\leqslant\tau<+\infty$. В силу тригонометрических формул, выражающих синус и косинус через тангенс половинного аргумента, получим:

$$x=\frac{2a\tau}{1+\tau^2};\quad y=\frac{a(1-\tau^2)}{1+\tau^2}.$$

Эта система дает параметрическое представление функции $y=\sqrt{a^2-x^2}$ в полуинтервале $-a<x\leqslant a$ (верхняя полуокружность с исключенным левым концом) (черт. 61).



Черт. 61.



Черт. 62.

3. Материальная точка брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (черт. 62); определить траекторию, которую она опишет. Составляющие начальной скорости по осям координат OX и OY соответственно равны:

$$v_0\cos\alpha \quad \text{и} \quad v_0\sin\alpha.$$

В направлении оси OX не действуют никакие силы (мы не учитываем сопротивление воздуха), а потому проекция материальной точки на ось абсцисс должна двигаться равномерно со скоростью

$$x=v_0\cos\alpha.$$

Вдоль оси OY действует сила тяготения. Если бы не было силы тяготения, то по истечении времени t точка поднялась бы на высоту $v_0\cdot t\sin\alpha$; но под

действием этой силы она должна опуститься на расстояние $\frac{gt^2}{2}$. Итак, мы получим параметрические уравнения траектории в следующем виде:

$$x = v_0 \cdot t \cos\alpha, \quad y = v_0 \cdot t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая параметр, найдем уравнение траектории (парабола) в декартовых координатах:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

4. Система

$$x = \sin t, \quad y = 2t,$$

заданная в интервале $(-\infty, +\infty)$, не определяет y как функцию x, ибо функция $x = \sin t$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ не имеет обратной функции. Так, например, значениям $t = k\pi$ соответствует одно и то же значение $x = 0$, но различные значения $y = 2k\pi$. Система определяет x как функцию от y:

$$x = \sin\frac{y}{2}.$$

Примечание. Существование обратной функции $t = \overline{\varphi}(x)$ является достаточным, но не необходимым условием того, чтобы система $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определяла y как функцию от x. В самом деле, может случиться, что тем различным значениям t, которым соответствует одинаковое значение x, соответствует также одинаковое значение y, а потому каждому значению $\varphi(t)$ будет соответствовать определенное значение $\psi(t)$.

Примеры.

1. Ни одна из функций $x = t^2$ и $y = \chi(t)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ не имеет обратной функции, однако двум различным значениям $t = \pm\sqrt{x}$ соответствует одно и то же значение $y = \chi(\pm\sqrt{x})$, так как числа $\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$ оба рациональные или иррациональные. Итак, система определяет функцию $y = \chi(\sqrt{x})$ на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$.

2. $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$.

Ни одна из функций в интервале $-\infty < t < +\infty$ не имеет обратной функции. Однако если

$$\sin t_1 = \sin t_2 = x,$$

то

$$y_1 = \sin^2 t_1 = y_2 = \sin^2 t_2 = x^2.$$

Следовательно, система определяет функцию $y = x^2$ на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Система $x = \operatorname{sign} t$, $y = \operatorname{sign}^2 t$ определяет функцию $y = x^2$, для которой область определения состоит из трех точек: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$.

ГЛАВА II

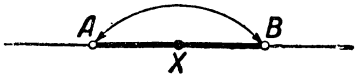
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 15. Понятие окрестности

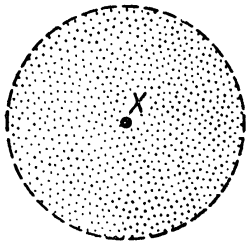
На нижеследующих примерах дается разъяснение понятия окрестности — одного из основных понятий математического анализа.

Окрестностью данной точки x на прямой называется множество точек любого отрезка AB, серединой которого является точка x. Сами концы A и B к окрестности не причисляются (черт. 63).

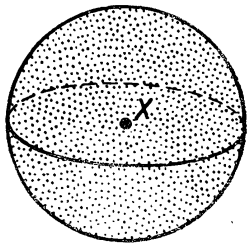
Окрестностью точки X на плоскости называется



Черт. 63.



Черт. 64.



Черт. 65.

множество точек плоскости, лежащих внутри любого круга с центром в точке X (окружность к окрестности не причисляется (черт. 64).

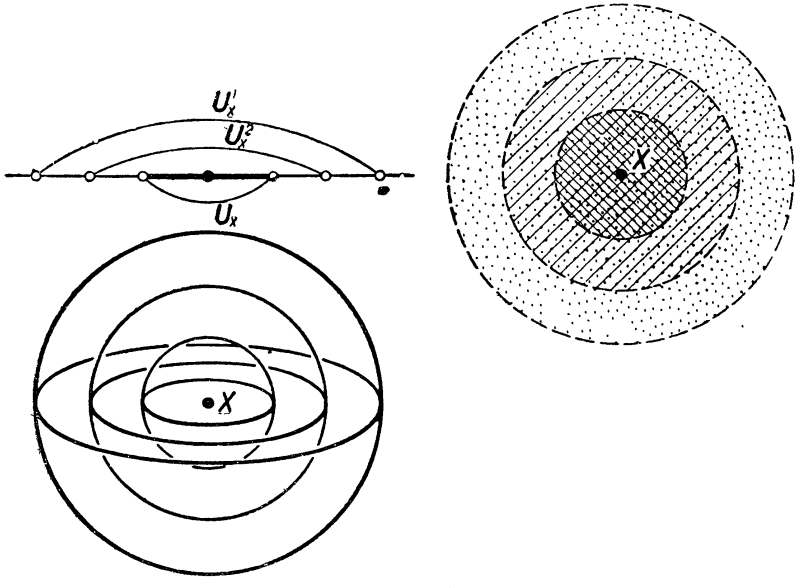
Окрестностью точки X в пространстве называется множество точек, лежащих внутри любого шара с центром в точке X (поверхность шара к окрестности не причисляется) (черт. 65).

Нетрудно подметить следующие три общие свойства окрестностей точек (на прямой, на плоскости и в пространстве).

Свойство I_U. *Если $U_x^{(1)}$ и $U_x^{(2)}$ — две окрестности точки x, то существует окрестность U_x, содержащаяся как в первой, так и во второй окрестности:*

$$U_x \subset U_x^{(1)} \text{ и } U_x \subset U_x^{(2)}.$$

На чертеже 66 пояснено свойство I_U.



Черт. 66.

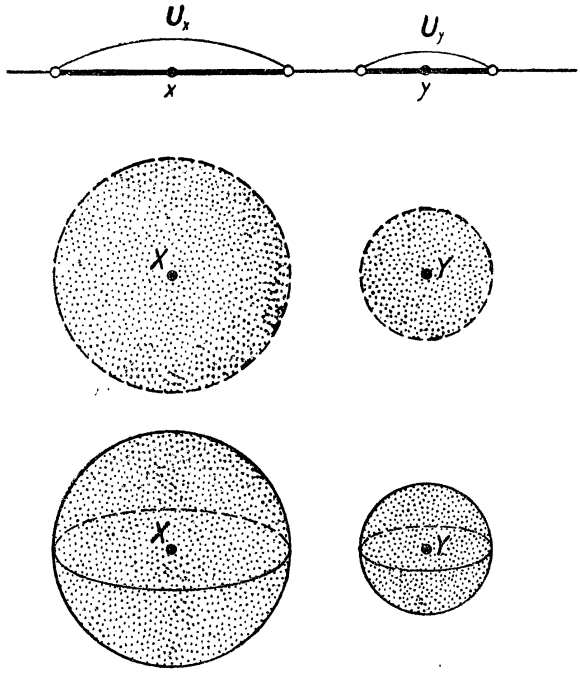
Свойство II_U. *Каковы бы ни были две различные точки x и y, существуют окрестности U_x и U_y этих точек, не содержащие ни одной общей точки.*

Пояснение свойства II_U дано на чертеже 67.

Свойство III_U. *Если точка y принадлежит окрестности U_x точки x, то существует окрестность U_y точки y, содержащаяся в окрестности U_x:*

$$U_y \subset U_x.$$

Пояснение свойства III_U дано на чертеже 68.

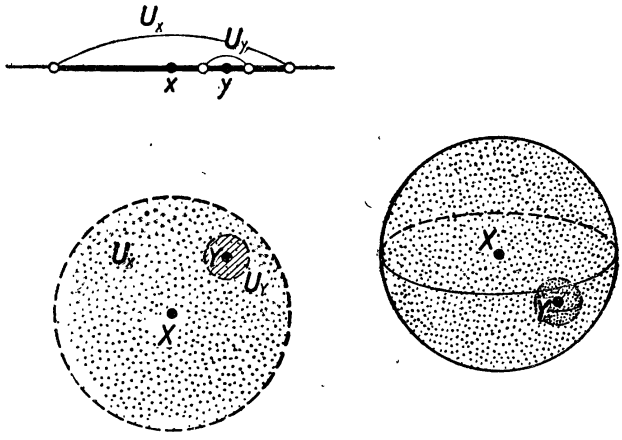


Черт. 67.

Сформулированные свойства I_U, II_U и III_U рассматриваются как основные свойства, характеризующие понятие окрестности. Эти свойства I_U, II_U и III_U называются аксиомами окрестностей *.

Следствия из основных свойств окрестностей.

1° Свойство I_U можно обобщить:



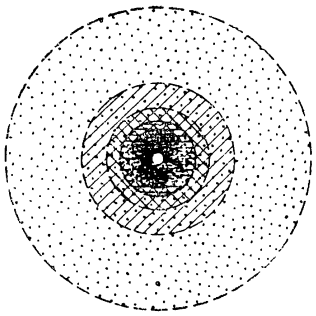
Черт. 68.

* В обычной формулировке этих аксиом свойство III_U предшествует свойству II_U. Мы отступили от этого порядка лишь по педагогическим соображениям.

Если дано некоторое число n окрестностей точки A, то существует окрестность, принадлежащая каждой данной окрестности.

В самом деле, если $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — данные окрестности точки A, то существует окрестность $U_A^{(1)}$, принадлежащая окрестностям U_1 и U_2; далее существует окрестность $U_A^{(2)}$, принадлежащая окрестностям $U_A^{(1)}$ и U_3, и т. д. В результате этого процесса может быть получена окрестность $U_A^{(n-1)} = U_A$, принадлежащая всем данным окрестностям.

Примечание. Свойство I может оказаться несправедливым для бесконечной системы окрестностей данной точки. Рассмотрим, например, последовательность концентрических кругов U_1, $U_2, \ldots, U_n \ldots$ с радиусами, равными $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Эти круги являются окрестностями их общего центра O. В данном примере не существует окрестности U точки O, принадлежащей всем окрестностям $U_1, U_2, \ldots U_n \ldots$ В самом деле, каким бы малым ни был радиус r окрестности U, окрестность U_n при $n > \frac{1}{r}$ имеет радиус $\frac{1}{n} < r$, а потому $U_n \subset U$ (черт 69).



Черт. 69.

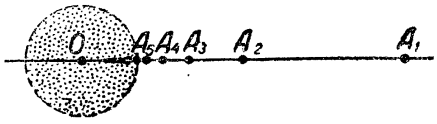
2° Свойство II_U можно обобщить для любой конечной системы точек. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — n различных точек. По свойству II_U, существуют окрестности U_1' и U_2' точек A_1 и A_2, не имеющие общих точек. Теперь присоединим точку A_3. В силу того же свойства II_U, существуют окрестности U_1'' и U_3' точек A_1 и A_3, не имеющие общих точек, а также окрестности U_3'' и U_2'' точек A_3 и A_2, не имеющие общих точек. По свойству I_U, существует окрестность U_1 точки A_1, содержащаяся в U_1' и U_1'', окрестность U_2 точки A_2, содержащаяся в U_2' и U_2'', и окрестность U_3 точки A_3, содержащаяся в U_3' и U_3''. Окрестности U_1, U_2 и U_3 не имеют попарно общих точек. Присоединяя последовательно остальные точки $A_4, A_5, \ldots, A_n$, можно получить систему окрестностей $U_1, U_2, \ldots, U_n$, не имеющих попарно общих точек.

Примечание. Для бесконечной системы точек свойство II_U может оказаться несправедливым; рассмотрим множество точек плоскости

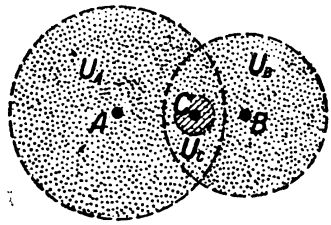
$$A_1(1, 0), A_2\left(\frac{1}{2}, 0\right), A_3\left(\frac{1}{3}, 0\right), \ldots, A_n\left(\frac{1}{n}, 0\right), \ldots$$

Какую бы окрестность U точки O мы ни взяли, эта окрестность содержит бесконечное множество точек данного множества. Если r — радиус окрестности U, то все точки $A_n, A_{n+1} \ldots$ при $n > \frac{1}{r}$ лежат в этой окрестности (черт. 70).

3° *Если окрестности двух каких-либо точек A и B имеют общую точку C, то существует окрестность точки C, принадлежащая данным окрестностям* точек A и B. Пусть U_A есть окрестность точки A, U_B — окрестность точки B; по условию, $C \in U_A$ и $C \in U_B$ (черт. 71). Из

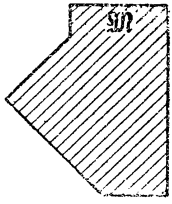


Черт. 70.

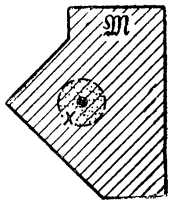


Черт. 71.

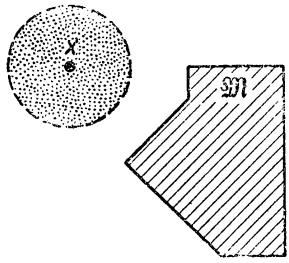
условия $C \in U_A$ следует, что существует окрестность U'_C точки C, принадлежащая окрестности U_A : т. е. $U'_C \subset U_A$, а из условия $C \in U_B$ следует, что существует окрестность U''_C, принадлежащая окрестности U_B. Всякая окрестность U_C, принадлежащая окрестностям U'_C и U''_C, принадлежит окрестностям U_A и U_B.



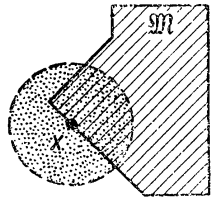
Черт. 72.



Черт. 73.



Черт. 74.



Черт. 75.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть некоторое множество точек прямой, плоскости или пространства. На чертеже 72 множество $\mathfrak{M}$ условно изображено в виде некоторой плоской фигуры.

Определения. 1° *Точка X называется внутренней точкой множества $\mathfrak{M}$, если существует окрестность U_X точки X, содержащаяся в множестве $\mathfrak{M}$:*

$$U_X \subset \mathfrak{M} \quad \text{(черт. 73).}$$

2° *Точка X называется внешней относительно множества $\mathfrak{M}$, если существует окрестность U_X, не содержащая ни одной точки множества $\mathfrak{M}$* (черт. 74).

3° *Точка X называется граничной точкой множества $\mathfrak{M}$, если в любой окрестности U_X содержатся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие $\mathfrak{M}$* (черт. 75).

Примечание. Свойство III_U окрестностей можно сформулировать так: любая точка окрестности U_X является внутренней ее точкой.

§ 16. Окрестности в множестве действительных чисел

Мы будем рассматривать «расширенное» множество действительных чисел, состоящее из всех действительных чисел и точек $-\infty$ и $+\infty$. Покажем, что в множестве действительных чисел можно ввести понятие окрестности так, что будут выполняться аксиомы окрестностей.

Определение. *Окрестностью действительного числа a называется любой интервал*

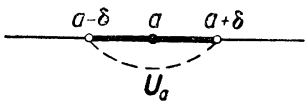
$$(a-\delta,\ a+\delta),$$

где δ — какое-либо положительное число.

Окрестностью точки $+\infty$ называется интервал $(N,\ +\infty)$, где N — любое действительное число.

Окрестностью точки $-\infty$ называется интервал $(-\infty, N)$, где N — любое действительное число.

Действительное число a называется центром окрестности $(a-\delta,\ a+\delta)$, число δ — радиусом окрестности, а 2δ — ее диаметром.



Черт. 76.

Черт. 77.

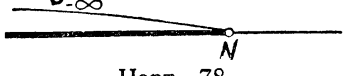
Окрестность с радиусом δ будем называть δ-окрестностью числа a. δ-окрестность числа a есть множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам

$$a-\delta < x < a+\delta,$$

или, что то же, $|x-a| < \delta$.

Геометрическим изображением окрестности числа a является окрестность соответственной точки a на прямой (черт. 76).

Интервал $(N, +\infty)$ будем называть N-окрестностью точки $+\infty$. N-окрестность точки $+\infty$ есть множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $N < x$. На числовой прямой эта окрестность изображается лучом, состоящим из точек, расположенных правее точки N (черт. 77).



Черт. 78.

Аналогично, окрестность $(-\infty, N)$ есть множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x < N$ (черт. 78).

Примеры.

1. Интервал (0,2) есть 1-окрестность точки 1, радиус этой окрестности равен 1, диаметр равен 2.

2. $\frac{1}{2}$ — окрестность точки 2 есть интервал $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

4. Интервал $(10, +\infty)$ есть 10-окрестность точки $+\infty$.

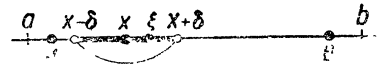
Доказательство справедливости аксиом окрестностей основывается на следующем свойстве числовых (конечных и бесконечных) промежутков.

Теорема. 1° *Всякое число x, удовлетворяющее неравенствам $a < x < b$, есть внутренняя точка промежутка $< a, b >$.*

2° *Всякое число x, меньшее a или большее b, есть внешняя точка промежутка $< a, b >$.*

3° *Всякое число, равное a (если $a \neq -\infty$) или b (если $b \neq +\infty$), есть граничная точка промежутка $< a, b >$.*

Доказательство 1°. Пусть $< a, b >$ — данный (конечный или бесконечный) промежуток, а x — любое число, удовлетворяющее неравенствам $a < x < b$. Выберем два какие-либо действительные числа α и β при следующих условиях: α заключено между a и x, β — между x и b:



Черт. 79.

$$a < \alpha < x \text{ и } x < \beta < b.$$

Обозначим через δ любое положительное число, меньшее каждой из разностей $x - \alpha$ и $\beta - x$.

Покажем, что δ-окрестность $U = (x - \delta, x + \delta)$ точки x содержится в промежутке $< a, b >$. Пусть ξ — любая точка, принадлежащая окрестности U, тогда $x - \delta < \xi < x + \delta$. В силу выбора чисел α, β и δ, имеем:

$$a < \alpha < x - \delta < \xi < x + \delta < \beta < b \text{ (черт. 79).}$$

Следовательно, $\xi \in < a, b >$, ибо $a < \xi < b$. Итак, существует окрестность $U = (x - \delta, x + \delta)$, любая точка ξ которой принадлежит интервалу (a, b), а потому $U \subset < a, b >$. В силу определения, x есть внутренняя точка промежутка $< a, b >$, ч. т. д.

Примечание Числа α, β и δ, удовлетворяющие поставленным условиям, можно выбрать бесконечным множеством способов, а потому существует бесконечное множество окрестностей точки x, принадлежащих промежутку $< a, b >$

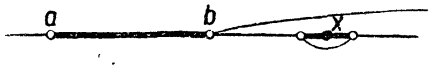
Пример.

Даны интервал (1,2) и его внутренняя точка 1,99. Окрестность (1,99—0,001 1,99+0,001) содержит данную точку и расположена в интервале (1,2).

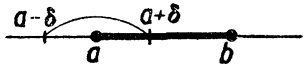
Доказательство 2°. Пусть x — любое число, меньшее a или большее b. Предположим для определенности, что $x > b$

Интервал $(b, +\infty)$, в котором лежит точка x, не содержит ни одной точки промежутка $<a, b>$. Любая окрестность U точки x, принадлежащая интервалу $(b, +\infty)$, не содержит ни одной точки промежутка $<a, b>$, а потому x является внешней точкой для $<a, b>$ (черт. 80), ч. т. д.

Доказательство 3°. Предположим для определенности, что $x = a (\neq -\infty)$. Пусть δ — любое положительное число. Интервал $(a, a+\delta)$ содержит точки промежутка $<a, b>$. В этом интервале содержатся все числа, большие a, но меньшие каждого из чисел b и $a+\delta$. Интервал $(a-\delta, a)$ не содержит ни одной точки промежутка $<a, b>$.



Черт. 80.



Черт. 81.

Таким образом, окрестность $(a-\delta, a+\delta)$ точки a содержит точки как принадлежащие, так и не принадлежащие $<a, b>$, а потому a является граничной точкой для $<a, b>$ (черт. 81), ч. т. д.

Отметим следующие основные свойства интервалов и сегментов.

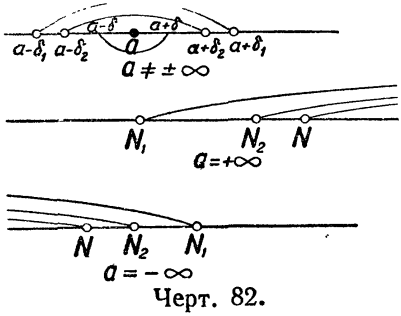
Всякая точка интервала (a, b) есть его внутренняя точка. Граничные точки a и b не принадлежат интервалу.

Внутренние точки сегмента $[a, b]$ образуют интервал (a, b). Граничные точки a и b сегмента принадлежат сегменту.

Полуинтервал $(a, b]$ содержит правую граничную точку b. Полусегмент $[a, b)$ содержит левую граничную точку a.

Теорема. *Окрестности в множестве действительных чисел обладают основными свойствами I_U, II_U и III_U.*

Доказательство свойства I_U. Пусть $a \neq \pm\infty$ — данная точка, $U_1 = (a-\delta_1, a+\delta_1)$ и $U_2 = (a-\delta_2, a+\delta_2)$ — две ее окрестности. Любая окрестность $U = (a-\delta, a+\delta)$ содержится в U_1 и U_2, если ее радиус δ не больше каждого из радиусов δ_1 и δ_2. Наибольший радиус окрестности, принадлежащей обеим данным окрестностям, есть наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Пусть теперь $a = +\infty$ или $-\infty$. Положим для определенности $a = +\infty$. Если даны две окрестности $U_1 = (N_1, +\infty)$ и $U_2 = (N_2, +\infty)$ точки $+\infty$, то любая окрестность $U = (N, +\infty)$ содержится в U_1 и U_2, если N не меньше чисел N_1 и N_2 (черт. 82), ч. т. д.



Черт. 82.

Примеры.

1. Даны две окрестности точки 1:

$$U_1=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ и } U_3=\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

Все точки любой окрестности точки 1 радиуса, меньшего чем $\frac{1}{4}$, например окрестности $\left(\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right)$, принадлежат обеим данным окрестностям

2. Даны две окрестности точки $+\infty$.

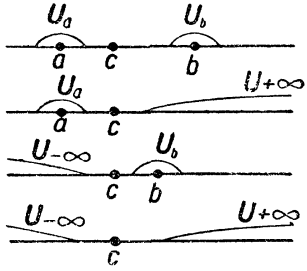
$$U_1=(10, +\infty) \text{ и } U_2=(1000, +\infty).$$

Окрестность $(N, +\infty)$, где $N\geqslant 1000$, например окрестность $(2000, +\infty)$ принадлежит обеим данным окрестностям.

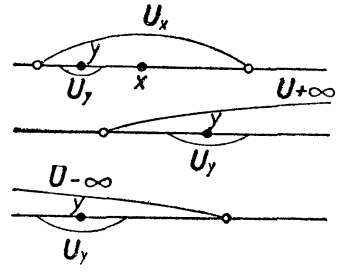
Доказательство свойства II_U. По условию, $a\neq b$. Положим для определенности $a<b$. Пусть c — любое число, заключенное между a и b:

$$a<c<b.$$

Интервалы $(-\infty, c)$ и $(c, +\infty)$ не имеют ни одной общей точки. Пусть U_a — любая окрестность точки a, лежащая в интервале $(-\infty, c)$, а U_b — любая окрестность точки b, лежащая в интервале $(c, +\infty)$. Окрестности U_a и U_b не имеют ни одной общей точки (черт. 83).



Черт. 83.



Черт. 84.

Если $a\neq -\infty$ и $b\neq +\infty$, то радиусы окрестности U_a и U_b достаточно взять меньшими, чем половина расстояния между данными точками, т. е. $\frac{|b-a|}{2}$.

Примеры.

1. Точки 1 и 1,001 можно заключить, например, в такие их окрестности, не имеющие общих точек: (0,9999; 1,0001) и (1,0009; 1,0011).

2. Точки 10 и $+\infty$ обладают, например, такими окрестностями, не имеющими общих точек: (9,11) и $(20, +\infty)$.

3. Точки $+\infty$ и $-\infty$ обладают, например, такими окрестностями, не имеющими общих точек: $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$.

Доказательство свойства III_U. Всякая окрестность U_x точки x есть интервал. Если $y\in U_x$, то y есть внутренняя точка интервала U_x, а потому существует такая окрестность U_y точки y, которая содержится в U_x (черт. 84).

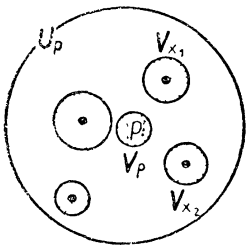
Примеры.

1. Точка $\frac{3}{2}$ лежит в 1-окрестности точки 1, т. е. $\frac{3}{2} \in (0,2)$. Всякая окрестность точки $\frac{3}{2}$ радиуса, меньшего $\frac{1}{2}$ [например, $\frac{1}{4}$-окрестность, т. е. интервал $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$], лежит в окрестности (0,2).

2. Точка 11 лежит в 10-окрестности точки $+\infty$: $11 \in (10, +\infty)$; всякая окрестность точки 11 радиуса, меньшего 1, например (10,9; 11,1), лежит в окрестности $(10, +\infty)$.

§ 17. Предельные точки

Определение. *Точка p называется предельной точкой множества $\mathfrak{M}$, если любая окрестность точки p содержит хотя бы одну точку, принадлежащую множеству $\mathfrak{M}$, отличную от точки p.*



Черт. 85.

Следствие. *Любая окрестность предельной точки p содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$.* В самом деле, если некоторая окрестность U_p содержит лишь конечное число точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множества $\mathfrak{M}$, то (свойство II_U окрестностей) существует конечная система окрестностей $V_p, V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}$, содержащихся в U_p и не имеющих попарно общих точек (черт. 85). Окрестность V_p точки p не содержит ни одной точки множества $\mathfrak{M}$, отличной от p, а потому точка p не может быть предельной для $\mathfrak{M}$.

Сама точка p может принадлежать, а может и не принадлежать множеству $\mathfrak{M}$.

Примеры.

1. Для множества $\mathfrak{M}$ чисел вида $\frac{1}{n}$ (где n—натуральное число):

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

число 0 есть предельная точка (см. черт. 70). В самом деле, каково бы ни было положительное число δ, найдется бесконечное множество чисел вида $\frac{1}{n}$, удовлетворяющих неравенствам $0 < \frac{1}{n} < \delta$ (действительно, для этого достаточно, чтобы $n > \frac{1}{\delta}$). Легко видеть, что никакой другой предельной точки это множество не имеет. Предельная точка не принадлежит самому множеству.

2. Множество $\mathfrak{M}$ всех целых чисел

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

не имеет конечных предельных точек.

В самом деле, пусть p—какое-нибудь действительное число. Если $0<\delta<\frac{1}{2}$, то δ-окрестность точки p может содержать не более одной точки множества $\mathfrak{M}$. Предельными точками являются $+\infty$ и $-\infty$, так как в любом интервале $(-\infty, N)$, а также $(N, +\infty)$ содержатся точки данного множества.

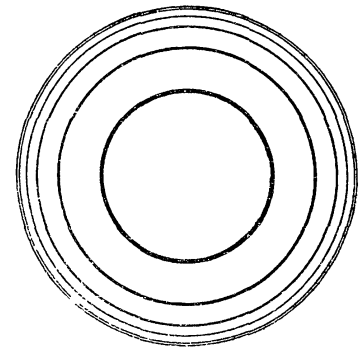
3. Всякое конечное множество точек не имеет ни одной предельной точки.

4. Рассмотрим на плоскости множество точек, лежащих на концентрических окружностях с радиусами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Предельными точками этого множества являются точки данных окружностей и их общий центр. Центр есть предельная точка, не принадлежащая множеству.

5. Рассмотрим множество концентрических шаровых поверхностей с радиусами:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Предельными точками являются точки этих поверхностей и точки поверхности концентрического шара с радиусом, равным 1 (черт. 86). Точки последней поверхности не принадлежат данному множеству.



Черт. 86.

6. Любое действительное число есть предельная точка для множества всех рациональных чисел, поэтому множество предельных точек для множества всех рациональных чисел есть весь интервал $(-\infty, +\infty)$.

7. Рассмотрим множество действительных чисел интервала (a, b). Множество предельных точек данного множества является сегментом $[a, b]$, так как каждая точка сегмента $[a, b]$ является предельной.

8. Предельные точки для множества точек сегмента $[a, b]$ образуют сегмент $[a, b]$.

9. Рассмотрим множество M всех точек, принадлежащих сегментам:

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right]; \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]; \ldots; \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]; \ldots$$

Предельными точками множества M являются каждая из точек множества M и, кроме того, точка O.

§ 18. Локальные свойства функций

Предположим, что точка a является предельной точкой для множества $\mathfrak{M}$, на котором рассматривается функция $f(x)$ (сама точка a может принадлежать, а может и не принадлежать $\mathfrak{M}$). Таким образом, в любой окрестности точки a содержится бесконечное множество значений аргумента $x \in \mathfrak{M}$.

Если функция $f(x)$ обладает некоторым свойством на той части множества $\mathfrak{M}$, которая лежит в данной окрестности U_a точки a, то будем говорить, что $f(x)$ обладает (на множестве $\mathfrak{M}$) этим свойством в окрестности U_a.

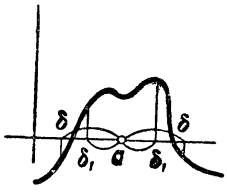
Если существует окрестность U_a точки a—такая, что функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ обладает данным свойством в этой окрестности, а также в любой окрестности, содержа-

щейся в U_a, то будем кратко говорить, что $f(x)$ обладает данным свойством в окрестности точки a (без указания, в какой именно окрестности). Если a — действительное число, то говорят, что $f(x)$ обладает данным свойством в достаточно малой окрестности точки a. Если $a = +\infty$ (или $-\infty$), то говорят, что $f(x)$ обладает данным свойством при всех достаточно больших (или достаточно больших по абсолютной величине отрицательных) значениях аргумента на множестве $\mathfrak{M}$.

Если функция $f(x)$ (на множестве $\mathfrak{M}$) обладает некоторым свойством в окрестности точки a, то это свойство называют локальным (т. е. местным).

Локальное свойство может не быть присущим функции $f(x)$, если ее рассматривать на всем данном множестве $\mathfrak{M}$.

Примечание. Если функция $f(x)$ обладает некоторым свойством в окрестности U точки a, то отсюда не следует, что она обладает этим свойством в любой окрестности, содержащейся в U. Так, например: функция, изображенная графически на чертеже 87 в δ-окрестности точки a, имеет как положительные, так и отрицательные значения. Однако для изображенной на том же чертеже δ_1-окрестности той же точки ($\delta_1 < \delta$) это свойство не имеет места, так как во всех точках δ_1-окрестности значения функции положительны.



Черт. 87.

При доказательстве какого-либо свойства функции в достаточно малой окрестности точки a в целях упрощения рассуждений и выкладок допустимо с самого начала или в процессе рассуждений заменять окрестность точки a любой содержащейся в ней окрестностью; допустимо также рассматривать $f(x)$ не во всей области определения, а на множестве значений аргумента в некоторой окрестности точки a.

Примеры.

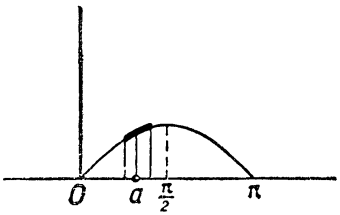
1. Функция $f(x) = x^3$ обладает следующим свойством в окрестности точки 0: среди значений этой функции имеются положительные (при $x > 0$) и отрицательные (при $x < 0$) числа. В достаточно малой окрестности точки 1 данная функция положительна; так, например, $x^3 > 0$ в любой окрестности $(1-\delta, 1+\delta)$ при $\delta < 1$.

2. Функция $\sin x$ немонотонна на сегменте $[0, \pi]$, однако в окрестности любой точки a, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$, функция $\sin x$ возрастает, так как она возрастает в любом интервале $(a-\delta, a+\delta)$, содержащемся в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (черт. 88). Функция $\sin x$ немонотонна ни в какой окрестности точки $+\infty$, так как любая окрестность $(N, +\infty)$ содержит промежутки $[k\pi, (k+1)\pi]$, в которых функция $\sin x$ не является монотонной. В самом деле,

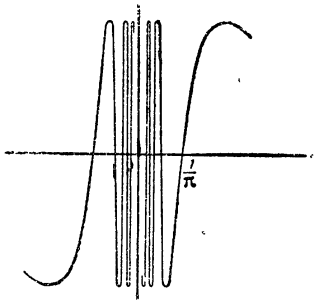
$$[k\pi, (k+1)\pi] \subset (N, +\infty), \text{ если } N < k\pi, \text{ т. е. } k > \frac{N}{\pi}.$$

3. Функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ обладает следующим свойством: в любой окрестности точки 0 имеются точки, в которых значения функции равны нулю (черт. 89). В самом деле, $\sin\frac{1}{x}=0$ при $\frac{1}{x}=k\pi$, т. е. при $x=\frac{1}{k\pi}$. Какую бы малую δ-окрестность точки 0 мы ни взяли, найдется бесконечное множество чисел вида $\frac{1}{k\pi}$, принадлежащих этой окрестности. В самом деле, $\left|\frac{1}{k\pi}\right|<\delta$ при $|k|>\frac{1}{\pi\delta}$.

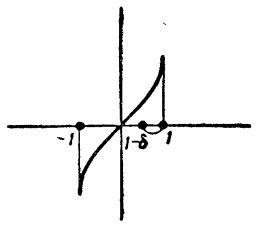
4. Функция $\frac{1}{x}$ неограничена в окрестности точки 0. Пусть $P>0$ — любое данное число. В любой δ-окрестности $(-\delta, \delta)$ точки 0 имеются точки, в которых $\left|\frac{1}{x}\right|>P$. В самом деле, последнее неравенство выполняется, если



Черт. 88.



Черт. 89.



Черт. 90.

$|x|<\frac{1}{P}$. Функция $\frac{1}{x}$ ограничена снизу (но не ограничена сверху) в окрестности точки 0 на множестве положительных чисел. В самом деле, $0<\frac{1}{x}$, если $x>0$. Аналогично $\frac{1}{x}$ ограничена сверху (но не ограничена снизу) в окрестности точки 0 на множестве отрицательных чисел. Функция $\frac{1}{x}$ ограничена в окрестности точки $+\infty$. Так, например, при $1<x$ имеем $0<\frac{1}{x}<1$. Функция $\frac{1}{x}$ ограничена в любой окрестности точки $a\neq 0$. Пусть, например, $0<a$; выберем любое число δ при условии $0<a-\delta<a+\delta$. Тогда будем иметь в δ-окрестности точки a (а также в любой окрестности меньшего радиуса) $\frac{1}{a+\delta}<\frac{1}{x}<\frac{1}{a-\delta}$.

5. Функция $\arcsin x$ положительна и возрастает в окрестности точки 1. В самом деле, указанные свойства имеют место в любой δ-окрестности точки 1 при $\delta<1$. Здесь часть области определения, лежащая в окрестности $(a-\delta, a+\delta)$, не заполняет всей окрестности, а потому речь идет лишь о тех точках окрестности $(a-\delta, a+\delta)$, которые принадлежат области определения арксинуса. Эти точки образуют полуинтервал $(1-\delta, 1]$ (черт. 90).

6. Положим $f(x)=x^2$; покажем, что в достаточно малой окрестности точки $x=1$ выполняется неравенство

$$|x^2-1|<\frac{1}{100}, \text{ или, что то же, } |x-1||x+1|<\frac{1}{100}.$$

Ограничимся рассмотрением данной функции в 1-окрестности точки 1, т. е. в интервале (0,2). В этом интервале имеем $|x+1|<3$. Следовательно,

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<3|x-1|.$$

Если $|x-1|<\frac{1}{300}$, то $3|x-1|<\frac{1}{100}$, а значит, и подавно $|x^2-1|<\frac{1}{100}$. Значит, $|x^2-1|<\frac{1}{100}$ в любой окрестности точки 1 радиуса, меньшего, чем $\frac{1}{300}$, т. е. в достаточно малой окрестности точки 1. Можно построить окрестность радиуса, большего, чем $\frac{1}{300}$, обладающую этим же свойством. В самом деле, рассмотрим x^2 в $\frac{1}{2}$-окрестности точки 1, т. е. в интервале $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$; имеем: $|x+1|<\frac{5}{2}$, откуда $|x-1|\,|x+1|<\frac{5}{2}|x-1|$. Значит,

$$|x^2-1|<\frac{1}{100}, \text{ если } |x-1|<\frac{1}{250}.$$

Как легко убедится читатель, можно получить окрестность еще большего радиуса, чем $\frac{1}{250}$, но это не имеет принципиального значения: первоначально полученная $\frac{1}{300}$-окрестность уже удовлетворяет поставленному условию.

§ 19. Предел функции

Понятие предела функции является одним из основных понятий анализа. Общему его определению мы предпосылаем рассмотрение конкретных примеров.

Примеры.

1. Положим $f(x)=2x+3$. Рассмотрим значения этой функции в окрестности точки 1. Точка 1 есть предельная точка множества значений аргумента. Составим такую таблицу:

x	0,9	0,99	1,1	1,01
$f(x)$	4,8	4,98	5,2	5,02

Числа, полученные в таблице, показывают, что чем ближе значение аргумента к числу 1, тем ближе значение $f(x)$ к числу 5.

Рассмотрим интервал $(1-\delta, 1+\delta)$, т. е. δ-окрестность точки 1. Если точка x принадлежит этой окрестности: $|x-1|<\delta$, то

$$|f(x)-5|=2|x-1|<2\delta.$$

Отсюда заключаем, что если значения аргумента принадлежат интервалу $(1-\delta, 1+\delta)$, то образы этих значений принадлежат интервалу $(5-2\delta; 5+2\delta)$. Иначе говоря, если значения аргумента принадлежат δ-окрестности точки 1, то соответствующие значения функции принадлежат 2δ-окрестности точки 5.

2. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ в интервалах $(-\infty, 0)$; $(0, +\infty)$.

Пусть значения аргумента принадлежат N-окрестности точки $+\infty$ т. е. интервалу $(N, +\infty)$, где N — любое положительное число. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то при $x > N$ имеем:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} < \frac{1}{N}.$$

Следовательно, если значения аргумента принадлежат N-окрестности точки $+\infty$, то соответствующие значения функции принадлежат интервалу $\left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)$, т. е. $\frac{1}{N}$-окрестности точки 0.

3. Положим в интервале $(-\infty, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ (если } x \neq 0); \\ 1 \text{ (если } x = 0). \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x)$ на множестве значений аргумента, отличных от нуля. Если $x \neq 0$ и $|x| < \delta$, то имеем $|f(x)| = |x| < \delta$.

Следовательно, если значение аргумента $x \neq 0$ содержится в δ-окрестности точки 0, то и значение функции $f(x)$ содержится в δ-окрестности точки 0. Заметим, что при $\delta \leqslant 1$ значение $f(0) = 1$ и не содержится в интервале $(-\delta, \delta)$.

В примере 1 мы видим, что все значения функции принадлежат заданной окрестности точки 5 сколь угодно малого радиуса ε, если значения аргумента принадлежат окрестности точки 1 радиуса $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

В примере 2 мы видим, что все значения функции принадлежат окрестности точки 0 сколь угодно малого радиуса ε, если только значения аргумента принадлежат $N = \frac{1}{\varepsilon}$ окрестности точки $+\infty$.

В примере 3 все значения функции лежат в заданной ε-окрестности точки 0, если значение аргумента отлично от нуля и лежит в ε-окрестности точки 0.

Рассмотрение аналогичных примеров имеет смысл лишь тогда, когда в любой окрестности точки a содержатся значения аргумента, отличные от a, т. е. когда a есть предельная точка области определения функции.

Конечные пределы

Определение. *Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a*, если:*

1° *a является предельной точкой для области определения $\mathfrak{M}$ функции $f(x)$.*

2° *Каково бы ни было заданное положительное число ε, существует окрестность U_a точки a — такая, что для любого зна-*

---

* Точка a либо число, либо одна из точек $\pm\infty$.

чения аргумента $x \in \mathfrak{M}$, содержащегося в U_a и отличного от a, выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon. \tag{1}$$

Итак, имеем $|f(x)-b|<\varepsilon$, или, что то же, $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$, если $x \in U_a$ и $x \neq a$.

Для обозначения предела применяется символическая запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

В дальнейшем, во избежание повторений, через ε будем обозначать любое заданное (как угодно малое) положительное число, не делая об этом каждый раз оговорок.

Основное условие $|f(x)-b|<\varepsilon$ можно сформулировать иначе. Обозначим через U_b заданную ε-окрестность точки b, тогда это условие принимает такой вид:

Значение функции содержится в заданной окрестности U_b точки b, если значение аргумента $x \neq a$ содержится в окрестности U_a:

$$f(x) \in U_b, \text{ если } x \in U_a \text{ и } x \neq a.$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный некоторому числу b, то говорят, что $f(x)$ имеет в точке a конечный предел.

Согласно определению, условие $f(x) \in U_b$ при $x \in U_a$ выполняется для всех значений аргумента, отличных от a. Сама точка a может не принадлежать области определения функции $f(x)$, и тогда $f(a)$ не имеет смысла. Точка a может принадлежать области определения функции, но значение $f(a)$ может не содержаться в окрестности U_b. Таким образом, значение функции в точке a не принимается во внимание. Следовательно, если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны в окрестности точки a на множестве всех значений аргумента, отличных от a, и предел одной из них равен b, то и предел другой также равен b, независимо от того, существуют или нет $f(a)$ и $\varphi(a)$ и каковы эти значения.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ существует, то окрестность U_a, для которой выполняется основное условие,

$$|f(x)-b|<\varepsilon, \quad \text{при} \quad x \in U_a,$$

определяется (вообще говоря) заданием числа ε.

Существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ характеризуется локальным выполнением условия $f(x) \in U_b$ в окрестности точки a, где U_b — любая заданная окрестность точки b. Если найдена окрестность U_a — такая, что $f(x) \in U_b$ при $x \in U_a$, то этому же условию удовлетворяет всякая окрестность V_a, содержащаяся в U_a (так как

если $V_a \subset U_a$ и $x \in V_a$, то $x \in U_a$). При доказательстве существования предела функции в точке a всегда допустимо уменьшать рассматриваемые окрестности данной точки a, заменяя их вложенными в них окрестностями.

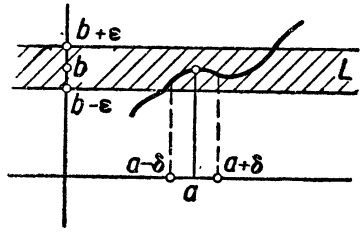
Если точка a не является предельной для области определения $f(x)$, то будем говорить, что предел функции $f(x)$ в точке a не имеет смысла.

В зависимости от точки a, в окрестности которой рассматривается данная функция, возможны следующие случаи:

Случай 1°. a есть действительное число.

В этом случае окрестность U_a точки a есть некоторый интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$ и определение предела функции $f(x)$ в точке a принимает следующий вид:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$



Черт. 91.

означает следующее: каково бы ни было заданное положительное число ε, *существует такое число* $\delta > 0$, *что при всяком значении аргумента, принадлежащем* δ*-окрестности точки* a (*и отличном от* a), $0 < |x-a| < \delta$ *выполняется неравенство*

$$|f(x)-b| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, выполнение неравенств $0 < |x-a| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-b| < \varepsilon$. или, что одно и то же, $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$ при $a-\delta < x < a+\delta$ и $x \neq a$.

При этом значение δ определяется заданием ε.

Геометрическая интерпретация. Рассмотрим полосу L, ограниченную параллелями оси абсцисс:

$$y = b-\varepsilon \text{ и } y = b+\varepsilon,$$

имеющую заданную ширину 2ε. Выполнение неравенств

$$b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon \text{ при условии } a-\delta < x < a+\delta \text{ и } x \neq a$$

геометрически означает, что, как бы узка ни была полоса L, точки графика функции $f(x)$ [кроме, быть может, точки $(a,\ f(a))$] лежат внутри этой полосы, если значение аргумента содержится в интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$ (черт. 91).

Примеры.

1. В рассмотренных выше примерах 1 и 3 (стр. 72 и 73) имеем. В примере 1:

$$|f(x)-5| < \varepsilon, \text{ если } |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \left(\text{можно положить } \delta = \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Значит, $\lim\limits_{x \to 1} (2x+3) = 5$.

В примере 3:

$$|f(x)|<\varepsilon, \quad \text{если} \quad 0<|x|<\varepsilon \ (\text{можно положить } \delta=\varepsilon).$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

2. Рассмотрим функцию $f(r)=r^2$, определенную на множестве всех рациональных чисел. Возьмем число $\sqrt{3}$; это число не принадлежит области определения $f(r)$: символ $f(\sqrt{3})$ смысла не имеет. Любая окрестность точки $\sqrt{3}$ содержит рациональные числа; значит, точка $\sqrt{3}$ есть предельная точка множества значений аргумента. Рассмотрим значения $f(r)$ для значений аргумента, близких к $\sqrt{3}$; составим такую таблицу:

	$r<\sqrt{3}$			$r>\sqrt{3}$		
r	1,7	1,73	1,732	1,733	1,74	1,8
$f(r)$	2,88	2,9929	2,999824	3,003289	3,0276	3,24

Значения $f(r)$ тем ближе к 3, чем r ближе к $\sqrt{3}$. Будем искать такую δ-окрестность точки $\sqrt{3}$, чтобы образы значений аргумента, принадлежащих этой окрестности, лежали в ε-окрестности точки 3. Таким образом, значения функции должны удовлетворять неравенству

$$|r^2-3|<\varepsilon$$

при значениях аргумента, принадлежащих δ-окрестности точки $\sqrt{3}$. Отыскиваем число δ. По предположению,

$$\sqrt{3}-\delta<r<\sqrt{3}+\delta \text{ или } |r-\sqrt{3}|<\delta.$$

В силу возможности замены окрестности точки a вложенными окрестностями, можно считать, что $\delta<\sqrt{3}$, тогда $0<r<2\sqrt{3}$, а потому

$$0<r+\sqrt{3}<3\sqrt{3}.$$

Значит,

$$|r^2-3|=|r-\sqrt{3}|\,|r+\sqrt{3}|<3\sqrt{3}\,\delta.$$

Отсюда следует, что при $\delta<\dfrac{\varepsilon}{3\sqrt{3}}$ имеем $|r^2-3|<\varepsilon$. Ранее мы приняли, что $\delta<\sqrt{3}$, таким образом, $|r^2-3|<\varepsilon$ при любом значении r, удовлетворяющем неравенству $|r-\sqrt{3}|<\delta$, где $\delta<\sqrt{3}$ и $\delta<\dfrac{\varepsilon}{3\sqrt{3}}$.

Итак, пусть δ есть наименьшее из чисел $\sqrt{3}$, $\dfrac{\varepsilon}{3\sqrt{3}}$, тогда при любом r, удовлетворяющем неравенству $|r-\sqrt{3}|<\delta$, имеем $|r^2-3|<\varepsilon$.

Значит, $\lim\limits_{r\to\sqrt{3}} r^2=3$.

3. Пусть $f(x)=\text{const}=k$ в некоторой окрестности U_a точки a. При всех значениях аргумента из этой окрестности имеем:

$|f(x)-k|=0<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k$.

4. Положим $f(x)=x^3$, покажем, что $\lim\limits_{x\to 2} x^3=8$; имеем.

$$|x^3-8|=|x-2|\,|x^2+2x+4|.$$

Будем рассматривать $f(x)$ в какой-либо определенной окрестности точки 2, например в интервале $1 < x < 3$. Тогда имеем:

$$1 < x < 3 \quad \text{и} \quad |x^2+2x+4| < 19.$$

Следовательно,

$$|x^3-8| < 19\cdot|x-2|;$$

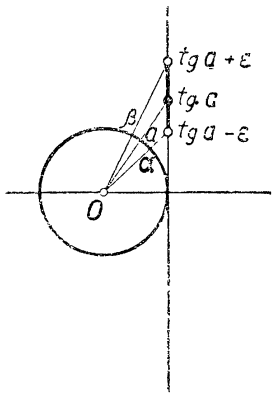
если взять число δ меньшим, чем 1 и чем $\frac{\varepsilon}{19}$, то будем иметь:

$$|x^3-8| < \varepsilon, \text{ если } |x-2| < \delta.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$

5. Пусть $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ (k — целое число). Предположим для определенности, что $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$. Покажем, отправляясь от геометрического определения тангенса, что

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a.$$



Черт. 92.

Отметим на линии тангенса (черт. 92) три точки $\operatorname{tg} a-\varepsilon$, $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} a+\varepsilon$ и соединим эти точки с центром тригонометрического круга; пусть α, a и β — соответствующие точки единичной окружности. Теми же буквами обозначим величины соответствующих дуг. Имеем $\alpha < a < \beta$. Пусть $(a-\delta,\ a+\delta)$ — любая окрестность точки a, содержащаяся в интервале (α, β); тогда имеем:

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a| < \varepsilon, \quad \text{если } |x-a| < \delta, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a.$$

6. Область определения функции $y = x!$ есть множество натуральных чисел. Пусть x — натуральное число, например $x = 3$. Точка 3 не есть предельная точка для области определения, а потому $\lim\limits_{x\to 3} x!$ не имеет смысла.

7. Положим $f(x) = \frac{1}{10^7}\sin x$ и $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то в любой окрестности точки $\frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$|f(x)-0| = |f(x)| < \varepsilon.$$

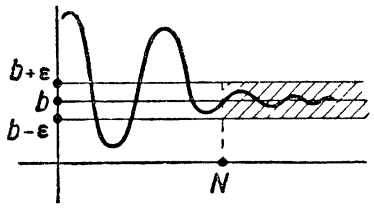
Но отсюда нельзя заключить, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$. В самом деле, положим $\varepsilon = \frac{1}{10^9}$ и рассмотрим интервал $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, являющийся $\frac{\pi}{3}$-окрестностью точки $\frac{\pi}{2}$. В этой окрестности

$$|\sin x| > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad |f(x)-0| > \frac{1}{2\cdot 10^7} > \frac{1}{10^9} = \varepsilon.$$

Таким образом, не для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность точки $\frac{\pi}{2}$, в которой $|f(x)-0|<\varepsilon$; следовательно, 0 не является пределом функции $\frac{1}{10^7}\sin x$ в точке $\frac{\pi}{2}$.

Случай 2°. $a=+\infty$. В этом случае окрестность точки $a=+\infty$ есть интервал $(N, +\infty)$, и тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ означает, что *каково бы ни было заданное положительное число* ε, *существует такое число* N, *что при всяком значении аргумента, принадлежащем* N*-окрестности точки* $+\infty$, *выполняется неравенство*

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$



Черт. 93.

Иначе говоря, выполнение неравенства $x>N$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Геометрическая интерпретация. Какой бы узкой ни была задана полоса $y=b\pm\varepsilon$, существует такое число N, что все точки графика $y=f(x)$ при $x>N$ лежат внутри этой полосы (черт. 93).

Примеры.

1. Положим $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, точка $+\infty$ есть предельная для множества значений аргумента, так как функция $f(x)$ определена во всех точках интервала $(-1, +\infty)$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. В самом деле,

$$|f(x)-1|=\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|=\frac{2}{x+1}$$

(при достаточно больших значениях x имеем $x+1>0$, а потому знак абсолютной величины излишен).

Неравенство $\frac{2}{x+1}<\varepsilon$ выполняется при всех значениях x, больших, чем $\frac{2}{\varepsilon}-1$. В данном случае можно положить $N=\frac{2}{\varepsilon}-1$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$.

2. Положим $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Имеем: $\sqrt{x^2+1}>|x|$, а потому

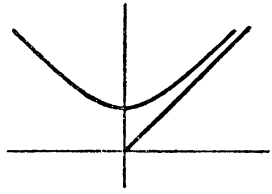
$$|\sqrt{x^2+1}-x|=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}<\frac{1}{2x}\quad(\text{при } x>0).$$

Неравенство

$$f(x)-0|=|\sqrt{x^2+1}-x|<\varepsilon$$

выполняется, если $\frac{1}{2x}<\varepsilon$, т. е. если $x>\frac{1}{2\varepsilon}$. В данном случае можно положить $N=\frac{1}{2\varepsilon}$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$.

Функция $\sqrt{x^2+1}-x$ есть разность ординат ветви гиперболы $y=\sqrt{x^2+1}$ и прямой $y=x$; следовательно, точка на ветви гиперболы как угодно близко отстоит от прямой $y=x$ при достаточно больших значениях x (черт. 94).



Черт. 94.

3. Положим $f(x)=\frac{2x^2-1}{3x^2+1}$; докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{2}{3}$. Составим разность

$$\left|\frac{2x^2-1}{3x^2+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{5}{3(3x^2+1)}<\frac{5}{9x^2}<\frac{1}{x^2}.$$

Неравенство $\left|f(x)-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$ имеет место, если $\frac{1}{x^2}<\varepsilon$, т. е. если $x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{2}{3}$.

Случай 3°. $a=-\infty$.

В этом случае окрестность точки a есть интервал $(-\infty, N)$. Основные условия $f(x)\in U_b$ при $x\in U_a$ принимают вид:

$$|f(x)-b|<\varepsilon \quad \text{при} \quad x<N.$$

Подробную формулировку и геометрическую интерпретацию предоставляем учащимся.

Пример.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=0$.

Имеем:

$$|\sqrt{x^2+1}+x|=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}<\frac{1}{2|x|} \quad (\text{при } x<0).$$

Если $\frac{1}{2|x|}<\varepsilon$, т. е. если (при $x<0$) $x<-\frac{1}{2\varepsilon}$, то

$$|\sqrt{x^2+1}+x|<\varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=0.$$

Бесконечные пределы

Определение. *Функция $f(x)$ имеет в точке a бесконечный предел, равный $+\infty$ (или $-\infty$), если:*

1° *a есть предельная точка области определения $\mathfrak{M}$ данной функции.*

2° *Каково бы ни было заданное число $M>0$ (как угодно большое), существует окрестность U_a точки a — такая, что для*

любого значения аргумента $x \neq a$, *содержащегося в* U_a, *выполняется неравенство*

$$f(x) > M \text{ (или } f(x) < -M). \qquad (2)$$

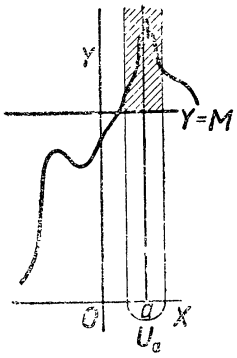
Для обозначения бесконечного предела принято писать:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ (или } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty).$$

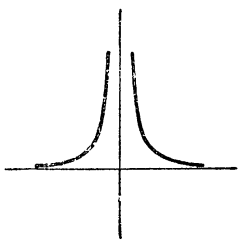
Основное условие (2) можно записать так: *какова бы ни была задана* M*-окрестность* $U_{+\infty}$ (*или* $U_{-\infty}$) *точки* $+\infty$ (*или* $-\infty$), *существует окрестность* U_a *точки* a — *такая, что значение* $f(x)$ *содержится в* $U_{+\infty}$ (*или* $U_{-\infty}$) *для всех значений аргумента* $x \neq a$, *содержащихся в* U_a:

$$f(x) \in U_{+\infty} \text{ (или } f(x) \in U_{-\infty}),$$

если $x \in U_a$ и $x \neq a$.



Черт. 95.



Черт. 96.

Частные виды определений бесконечных пределов различаются в соответствии со следующими возможными случаями:

Случай 1°. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, где a — действительное число. В этом случае окрестность точки a есть интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$.

Определение принимает следующий вид:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, *если при любом заданном числе* $M > 0$ *существует число* $\delta > 0$ — *такое, что неравенство* $f(x) > M$ *имеет место для любого значения аргумента* x, *удовлетворяющего условию* $0 < |x - a| < \delta$.

Геометрическая интерпретация. Как бы велико ни было заданное число M, точки графика функции $f(x)$ (кроме, быть может, точки $(a,\ f(a))$, лежат выше прямой $y = M$, если значение аргумента содержится в интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$ (черт. 95).

Пример.

Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

В самом деле, имеем: $\frac{1}{x^2} > M$, если $x^2 < \frac{1}{M}$, т. е. если $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

В данном примере можно положить $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ (черт. 96).

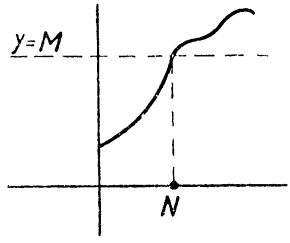
Случай 2°. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. В этом случае окрестность точки $a = +\infty$ есть некоторый интервал $(N,\ +\infty)$, и тогда

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, *если при любом заданном числе* M *существует такое число* N, *что неравенство* $f(x) > M$ *имеет место при всех значениях аргумента* $x > N$.

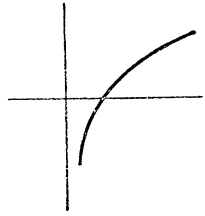
Геометрическая интерпретация. Каким бы большим ни было взято число M, при всех значениях аргумента, больших N, график функции лежит выше прямой $y = M$ (черт. 97).

Пример.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = +\infty$. При любом заданном M имеем $x^3 > M$, если $x > \sqrt[3]{M}$. Можно положить $N = \sqrt[3]{M}$.



Черт. 97.



Черт. 98.

Предлагаем учащимся для каждого из нижеследующих видов бесконечных пределов:

3° $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; 4° $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

5° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; 6° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

сформулировать определение (посредством неравенств) и дать геометрическую интерпретацию.

Пример.

Положим $f(x) = \log_2 x$; покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Точка 0 есть предельная для области определения функции, т. е. для интервала $(0, +\infty)$. Значениями аргумента служат лишь положительные числа.

Если $0 < x < \dfrac{1}{2^M}$, то $\log_2 x < -M$.

Значит, $\lim\limits_{x\to 0} \log_2 x = -\infty$ (черт. 98).

Общее определение понятия предела

Сопоставление определений предела (конечного и бесконечного) функции в данной точке показывает, что эти определения могут быть объединены в виде следующего общего определения:

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* a *конечный или бесконечный предел, равный* B, *если*:

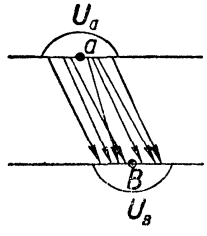
1° a *есть предельная точка для области определения* $\mathfrak{M}$ *функции* $f(x)$.

2° *Какова бы ни была заданная окрестность U_B точки B, существует окрестность U_a точки a — такая, что значение функции $f(x)$ содержится в окрестности U_B для любого значения аргумента x, отличного от a, содержащегося в окрестности U_a.*

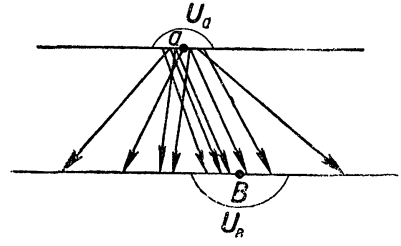
Итак, если $B = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, то образ любого значения аргумента $x \neq a$, содержащегося в U_a, принадлежит окрестности U_B (черт. 99):

$$f(x) \in U_B, \text{ если } x \in U_a \text{ и } x \neq a.$$

Здесь под буквами a и B можно подразумевать как действительные числа, так и точки $\pm \infty$. Общее определение конечного



Черт. 99.



Черт. 100.

и бесконечного предела позволит изучать те свойства, которые присущи как конечным, так и бесконечным пределам, не рассматривая отдельно различные частные виды пределов.

Согласно определению предела функции в точке a, функция $f(x)$ рассматривается на множестве значений аргумента, отличных от a. *В дальнейшем условие $x \neq a$ будем считать выполненным всегда*, и в целях краткости изложения об этом не будет каждый раз делаться соответствующая оговорка.

Если a есть предельная точка для области определения $f(x)$, но точки B, удовлетворяющей условиям, перечисленным в определении, не существует, то говорят, что $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (конечный или бесконечный) не существует или что функция $f(x)$ не имеет предела в точке a. В этом случае любая точка B имеет такую окрестность U_B, что в произвольной окрестности U_a имеются значения аргумента $x \neq a$, образы которых лежат вне окрестности U_B (черт. 100).

Предел последовательности

Для числовой последовательности

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

точка $+\infty$ является единственной предельной точкой множества значений аргумента n, поэтому $\lim\limits_{n \to a} s_n$ не имеет смысла ни в какой

точке $a \neq +\infty$. Для обозначения предела последовательности пишут $\lim s_n$ без указания $n \to +\infty$.

Если существует конечный предел $\lim s_n = s$, то данная последовательность называется сходящейся (к числу s). Значит, для сходящейся последовательности при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что неравенство $|s_n - s| < \varepsilon$ выполняется при всех значениях $n > N$.

Если не существует конечного предела $\lim s_n$, то последовательность называется расходящейся.

Если $\lim s_n = +\infty$ (или $-\infty$), то будем говорить, что последовательность расходится к $+\infty$ (или к $-\infty$).

Примеры.

1. Последовательность $1!, 2!, \ldots, n!, \ldots$ расходится к $+\infty$.

В самом деле, $s_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n > n$; имеем $s_n > M$, если $n > M$; следовательно, $\lim n! = +\infty$.

2. Положим

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (\text{если } n \text{—нечетное}); \\ \dfrac{1}{(n+1)^2} & (\text{если } n \text{—четное}). \end{cases}$$

Запишем несколько первых членов этой последовательности:

$$1, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Докажем, что эта последовательность сходится к нулю. В самом деле, при n нечетном $|s_n| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, если $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

При n четном $s_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.

Следовательно, при всех натуральных n будем иметь $|s_n| < \varepsilon$, если $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, а потому $\lim s_n = 0$.

§ 20. Некоторые замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Для доказательства примем во внимание неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|,$$

где x — радианная мера любой дуги. В самом деле, длина дуги единичного круга равна $|x|$, а длина соответствующей линии синуса равна $|\sin x|$. Если $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, то имеем (черт. 101) $|\sin x| \leqslant |x|$, так как длина половины хорды не больше длины половины стягиваемой дуги (равенство при $x = 0$, тогда хорда и дуга вырождаются

в точку). Если $|x|>\frac{\pi}{2}$, то имеем и подавно $|\sin x|<|x|$, ибо $\frac{\pi}{2}>1$, тогда как $|\sin x|\leqslant 1$.

Неравенство $|\sin x|<\varepsilon$ имеет место, если $|x|<\varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\quad \text{ч. т. д.}$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

Имеем:

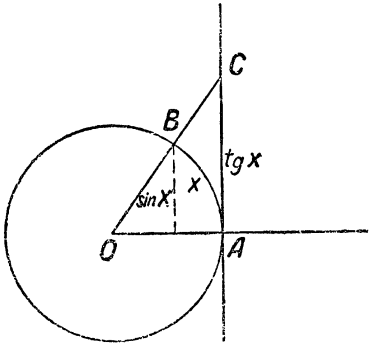
$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\leqslant 2\cdot\frac{|x-a|}{2}\cdot 1=|x-a|.$$

Если $|x-a|<\varepsilon$, то и подавно $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$, ч. т. д. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Если AC (черт. 101) есть линия тангенса дуги $AB=x$, где

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},$$



Черт. 101.

то имеем

пл. сектора $AOB<$ пл. $\triangle COA$.

Так как пл. сектора $AOB=\frac{|x|}{2}$ и пл. $\triangle OAC=\frac{1}{2}|\operatorname{tg}x|$, то $|x|<|\operatorname{tg}x|$, а потому

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg}x|.$$

Откуда $1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\frac{1}{|\cos x|}$. Так как в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\frac{x}{\sin x}>0$ и $\cos x>0$, то знаки абсолютной величины излишни. Из последнего неравенства находим:

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

откуда

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

Так как

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2},$$

то

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Если δ — наименьшее из чисел $\frac{\pi}{2}$ и $\sqrt{2\varepsilon}$, то при $|x| < \delta$ имеем $\left|1 - \frac{\sin x}{2}\right| < \frac{x^2}{2} < \varepsilon$.

Значит,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ ч. т. д.}$$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Для доказательства примем во внимание следующее неравенство: $(1+h)^n > 1 + nh$, где $h > 0$, а n — натуральное число. В самом деле,

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \ldots + h^n > 1 + nh.$$

В интервале $(1, +\infty)$ имеем $x = 1 + (x-1)$, при этом $h = x - 1 > 0$. Следовательно,

$$x^n = [1 + (x-1)]^n > 1 + n(x-1).$$

Если $1 + n(x-1) > M$, т. е. $x > \frac{M-1}{n} + 1$, то (при $x > 1$) имеем и подавно

$$x^n > M, \quad \text{ч. т. д.}$$

Предлагаем учащимся показать, что

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ (если } n \text{ — четное);} \\ -\infty \text{ (если } n \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

5. Для показательной функции a^n, рассматриваемой на множестве целых чисел, имеем:

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \to -\infty} a^n = 0 \quad \text{при} \quad a > 1.$$

В самом деле, положим

$$a = 1 + (a-1), \text{ тогда}$$

$$a^n = [1 + (a-1)]^n > 1 + n(a-1).$$

Если $1 + n(a-1) > M$, т. е. если $n > \frac{M-1}{a-1}$, то и подавно $a^n > M$, откуда $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Пусть n — целое отрицательное число, тогда $a^n = \frac{1}{a^{|n|}}$; неравенство $a^n < \varepsilon$ выполняется, если $a^{|n|} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Последнее неравенство, наверное, будет иметь место при $|n| > \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{a-1}$, т. е. при $n < -\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{a-1}$ (так как $n<0$). Значит, $\lim\limits_{n\to-\infty} a^n = 0$, ч. т. д.

Предлагаем учащимся показать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to-\infty} a^n = +\infty$, если $0 < a < 1$.

6. $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (n — натуральное число).

а) Пусть $a > 1$; при любом $\varepsilon > 0$ имеем (см. пример 4):

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon.$$

Если $1 + n\varepsilon > a$, т. е. $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, то $(1+\varepsilon)^n > a$, откуда

$$0 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

b) Пусть $0 < a < 1$, положим, $a = \frac{1}{a_1}$; имеем: $a_1 > 1$. Получаем последовательно:

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt[n]{a_1} - 1}{\sqrt[n]{a_1}}\right| < |\sqrt[n]{a_1} - 1|$$

(так как $\sqrt[n]{a_1} > 1$).

В силу предыдущего, при всех достаточно больших n будем иметь и в этом случае $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$.

c) Пусть $a = 1$, тогда $\sqrt[n]{a} = \text{const} = 1$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

7. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, при $a \geqslant 0$.

Пусть $a > 0$; рассмотрим какую-либо окрестность точки a, не содержащую точку нуль:

$$0 < a - \delta_1 < x < a + \delta_1;$$

имеем:

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}} < \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

Если δ — наименьшее из чисел δ_1 и $\varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}}$, то

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon, \text{ если } |x-a| < \delta, \text{ т. е. } \lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

Пусть $a = 0$, тогда

$$|\sqrt[n]{x}| < \varepsilon, \text{ если } |x| < \varepsilon^n, \text{ т. е. } \lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0, \text{ ч. т. д.}$$

Нетрудно показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$. В самом деле, $\sqrt[n]{x}>M$, если $x>M^n$.

Если $a<0$, то $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\ (\text{если } n-\text{нечетное});\\ \text{не имеет смысла (если } n-\text{четное})\end{cases}$ (предоставляем это доказать учащимся).

8. Последовательность

$$s_1=1;\quad s_2=1+\frac{1}{2};\quad s_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3};\quad \ldots$$

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},\quad \ldots \text{ расходится к } +\infty.$$

Примем во внимание очевидные соотношения:

$$s_1=1;\quad s_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};\quad s_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{3}{2};$$

$$s_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=2;$$

$$s_5=s_4+\frac{1}{5}>2;$$

. . . . . .

$$s_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{1}{2}+$$
$$+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{2};$$

. . . . . .

$$s_{16}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{ раз}}=3;$$

. . . . . .

$$s_{32}>\frac{7}{2};$$

. . . . . .

Итак, имеем $s_{2^k}>1+\frac{k}{2}$. Пусть N — заданное число; неравенство $1+\frac{k}{2}>N$ имеет место, если $k>2(N-1)$; следовательно, если $n>2^{2(N-1)}$, то $s_n>N$; значит, $\lim s_n=+\infty$.

9. Последовательность

$$\frac{a}{1!},\ \frac{a^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{a^n}{n!},\ \ldots$$

при любом $a > 0$ сходится к нулю. Пусть k — любое натуральное число, большее, чем $2a$. При $n > k$ получим:

$$\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k}\right) \cdot \left(\frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdots \frac{a}{n}\right);$$

каждое из чисел в первой скобке не больше a, а каждое из чисел

$$\frac{a}{k+1}, \frac{a}{k+2}, \ldots, \frac{a}{n}$$

меньше $\frac{1}{2}$, а потому

$$\frac{a^n}{n!} < a^k \frac{1}{2^{n-k}} = (2a)^k \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Так как $\lim 2^n = +\infty$, то при всех достаточно больших значениях n будем иметь:

$$2^n > (2a)^k \cdot \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{и тогда} \quad \frac{a^n}{n!} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, ч. т. д.

§ 21. Предел функции на множестве. Односторонние пределы

Рассмотрим функцию $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}_1$, являющемся частью области ее определения. Если a — предельная точка для множества $\mathfrak{M}_1$, то можно говорить о пределе функции $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}_1$ в точке a. При этом будем предполагать всегда, что сама точка a не включается в множество $\mathfrak{M}_1$.

Определение. *Точка B называется пределом функции $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}_1$ в точке a, если основное соотношение*

$$y \in U_B \quad \text{при} \quad x \in U_a$$

выполняется для всех точек x, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}_1$.

Таким образом, имеем:

$$y \in U_B, \quad \text{если} \quad x \in U_a \text{ и } x \in \mathfrak{M}_1.$$

Для обозначения предела на множестве $\mathfrak{M}_1$ будем писать:

$$\lim_{x \to a} f(x) = B \quad (x \in \mathfrak{M}_1).$$

Все сказанное в предыдущем параграфе о пределе функции в данной точке остается в силе, только теперь под «значением аргумента» следует подразумевать значение аргумента, принадлежащее данному множеству $\mathfrak{M}_1$.

Примеры.

1. Функция Дирихле $\chi(x)$ постоянна на множестве рациональных чисел

$$\chi(x)=1 \text{ (если } x\text{—рациональное число).}$$

Любая (как рациональная, так и иррациональная) точка a есть предельная точка для множества рациональных чисел, а потому

$$\lim_{x\to a}\chi(x)=1 \text{ (если } x\text{—рациональное число).}$$

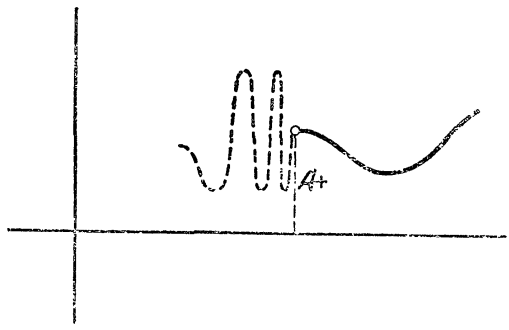
Аналогично $\chi(x)$ на множестве иррациональных чисел имеет предел, равный нулю, в любой точке:

$$\lim_{x\to a}\chi(x)=0 \text{ (если } x\text{—иррациональное число).}$$

2. Функция $\cos x$ постоянна (равна 1) на множестве точек $2k\pi$ (k—любое целое число); следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\cos x=1 \quad (x=2k\pi).$$

Односторонние пределы. Рассмотрим функцию $y=f(x)$ на множестве значений аргумента, бóльших данного числа a. Иначе говоря, функция $f(x)$ рассматривается в части области ее определения, образованной точками, расположенными вправо от a: $a<x$. Аналогично можно рассматривать функцию $f(x)$ в части области определения, лежащей влево от данной точки: $x<a$.



Черт. 102.

Определение. *Правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке a называется предел $f(x)$ на множестве значений аргумента, больших a (меньших a).*

Таким образом, правый предел есть $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (где $x>a$); левый предел есть $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (где $x<a$).

Правый и левый пределы называются односторонними пределами. Эти пределы будем обозначать следующим образом:

$$\lim_{x\to a+}f(x)=A_+=f(a+0) \quad \text{(правый предел)}$$

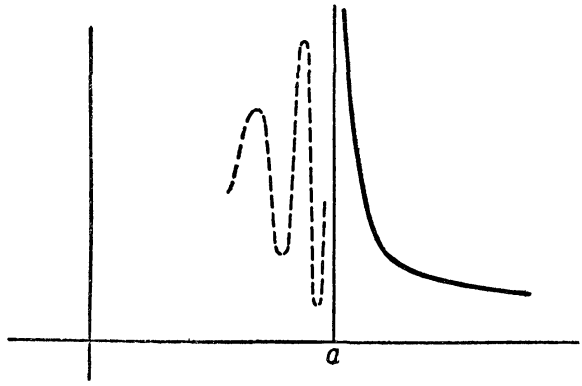
и

$$\lim_{x\to a-}f(x)=A_-=f(a-0) \quad \text{(левый предел).}$$

Наличие правого конечного предела в точке a характеризуется выполнением неравенства

$$|f(x)-A_+|<\varepsilon \quad \text{при} \quad a<x<a+\delta \text{ (черт. 102).}$$

Наличие правого бесконечного предела характеризуется следующими неравенствами:



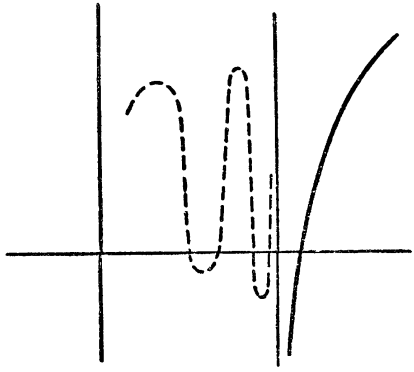
Черт. 103.

Если $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=+\infty$, то $f(x)>M$ при $a<x<a+\delta$ (черт. 103);
если $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=-\infty$, то $f(x)<M$ при $a<x<a+\delta$ (черт. 104).
Для левого предела условие $a<x<a+\delta$ заменяется условием $a-\delta<x<a$.

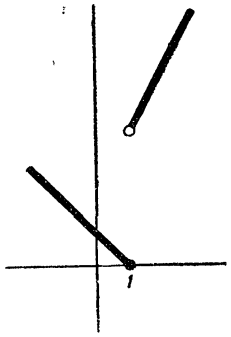
Примеры.

1. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 \text{ (если } x\leqslant 1); \\ 2x+2 \text{ (если } x>1) \text{ (черт. 105).} \end{cases}$$



Черт. 104.



Черт. 105.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=4$. В самом деле, при $x>1$ имеем $f(x)=2x+2$, а потому $|f(x)-4|=2|x-1|$, отсюда ясно, что $|f(x)-4|<\varepsilon$, если $0<x-1<\frac{\varepsilon}{2}$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=0$. Имеем:

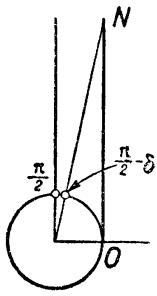
$$|f(x)-0|=|-x+1|=|1-x|;$$

отсюда $|f(x)-0|<\varepsilon$, если $0<1-x<\varepsilon$.

2. Функция $\operatorname{sign} x$ постоянна в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$: в первом $\operatorname{sign} x = -1$, а потому $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1$; во втором $\operatorname{sign} x = 1$, а потому $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1$.

3. $(\operatorname{sign} x)^2 = 1$ во всех точках $x \neq 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{sign} x)^2 = \lim\limits_{x\to 0-} (\operatorname{sign} x)^2 = 1$.

4. Докажем (отправляясь от геометрического определения тангенса), что $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$. Пусть $N > 0$ — любое наперед заданное (как угодно большое) число. Отметим на линии тангенса точку N и соединим ее с центром тригонометрического круга (черт. 106). Соответствующую точку окружности обозначим через $\frac{\pi}{2} - \delta$. Если $\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$, то имеем $\operatorname{tg} x > N$, ч. т. д.



Черт. 106.

Предлагаем учащемуся доказать, что $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

§ 22. Общие теоремы о конечных и бесконечных пределах

В настоящем параграфе будут доказаны основные общие теоремы о пределах, имеющие место как для конечных, так и для бесконечных пределов, поэтому символ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ может обозначать как конечный, так и бесконечный предел. В этих теоремах данная функция $f(x)$ рассматривается на некотором множестве значений аргумента $\mathfrak{M}$, при этом безразлично, является ли это множество значений аргумента всей областью определения (с исключенной точкой a) или составляет некоторую ее часть.

Теорема о единственности предела. *Функция $f(x)$ не может иметь в точке a двух различных пределов.*

Доказательство.

Допустим, вопреки утверждению, что на множестве $\mathfrak{M}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} f(x) = B$$

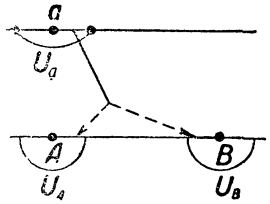
и что $A \neq B$. Обозначим через U_A и U_B окрестности точек A и B, не имеющие общих точек (свойство II_U окрестностей).

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то существует окрестность U'_a точки a — такая, что образ любого значения аргумента $x \in \mathfrak{M}$, лежащего в U'_a, лежит в U_A.

Точно так же из условия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ вытекает существование такой окрестности U''_a точки a, что $f(x) \in U_B$ при любом значении аргумента $x \in U''_a$, где $x \in \mathfrak{M}$.

Обозначим через U_a любую окрестность, содержащуюся в обеих окрестностях U'_a и U''_a (свойство I_U):

$$U_a \subset U'_a \text{ и } U_a \subset U''_a.$$



Черт. 107.

Образ любого значения аргумента $x \in \mathfrak{M}_1$, содержащегося в U_a, лежит в окрестности U_A и U_B:

$$f(x) \in U_A \text{ и } f(x) \in U_B$$

(черт. 107), что невозможно, так как U_A и U_B не имеют общих точек, ч. т. д.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ *на множестве* $\mathfrak{M}$ *и если множество* $\mathfrak{M}_1$ *есть часть множества* $\mathfrak{M}$ *и* a *есть предельная точка для* $\mathfrak{M}_1$, *то функция* $f(x)$ *имеет также на множестве* $\mathfrak{M}_1$ *предел, равный* B:

$$\lim_{x \to a} f(x) = B \quad (x \in \mathfrak{M}_1).$$

Доказательство. Допустим, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ на множестве $\mathfrak{M}$; докажем, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B\,(x \in \mathfrak{M}_1)$. В самом деле, какова бы ни была окрестность U_B, существует окрестность U_a — такая, что при всех значениях $x \in \mathfrak{M}$ имеем:

$$f(x) \in U_B, \quad \text{если} \quad x \in U_a.$$

Так как любое значение аргумента x, содержащееся в множестве $\mathfrak{M}_1$, содержится в множестве $\mathfrak{M}$, то имеем в частности:

$$f(x) \in U_B, \quad \text{если} \quad x \in U_a \quad \text{и} \quad x \in \mathfrak{M}_1\,^*;$$

следовательно,

$$\lim_{x \to a} f(x) = B \quad (x \in \mathfrak{M}_1), \text{ ч. т. д.}$$

Следствия.

I. *Если каждое из множеств* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ *является частью множества* $\mathfrak{M}$, *на котором рассматривается функция* $f(x)$, *и если существуют различные пределы в точке* a *функции* $f(x)$ *на множествах* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad (x \in \mathfrak{M}_1)$$

и

$$\lim_{x \to a} f(x) = B \quad (x \in \mathfrak{M}_2), \quad \textit{причем } A \neq B,$$

то $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *не существует.*

* Так как a есть предельная точка для $\mathfrak{M}_1$, то в любой окрестности U_a содержатся значения аргумента $x \in \mathfrak{M}_1$.

В самом деле, если бы существовал $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (на множестве $\mathfrak{M}$), то пределы $f(x)$ на двух частях множества $\mathfrak{M}$ не могли бы быть различными.

II. *Если заранее известно, что существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то для нахождения этого предела достаточно выделить любую часть* $\mathfrak{M}_1$ *всего множества* $\mathfrak{M}$, *для которой точка* a *является предельной, и найти предел* $f(x)$ *в точке* a *на* $\mathfrak{M}_1$.

Примеры.

1. Последовательность

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n+1},\ \ldots$$

сходится к 1.

В самом деле, эту последовательность можно рассматривать как функцию $\frac{x-1}{x+1}$ на множестве натуральных чисел.

Но $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ (пример 1 на стр. 78). Следовательно, и $\lim\frac{n-1}{n+1}=1$.

2. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ (k — натуральное число), то последовательность k-х степеней натуральных чисел

$$1^k,\ 2^k,\ \ldots,\ n^k,\ \ldots$$

расходится к $+\infty$.

3. Функция Дирихле $y=\chi(x)$ не имеет предела ни в какой точке.

В самом деле, любая точка есть предельная как для множества рациональных, так и для множества иррациональных чисел. Функция имеет различные пределы на этих множествах (пример 1 на стр. 89). Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\chi(x)$ не существует. По тем же причинам не существует ни один из односторонних пределов.

4. Функция $\sin x$ не имеет предела в $+\infty$.

В самом деле, на множестве точек $x=k\pi$ имеем $\sin x=0=\text{const}$, и потому $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=0\ (x=k\pi)$. Но, с другой стороны, $\sin x=1$ на множестве точек $x=\frac{\pi+4k\pi}{2}$, а потому

$$\lim_{x\to+\infty}\sin x=1\quad\left(x=\frac{\pi+4k\pi}{2}\right).$$

Пределы в $+\infty$ на разных множествах различны, и потому $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует.

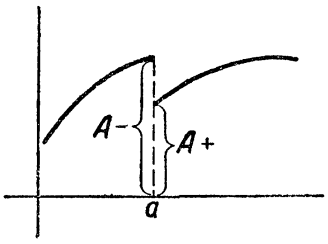
5. Последовательность $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ \ldots$, определенная законом соответствия

$$s_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (\text{если } n\text{ — нечетное});\\[2ex] \dfrac{n}{n+1} & (\text{если } n\text{ — четное}),\end{cases}$$

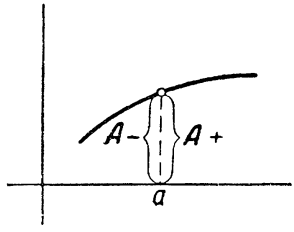
расходится. В самом деле, $\lim s_n=0$ (если n — нечетное), но $\lim s_n=1$ (если n — четное), а потому $\lim s_n$ не существует.

6. Функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ в точке 0 не имеет предела. В самом деле, в точках $x=\frac{1}{k\pi}$ (k — любое целое число, отличное от нуля) имеем $f(x)=0$. Точка 0 является предельной для множества чисел вида $\frac{1}{k\pi}$, так как $\left|\frac{1}{k\pi}\right|<\delta$, если $|k|>\frac{1}{\pi\delta}$. На этом множестве имеем $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$. Далее на множестве чисел $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ имеем $f(x)=1$, на этом множестве $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=1$. Наконец, в точках множества $x=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ имеем $f(x)=-1$, на этом множестве $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=-1$.

Так как пределы $f(x)$ в точке 0 различны на различных множествах, то $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует. При $k>0$ точки рассмотренных множеств располагаются справа от точки 0 и при $k<0$ — слева от точки 0; следовательно, в точке 0 не существует ни один из односторонних пределов. График функции представлен на чертеже 89.



Черт. 108.



Черт. 109.

Применим изложенные следствия к односторонним пределам.

1° Предположим, что существует $\lim\limits_{x\to a}f(x)$; тогда, если точка a является предельной для множества значений аргумента, бо́льших (меньших) a,

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a}f(x).$$

Аналогично для левого предела:

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a}f(x).$$

2° Если $\lim\limits_{x\to a+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a-}f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ не существует (следствие II, черт. 108).

3° Если хотя бы один из односторонних пределов не существует, то не существует и предел функции в точке a.

4° Предположим, что существуют оба односторонние предела в точке a, и эти пределы равны:

$$A_+=A_-=A \text{ (черт. 109)}$$

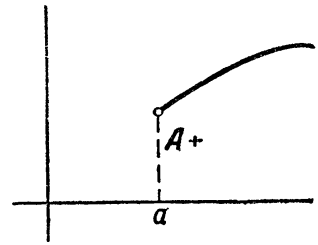
Согласно определению правого предела, существует такое число $\delta_1 > 0$, что $f(x) \in U_A$, если $a < x < a + \delta_1$, где U_A — заданная окрестность точки A.

Согласно определению левого предела, существует такое число $\delta_2 > 0$, что $f(x) \in U_A$, если $a - \delta_2 < x < a$.

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, тогда $f(x) \in U_A$ и при $a < x < a + \delta$, и при $a - \delta < x < a$, т. е. при всяком $x \neq a$ и удовлетворяющем неравенствам $a - \delta < x < a + \delta$.

Следовательно, в этом случае $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

5° Если $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a+0)$ существует, а $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ не имеет смысла, то $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (черт. 110).



Черт. 110.

В самом деле, в этом случае a не есть предельная точка для значений x, меньших a, и все значения аргумента из достаточно малой окрестности точки a (отличные от a) больше a, а потому условие $f(x) \in U_A$ выполняется при всех значениях аргумента в достаточно малой окрестности точки a. Аналогичное замечание относится к случаю, когда $f(a-0)$ существует, а $f(a+0)$ не имеет смысла.

Примеры.

1. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$.

1° Если $a \neq 0$, то $f(a+0) = f(a-0) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

В самом деле, в $\frac{|a|}{2}$-окрестности точки a имеем $|x-a| < \frac{|a|}{2}$, а потому $|x| > \frac{|a|}{2}$ и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{xa} < \frac{2|x-a|}{a^2}.$$

Если δ — наименьшее из чисел $\frac{|a|}{2}$ и $\frac{\varepsilon a^2}{2}$, то при $|x-a| < \delta$ будем иметь $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$, ч. т. д.

2° $a = 0$. Имеем (при любом наперед заданном $M > 0$): $\frac{1}{x} > M$, если $0 < x < \frac{1}{M}$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Аналогично покажем, что $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ не существует.

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty.$$

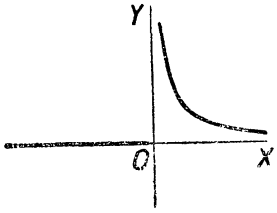
2. Функция $[x]$ постоянна внутри любого интервала $(n, n+1)$, где n — целое число, а потому

$$\lim_{x\to a}[x]=n=[a], \text{ если } n<a<n+1.$$

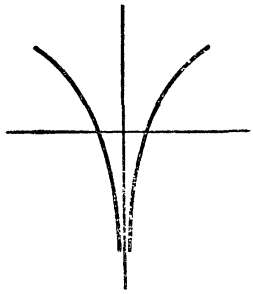
В точке n имеем $\lim\limits_{x\to n+}[x]=n$ и (так как $[x]=n-1$ в интервале $n-1<x<n$) $\lim\limits_{x\to n-}[x]=n-1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to n}[x]$ не существует.

3. Положим

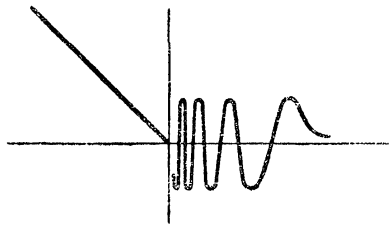
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (\text{если } x>0);\\ 0 & (\text{если } x<0)\end{cases}$$ (черт. 111).



Черт. 111.



Черт. 112.



Черт. 113.

Имеем: $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=+\infty$ (см. пример 1) и $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$; следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует.

4.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0,$$

но $\lim\limits_{x\to 0-}\sqrt{x}$ не имеет смысла.

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Точка 0 не принадлежит области определения функции.

6. Положим:

$$f(x)=\log_2 x^2=2\log_2|x|$$ (черт. 112).

В данном примере

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty.$$

7. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x>0);\\ -x & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

не имеет предела в точке 0, ибо $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$, но $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ не существует (черт. 113).

Теорема о пределе сложной функции. *Если:*

1° *точка a является предельной для области определения сложной функции*

$$y=f(\varphi(x));$$

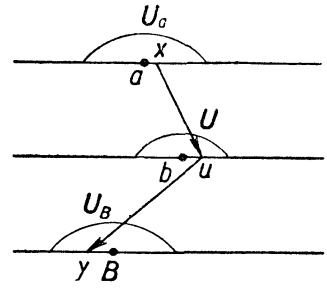
2° *существуют пределы*

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=b \text{ и } \lim_{u\to b} f(u)=B,$$

3° *в некоторой окрестности точки a имеем $\varphi(x)\neq b$, если $x\neq a$,*

то существует предел сложной функции, равный B:

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=B.$$



Черт. 114.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{u\to b} f(u)=B$, то при любой заданной окрестности U_B точки B существует такая окрестность U_b точки b, что

$$f(u)\in U_B, \text{ если } u\in U_b.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, то существует окрестность U_a — такая, что $\varphi(x)\neq b$ и $\varphi(x)\in U_b$, если $x\in U_a$.

По условию, точка a есть предельная для области определения сложной функции $f(\varphi(x))$. Значения аргумента x сложной функции являются значениями аргумента и для функции $u=\varphi(x)$. Поэтому при всех значениях аргумента сложной функции, содержащихся в окрестности U_a, имеем: *если* $x\in U_a$, *то* $u\in U_b$, а потому $y\in U_B$. Итак,

$$y\in U_B, \text{ если } x\in U_a.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a} y=B, \text{ ч. т. д.}$$

Геометрически доказательство пояснено на чертеже 114.

Примечание. Условие, что точка a есть предельная для области определения сложной функции, существенно. Поясним это на следующем примере. Положим:

$$u=\varphi(x)=-x^2,\ f(u)=\sqrt{u}.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0 \text{ и } \lim_{u\to 0} f(u)=0.$$

Таким образом, в точке 0 обе функции в отдельности имеют предел. Для сложной функции $f(\varphi(x))=\sqrt{-x^2}$ область определения состоит из одной точки $x=0$, а потому $\lim\limits_{x\to 0} f(\varphi(x))$ не имеет смысла.

Доказанная теорема имеет существенное значение в практике вычисления пределов, так как она позволяет, зная пределы простейших функций, находить пределы от различных сложных функций.

Примеры.

1. Имеем:

$$\lim_{x\to 1}(2x+3)=5 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 5}\sqrt{u}=\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x+3}=\sqrt{5}$$

(условие 3° выполнено, так как $2x+3\neq 5$ при $x\neq 1$).

2.

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x=0 \quad \text{и} \quad \lim_{u\to 0}\log_2 u=-\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\log_2 \operatorname{tg} x=-\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1.$$

4.

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a \quad \text{и} \quad \lim_{u\to A}u^2=A^2.$$

При $A=\sin a$ получим $\lim\limits_{x\to a}(\sin x)^2=\sin^2 a$.

5. Пусть $\varphi(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ (где $x\neq 0$),

$$f(u)=\begin{cases} u & (\text{если } u\neq 0);\\ 1 & (\text{если } u=0).\end{cases}$$

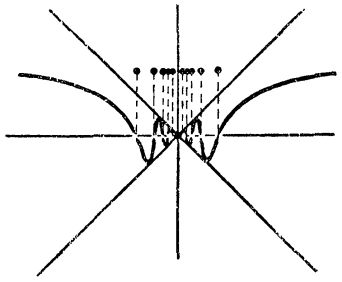
Имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$ и $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$.

Функция $F(x)=f(\varphi(x))$ равна $\varphi(x)$ в тех точках, где $\varphi(x)\neq 0$, и равна 1 в точках $x=\dfrac{1}{k\pi}$ (где k — целое число).

$$F(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \left(x\neq\dfrac{1}{k\pi}\right);\\ 1 & \left(x=\dfrac{1}{k\pi}\right).\end{cases}$$

Здесь $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует (черт. 115).

Этот пример показывает, что при нарушении условия 3° теорема о пределе сложной функции может оказаться несправедливой, хотя обе данные функции имеют пределы в соответствующих точках.



Черт. 115.

6. $\chi(\chi(x))=1$. Следовательно, в любой точке

$$\lim_{x\to a}\chi(\chi(x))=1;$$

но $\lim\limits_{x\to a}\chi(x)$ не существует ни в какой точке.

Этот пример показывает, что теорема дает достаточные условия существования предела сложной функции. Предел сложной функции может существовать, но каждая из функций $\varphi(x)$ и $f(u)$ может не иметь предела.

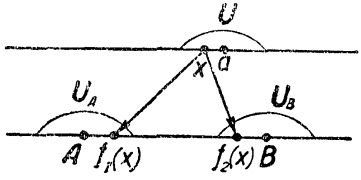
§ 23. Теоремы о неравенствах

Нижеследующие теоремы о неравенствах имеют место как для конечных, так и для бесконечных пределов. Во всех этих теоремах мы будем считать выполненным следующее условие. *Все функции рассматриваются на некотором одном и том же множестве* $\mathfrak{M}$, *для которого данная точка* a *является предельной (но не входящей в* $\mathfrak{M}$*).*

Теорема I. *Если*

$$\lim_{x\to a}f_1(x)<\lim_{x\to a}f_2(x),$$

то существует такая окрестность U_a *точки* a, *что при всех значениях аргумента* $x\in U_a$ (и $x\in\mathfrak{M}$) *имеет место неравенство*



Черт. 116.

$$f_1(x)<f_2(x).$$

Доказательство. Положим

$$\lim_{x\to a}f_1(x)=A \text{ и } \lim_{x\to a}f_2(x)=B;$$

согласно условию, $A<B$, поэтому существуют такие окрестности U_A и U_B точек A и B, что любое число y_1, лежащее в U_A, меньше любого числа y_2, лежащего в U_B. Короче говоря, окрестность U_A лежит левее окрестности U_B (черт. 116). Из условия $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=A$ следует, что $f_1(x)\in U_A$ для всех значений аргумента, лежащих в некоторой окрестности U'_a точки a. Аналогично из условия $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=B$ следует, что $f_2(x)\in U_B$, если значение аргумента x лежит в некоторой окрестности U''_a.

Пусть U_a — какая-либо окрестность, содержащаяся в U'_a и U''_a (свойство I_U), тогда при всех значениях аргумента, лежащих в U_a, будем иметь $f_1(x)\in U_A$ и $f_2(x)\in U_B$, откуда $f_1(x)<f_2(x)$, ч. т. д.

Следствие. *Если*

$$\lim_{x\to a} f(x) < c \ (\text{или } \lim_{x\to a} f(x) > c),$$

где c — некоторое действительное число, то при всех значениях аргумента x в некоторой окрестности точки a

$$f(x) < c \ (\text{или } f(x) > c).$$

В самом деле, достаточно положить

$$f_1(x) = f(x), \quad \text{а} \quad f_2(x) = \text{const} = c.$$

В частности, если

$$\lim_{x\to a} f(x) > 0 \ (\text{или } < 0),$$

то $f(x) > 0$ (или < 0) при всех значениях аргумента в некоторой окрестности точки a.

Примеры.

1. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Следовательно, в некоторой окрестности точки 0

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2}, \text{ ибо } \frac{1}{2} < 1.$$

2. Имеем: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$.

Следовательно, в некоторой окрестности точки $\dfrac{\pi}{2}$ имеем $\cos x < \sin x$.

Такой окрестностью, например, является интервал $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \cos x = 0$.

Поэтому в некоторой окрестности точки $\dfrac{\pi}{2}$ при $x < \dfrac{\pi}{2}$ будем иметь $\cos x < \operatorname{tg} x$.

Теорема II. *Если существуют пределы (на данном множестве $\mathfrak{M}$)*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \quad \textit{и} \quad \lim_{x\to a} f_2(x),$$

причем для всех значений аргумента в некоторой окрестности точки a имеет место неравенство $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$.

Доказательство методом от противного: если

$$\lim_{x\to a} f_1(x) > \lim_{x\to a} f_2(x),$$

то в некоторой окрестности точки a имело бы место неравенство $f_1(x) > f_2(x)$, что противоречит условию теоремы, ч. т. д.

Эту теорему иногда кратко формулируют так: *неравенство в пределе сохраняется или переходит в равенство.*

В частности, если существует такое действительное число c, что при всех значениях аргумента в некоторой окрестности точки a имеет место неравенство $f(x) \leqslant c$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant c$ (если предел существует). Подобным же образом из неравенства $c < f(x)$ следует

$$c \leqslant \lim_{x\to a} f(x).$$

Примеры.

1. В достаточно малой окрестности точки 0 имеем:

$$0 < \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то первое при переходе к пределу неравенство сохраняется:

$$0 < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x},$$

а второе переходит в равенство.

2. Рассмотрим функции x^2 и x^3. Если $x > 1$, то $x^2 < x^3$.

Для предела в точке $+\infty$ имеем равенство: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

3. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем: $\sin x < \operatorname{tg} x$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \sin x = 1, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

В пределе неравенство сохраняется, ибо $1 < +\infty$.

Теорема III. *Если:*

1° *в точке a функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одинаковый предел*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = A,$$

2° *при всех значениях аргумента в некоторой окрестности U_a точки a*

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x),$$

то функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный A.

Доказательство. Пусть U_A — заданная окрестность точки A; так как $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A$, то в некоторой окрестности U'_a будем иметь $f_1(x) \in U_A$. Аналогично в некоторой окрестности U''_a будем иметь $f_2(x) \in U_A$. Пусть V_a — некоторая окрестность, содержащаяся в окрестностях U_a, U'_a, U''_a, тогда при $x \in V_a$ оба значения $f_1(x)$

и $f_2(x)$ лежат в интервале U_A. В силу неравенств 2°, в том же интервале лежит и точка $f(x)$.

Итак, $f(x) \in U_A$, если $x \in V_a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (черт. 117), ч. т. д.

Примеры.

1. Известно, что (стр. 84)

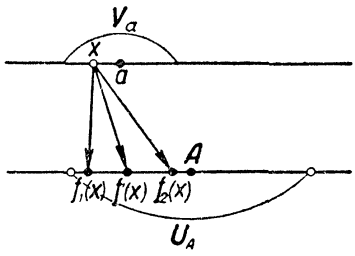
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1;$$

на основании доказанной теоремы $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

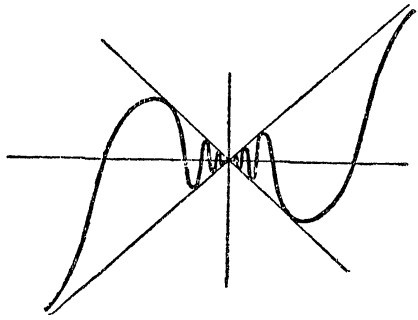
2. Имеем: $x - 1 \leqslant x + \sin x \leqslant x + 1$.

Так как

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1) = \lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty,$$



Черт. 117.



Черт. 118.

то и

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty.$$

Подобным же образом

$$\lim_{x \to -\infty} (x-1) = \lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty,$$

а потому

$$\lim_{x \to -\infty} (x + \sin x) = -\infty.$$

3. Положим $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$. Имеем:

$$-|x| \leqslant x \cos \frac{1}{x} \leqslant |x|. \qquad (1)$$

Функции $-|x|$, $|x|$ и $x \cos \frac{1}{x}$ рассматриваются совместно на множестве всех действительных чисел, отличных от нуля. Так как

$$\lim_{x \to 0} (-|x|) = \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

то и

$$\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0.$$

График функции $y = x \cos \frac{1}{x}$ изображен на чертеже 118. Из неравенства (1)

(которое при $x>0$ пишется так: $-x\leqslant x\cos\frac{1}{x}\leqslant x$) следует, что линия не выходит за пределы угла, образованного прямыми $y=x$ и $y=-x$. При значениях аргумента, когда $\cos\frac{1}{x}=1$, т. е. $x=\frac{1}{2k\pi}$, соответствующие точки графика лежат на прямой $y=x$. Если $x=\frac{1}{(2k+1)\pi}$, то соответствующие точки графика лежат на прямой $y=-x$.

§ 24. Теоремы о конечных пределах

Нижеследующие теоремы относятся к функциям, имеющим конечные пределы в некоторой данной точке a. При совместном рассмотрении нескольких функций всегда предполагается, что данная точка a является предельной точкой того множества (но не входящей в само множество), на котором эти функции рассматриваются.

Теорема I. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то функция* $f(x)$ *ограничена в некоторой окрестности точки* a.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то в некоторой окрестности точки a имеем $|f(x)-A|<\varepsilon$, откуда

$$|A|-\varepsilon<|f(x)|<|A|+\varepsilon,$$ ч. т. д.

Обратная теорема неверна: ограниченная в окрестности некоторой точки a функция $f(x)$ может не иметь предела в точке a.

Примеры.

1. Функция $\sin x$ ограничена в окрестности точки $+\infty$, но $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует.
2. Функция Дирихле ограничена в окрестности любой точки и не имеет предела ни в какой точке.
3. Последовательность 1, -1, 1, -1, ... ограничена и расходится.
4. Функция $\sin\frac{1}{x}$ ограничена в окрестности точки 0 и не имеет предела в этой точке.

Теорема II. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, *то* $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то в некоторой окрестности точки a имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$; но $|f(x)-A|\geqslant\big||f(x)|-|A|\big|$. Значит, и подавно

$$\big||f(x)|-|A|\big|<\varepsilon$$

в той же окрестности точки a, т. е. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$, ч. т. д.

Примечание. Обратная теорема неверна: если существует $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$, то отсюда нельзя заключить, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Пусть, например,

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ (если } x\text{—иррациональное число);} \\ -1 \text{ (если } x\text{—рациональное число).}\end{cases}$$

Имеем: $|f(x)|=1$, а потому в любой точке $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=1$, но $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует.

Если значения $f(x)$ в некоторой окрестности точки a имеют один и тот же знак, то из существования $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ следует существование $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Так, если $f(x)>0$, то $|f(x)|=f(x)$, и утверждение становится очевидным.

Теорема III. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)=0$.

Доказательство. Имеем (по определению предела):

$$|f(x)-A<\varepsilon, \text{ если } x\in U_a{}^*, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема IV. *Если* $f(x)=\text{const}=k$ *в некоторой окрестности* U_a *точки* a, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k$.

Доказательство. В самом деле, имеем:

$$|f(x)-k|=0<\varepsilon, \text{ если } x\in U_a, \text{ т. е. } \lim_{x\to a} f(x)=k, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема V. *Если функции* $f_1(x)$ $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ *имеют (каждая) пределы в точке* a, *то сумма* $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ *также имеет предел в точке* a, *равный сумме пределов слагаемых.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=A_1, \quad \lim_{x\to a} f_2(x)=A_2, \quad \ldots, \quad \lim_{x\to a} f_n(x)=A_n.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A_1$, то неравенство

$$|f_1(x)-A_1|<\frac{\varepsilon}{n} \tag{1}$$

имеет место в некоторой окрестности $U_a^{(1)}$ точки a. Аналогично

$$|f_2(x)-A_2|<\frac{\varepsilon}{n} \tag{2}$$

---

* В ряде курсов анализа (в особенности в старых курсах) функции, имеющие предел, равный нулю, называются «бесконечно малыми величинами», их свойства изучаются особо и ими пользуются при доказательствах теорем теории пределов. Сама дисциплина «математический анализ» иногда называется «анализ бесконечно малых».

Авторы не считают целесообразным вводить особый термин для функции, имеющей предел, равный нулю. Тем более авторы не считают целесообразным вводить понятие «бесконечно малой величины» в качестве самостоятельного понятия.

в некоторой окрестности $U_a^{(2)}$ точки a. Аналогично получим неравенство (3) и т. д. и, наконец, в окрестности $U_a^{(n)}$ точки a:

$$|f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{n}. \qquad (n)$$

В силу свойства I_U окрестностей, найдется окрестность, принадлежащая всем окрестностям $U_a^{(1)}$, $U_a^{(2)}$, ..., $U_a^{(n)}$; обозначим ее через U_a. Таким образом, неравенства (1), (2), ..., (n) будут иметь место при значении аргумента $x\in U_a$. Складывая эти неравенства, получим:

$$|f_1(x)-A_1|+|f_2(x)-A_2|+\ldots+|f_n(x)-A_n|<\varepsilon$$

при $x\in U_a$. С другой стороны, рассмотрим неравенство

$$|(f_1(x)-A_1)+(f_2(x)-A_2)+\ldots+(f_n(x)-A_n)|\leqslant$$
$$\leqslant|f_1(x)-A_1|+|f_2(x)-A_2|+\ldots+|f_n(x)-A_n|,$$

левая часть которого может быть написана так:

$$|[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]-(A_1+A_2+\ldots+A_n)|;$$

следовательно, имеем и подавно:

$$|[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]-(A_1+A_2+\ldots+A_n)|<\varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]=A_1+A_2+\ldots+A_n$$

или

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]=$$
$$=\lim f_1(x)+\lim f_2(x)+\ldots+\lim f_n(x),\ \text{ч. т. д.}*.$$

Пример.

Вычислить

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+\frac{1}{x}\right).$$

Так как $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$ и $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$.

Примечания. I. Если функция $f_1(x)+f_2(x)$ имеет предел в точке a, то из этого не следует, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют предел в той же точке.

1. Пусть $f_1(x)=1-\sin\frac{1}{x}$, $f_2(x)=\sin\frac{1}{x}$, тогда $f_1(x)+f_2(x)=1$.

---

* При записи цепочкой равенств, содержащих символ предела, указание $x\to a$, точки, в которой берется предел, будет делаться, как правило, один (первый) раз.

Сумма функций имеет в точке 0 предел, равный 1, в то время как слагаемые функции $1-\sin\frac{1}{x}$ и $\sin\frac{1}{x}$ в точке 0 предела не имеют.

2. Последовательность 1, 0, 1, 0, 1, ..., заданная законом соответствия

$$s'_n=\frac{1-(-1)^n}{2},$$

расходится. Последовательность -1, 0, -1, 0, -1, ..., заданная законом соответствия

$$s''_n=\frac{(-1)^n-1}{2},$$

также расходится. Сумма их, т. е. последовательность 0, 0, 0, ... сходится к нулю.

II. Существенным условием справедливости теоремы V является предположение, что точка a является предельной для того множества, на котором совместно рассматриваются функции — слагаемые и сумма.

Положим, например,

$$f_1(x)=\sqrt{x} \text{ и } f_2(x)=\sqrt{-x}.$$

Имеем в отдельности:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim\sqrt{x}=0 \text{ и } \lim_{x\to 0} f_2(x)=\lim\sqrt{-x}=0.$$

Однако $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}+\sqrt{-x})$ не имеет смысла, так как область определения суммы состоит из одной точки $x=0$.

Теорема VI. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(kf(x))$ *существует и*

$$\lim_{x\to a}(kf(x))=k\lim f(x) \text{ (где } k \text{ — некоторое число).}$$

Иначе говоря, *числовой множитель можно выносить за знак предела.*

Доказательство. Положим

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

1° Пусть $k=0$; тогда $kf(x)=0$; значит, функция $kf(x)=$ $=\text{const}=0$, а потому ее предел в точке a равен 0; в данном случае и $Ak=0$.

2° Предположим, что $k\neq 0$.

Так как

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \quad \text{то} \quad |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{|k|},$$

для любого значения x в некоторой окрестности точки a. Помножив обе части этого неравенства на $|k|\neq 0$, получим:

$$|k||f(x)-A|<\varepsilon, \text{ или } |kf(x)-Ak|<\varepsilon,$$

откуда $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=Ak$, ч. т. д.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$; значит, $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2=3\lim\limits_{x\to 2} x^2=3\cdot 4=12$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$; значит, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{a}$.

Следствия.

1° $$\lim_{x\to a}[-f(x)]=-\lim_{x\to a} f(x)$$

(теорема VI при $k=-1$).

2° Если сумма двух функций и одно из слагаемых имеют предел в точке a, то другое слагаемое имеет предел.

Пусть

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x);\quad \lim_{x\to a} f(x)=A;\quad \lim_{x\to a} f_1(x)=A_1;$$

тогда

$$f_2(x)=f(x)+[-f_1(x)],$$

откуда

$$\lim_{x\to a} f_2(x)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}[-f_1(x)]=A-A_1.$$

3° Если существуют пределы функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ в точке a, то

$$\lim_{x\to a}[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\ldots+k_nf_n(x)]=$$

$$=k_1\lim_{x\to a} f_1(x)+k_2\lim_{x\to a} f_2(x)+\ldots+k_n\lim_{x\to a} f_n(x),$$

где k_1, k_2, ..., k_n — числа.

Пример.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin x+3\cos x)=2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x+3\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{6}+3\cos\frac{\pi}{6}=1+\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Теорема VII. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$ *и функция* $f_2(x)$ *ограничена в некоторой окрестности точки* a, *то* $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)]=0$.

Доказательство. Пусть

$$|f_2(x)|<M;\quad (M>0) \tag{1}$$

в некоторой окрестности U'_a точки a. Так как $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$, то

$$|f_1(x)|<\frac{\varepsilon}{M} \tag{2}$$

при любом значении аргумента в некоторой окрестности U''_a точки a.

Пусть U_a — окрестность, содержащаяся в окрестностях U'_a и U''_a; тогда неравенства (1) и (2) имеют место при любом значении аргумента $x \in U_a$. Перемножая эти неравенства, имеем $|f_1(x)||f_2(x)| < \varepsilon$ или

$$|f_1(x) f_2(x)| < \varepsilon \text{ при любом } x \in U_a, \text{ ч. т. д.}$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \quad \text{и} \quad -2 < \sin\frac{1}{x} < 2.$$

Следовательно, функция $\sin\frac{1}{x}$ ограничена; имеем $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$.

Теорема VIII. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы в точке a, то произведение $f_1(x) f_2(x)$ имеет предел в точке a, равный произведению пределов сомножителей:*

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) f_2(x)] = \lim f_1(x) \lim f_2(x).$$

Доказательство. Положим:

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1; \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A_2 \quad \text{и} \quad \alpha_1(x) = f_1(x) - A_1.$$

Следовательно,

$$f_1(x) f_2(x) = (A_1 + \alpha_1(x)) f_2(x) = A_1 f_2(x) + \alpha_1(x) f_2(x).$$

Но $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha_1(x) f_2(x) = 0$, так как $\lim\limits_{x\to a} \alpha_1(x) = 0$, а функция $f_2(x)$ ограничена в окрестности точки a (ибо она имеет конечный предел в этой точке).
Имеем:

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) f_2(x)] = A_1 \lim f_2(x) + \lim [\alpha_1(x) f_2(x)] = A_1 A_2,$$

ч. т. д.

Теорема о пределе произведения распространяется методом полной индукции и на случай любого числа сомножителей. Предположим, что теорема верна для n сомножителей; докажем, что при этом предположении она верна для $n+1$ сомножителей. В самом деле, пусть

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = \lim f_1(x) \lim f_2(x) \ldots \lim f_n(x),$$

тогда

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) f_{n+1}(x)] =$$
$$= \lim [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] \lim f_{n+1}(x), \qquad (3)$$

если рассматривать $f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) f_{n+1}(x)$ как произведение двух сомножителей $f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)$ и $f_{n+1}(x)$. По предположению,

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)] = \lim f_1(x) \lim f_2(x) \dots \lim f_n(x);$$

следовательно, равенство (3) перепишется так:

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \dots f_{n+1}(x)] = \\ = \lim f_1(x) \lim f_2(x) \dots \lim f_n(x) \lim f_{n+1}(x).$$

Следствие. Положим:

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = f(x).$$

Получим:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n,$$

где n — любое натуральное число.

Примечание. Если произведение двух функций $f_1(x) f_2(x)$ имеет предел в точке a, то отсюда не следует, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют предел в этой точке.

Положим, например,

$$f_1(x) = \chi(x), \quad f_2(x) = 1 - \chi(x).$$

Очевидно, $f_1(x) f_2(x) = 0$ при любом x; значит, $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) f_2(x)) = 0$ при любом a. В то же время пределы $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$ не существуют.

Примеры.

1. Для функции $f(x) = x$ имеем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$. Следовательно, при любом n (натуральном) $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.

2. $\lim\limits_{x \to a} (c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n) = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \dots + c_n$.

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; следовательно, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x \to \pi} x \cos x = \lim x \lim \cos x = \pi (-1) = -\pi$.

5. Имеем: $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim \sqrt{-x} = 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x})$ не имеет смысла так как точка 0 не является предельной точкой для произведения $\sqrt{x}\sqrt{-x}$.

Теорема IX. *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \neq 0$,

то

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim f(x)}.$$

Доказательство. Пусть $(|A|-k,\ |A|+k)$ — любая окрестность точки $|A| \neq 0$, не содержащая точки 0 (можно, например, радиус k этой окрестности взять равным $\frac{|A|}{2}$).

Так как $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = |A|$, то в некоторой окрестности U'_a будем иметь:

$$0 < |A| - k < |f(x)| < |A| + k. \tag{4}$$

Следовательно, в этой окрестности $|f(x)| \neq 0$ и функция $\frac{1}{f(x)}$ определена во всех тех точках, в которых определена $f(x)$. Из (4) имеем:

$$\frac{1}{|A|+k} < \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{|A|-k},$$

а потому $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в U'_a.

Составим разность

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A} = \frac{A - f(x)}{A f(x)},$$

откуда

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot[f(x) - A].$$

Так как функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$; следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$ (где $a \neq 0$).

2. $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$; следовательно, при $a \neq k\pi$, $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} a$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1) = 1$; следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$.

5. Последовательность $\frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \ldots, \frac{n-1}{2n}, \ldots$ сходится к $\frac{1}{2}$.

Значит, последовательность $4, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \ldots, \frac{2n}{n-1}, \ldots$ сходится к числу 2.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1.$

Теорема X. *Если существуют пределы*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \quad и \quad \lim_{x\to a} f_2(x), \quad причем \quad \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0, \quad то$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)};$$

т. е. *предел частного двух функций равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю.*

Доказательство. Имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim\left(f_1(x)\cdot\frac{1}{f_2(x)}\right)=\lim f_1(x)\lim\left(\frac{1}{f_2(x)}\right)=$$

$$=\lim f_1(x)\frac{1}{\lim f_2(x)}=\frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=0$, то относительно предела частного $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ заранее нельзя сказать, существует ли он, и если существует, то каково его значение. Так, например, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, но $\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке 0. В другом случае имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\lim x=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. В третьем случае имеем: $\lim\limits_{x\to 0} x^2=\lim x^3=0$, но $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^2}{x^3}=\lim\frac{1}{x}=+\infty$.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\lim\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin a}{\cos a}=\operatorname{tg} a \quad \left(\text{где } a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3}{1}=3.$

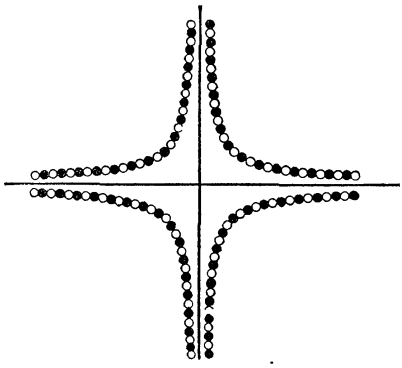
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\lim\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\lim\frac{x+1}{x-3}=\frac{2}{-2}=-1.$

§ 25. Теоремы о бесконечных пределах

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$), *то* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

Доказательство. При всех значениях аргумента в некоторой окрестности U_a точки a имеет место неравенство $f(x) > N$ (или $< -N$), где $N > 0$ — любое заданное число, но тогда в той же окрестности $|f(x)| > N$, ч. т. д.

Следствие. Неравенство $|f(x)| > N$ при любом заданном (как угодно большом) N, выполняющееся в окрестности точки a, показывает, что функция, имеющая бесконечный предел в точке a, не ограничена в окрестности этой точки.



Черт. 119.

Примечание I. Обратная теорема неверна; из условия $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ не следует, что $f(x)$ имеет бесконечный предел в точке a.

Примеры.

1. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$, но

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ различны, а потому $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ не существует.

2. Положим на множестве всех действительных чисел, отличных от нуля,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x\text{—рациональное число}); \\ -\frac{1}{x} & (x\text{—иррациональное число}) \text{ (черт. 119).} \end{cases}$$

Так как $|f(x)| = \frac{1}{|x|}$, то $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to 0+} |f(x)| = \lim\limits_{x\to 0-} |f(x)| = +\infty$.

Однако для $f(x)$ ни один из этих пределов не существует. В самом деле, на множестве рациональных чисел, отличных от нуля, $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$. На множестве иррациональных чисел $f(x) = -\frac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, а $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = +\infty$.

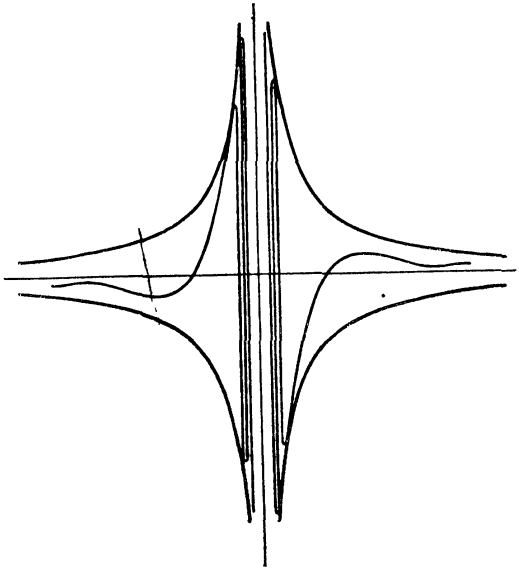
В любой окрестности точки 0 имеются значения аргумента (рациональные), при которых соответствующие точки графика лежат на гиперболе $y = \frac{1}{x}$, а также значения (иррациональные), при которых точки графика лежат на гиперболе $y = -\frac{1}{x}$.

Примечание II. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки a, то отсюда не следует, что

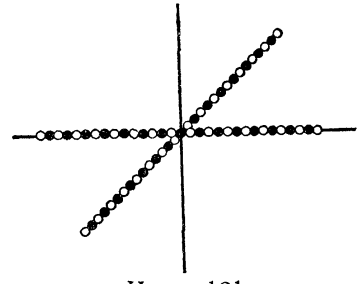
$$\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty$$

Примеры.

1. Положим $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$. На множестве точек $x=\frac{1}{(2k+1)\pi}$ имеем $\cos\frac{1}{x}=-1$, а потому $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}\left|-\frac{1}{x}\right|=+\infty$ (на этом множестве); соответствующие точки графика лежат на гиперболе $y=-\frac{1}{x}$ (черт. 120).



Черт. 120.



Черт. 121.

На множестве точек $x=\frac{1}{2k\pi}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to 0+}f(x)=+\infty;$$

соответствующие точки графика лежат на гиперболе $y=\frac{1}{x}$.

На множестве точек $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ имеем $f(x)=0$, а потому $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim f(x)=0$; соответствующие точки графика лежат на оси абсцисс. Функция $|f(x)|$ не ограничена в окрестности точки 0, но $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ не существует.

2. Функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{(если } x\text{—рациональное число);}\\ x & \text{(если } x\text{—иррациональное число)}\end{cases}$$

не ограничена в окрестности точки $+\infty$, но $|f(x)|$ не имеет в этой точке предела (черт. 121).

Примечание III. Если известно, что $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$ и $f(x)>0$ или $f(x)<0$ для всех значений аргумента $x\in\mathfrak{M}$ в некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, если $f(x)>0$, и $\lim\limits_{x\to v}f(x)=-\infty$, если $f(x)<0$. В самом деле, из неравенства $|f(x)|>N$ в этой окрестности точки a следует $f(x)>N$, если $f(x)>0$, и $f(x)<-N$, если $f(x)<0$.

Теорема II. *Если* $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Доказательство. В некоторой окрестности U_a имеем $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, откуда $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$, ч. т. д.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}|\operatorname{tg}x|=+\infty$; следовательно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}x=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\log_2 x=-\infty$; следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\log_x 2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_2 x}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ (n—натуральное число); следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$.

Теорема III. *Если* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{|f(x)|}=+\infty$.

Разъяснение. Предполагается, что точка a есть предельная для области определения $\dfrac{1}{f(x)}$. Поэтому случай, когда в некоторой окрестности точки a имеем $f(x)=\text{const}=0$, исключается из рассмотрения.

Доказательство. В некоторой окрестности U_a точки a имеем $|f(x)|<\dfrac{1}{N}$, но тогда при $x\in U_a$ получим $\dfrac{1}{|f(x)|}>N$, ч. т. д.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ и $\sqrt{x}>0$; следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

2. Подобным же образом убедимся, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2n}}=+\infty$ (n—натуральное число).

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x^{2n+1}|}=+\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to 0}x^{2n+1}=0$, но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2n+1}}$ не существует, так как

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^{2n+1}}=+\infty,\quad \text{а}\quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^{2n+1}}=-\infty.$$

Теорема IV. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $c \neq 0$ — *данное число, то*

$$\lim_{x\to a} cf(x) = \begin{cases} +\infty \text{ (если } c > 0); \\ -\infty \text{ (если } c < 0). \end{cases}$$

Доказательство. В некоторой окрестности U_a имеем $f(x) > \frac{N}{|c|}$. Из последнего неравенства получим $cf(x) > N$, если $c > 0$, и $cf(x) < -N$, если $c < 0$, ч. т. д.

Предоставляем читателю доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, то

$$\lim_{x\to a} cf(x) = \begin{cases} -\infty \text{ (если } c > 0); \\ +\infty \text{ (если } c < 0). \end{cases}$$

Следствие. Если

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ (или } -\infty),$$

то

$$\lim_{x\to a} [-f(x)] = -\infty \text{ (или } +\infty).$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 = +\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \log_2 \frac{1}{x} = +\infty$, ибо $\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$ и $\lim\limits_{x\to 0} \log_2 x = -\infty$.

Теорема V. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = +\infty$, а *функция* $f_2(x)$ *ограничена снизу в некоторой окрестности точки* a, *то*

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x)] = +\infty.$$

Доказательство. Так как $f_2(x)$ ограничена снизу в окрестности точки a, то существует такое число p и такая окрестность U'_a точки a, что

$$p < f_2(x) \text{ при } x \in U'_a.$$

Из условия $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = +\infty$ следует, что $f_1(x) > N - p$ в некоторой окрестности U''_a. Взяв окрестность U_a, содержащуюся в U'_a и в U''_a, получим $f_1(x) + f_2(x) > N$ при $x \in U_a$, ч. т. д.

Аналогично, *если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = -\infty$, *а функция* $f_2(x)$ *ограничена сверху в окрестности точки* a, *то* $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x)] = -\infty$.

Следствие. Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = +\infty$ (или $-\infty$) и существует предел $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, не равный $-\infty$ (или $+\infty$), то

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = +\infty \text{ (или } -\infty).$$

В самом деле, пусть $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$ (A — число либо $+\infty$), тогда $f_2(x)$ лежит в заданной окрестности U_A точки $A \neq -\infty$, если x лежит в некоторой окрестности U_a точки a. Функция ограничена снизу (так как $p < f_2(x)$, где p — левая граничная точка интервала U_A), а потому можно применить теорему V.

Методом полной индукции нетрудно показать, что если

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim f_2(x) = \ldots = \lim f_n(x) = +\infty \text{ (или } -\infty),$$

то

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)] = +\infty \quad \text{(или } -\infty).$$

Примечание. Если пределы одних слагаемых равны $+\infty$, а других $-\infty$, то о пределе суммы ничего наперед сказать нельзя; существует ли он и если существует, то чему равен. Это показано в приведенных ниже примерах 5, 6, 7 и 8 для суммы двух слагаемых, из которых первое имеет в данной точке предел, равный $+\infty$, а второе $-\infty$.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x) = +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, а $\sin x$ — ограниченная функция.

2. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\operatorname{tg} x+\sin x) = +\infty,$$

ибо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg} x = +\infty \text{ и } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2) = +\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \lim x^2 = +\infty$.

4. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}-\operatorname{tg} x\right) = -\infty,$$

так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = \lim(-\operatorname{tg} x) = -\infty.$$

5. При $x>0$ имеем $\sqrt{x^2+1}>x$, а потому $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$.

Имеем:

$$\lim_{\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

6. Рассмотрим

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-x^2).$$

Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty.$$

Так как $x^3-x^2=x^2(x-1)$, то $x^2>\sqrt{N}$, если $x>\sqrt[4]{N}$, и $x-1>\sqrt{N}$, если $x>1+\sqrt{N}$.

Следовательно,

$$x^2(x-1)>N \text{ при } x>1+\sqrt{N}$$
$$\left(\text{при } N>1 \text{ имеем } 1+\sqrt{N}>\sqrt{N}>\sqrt[4]{N}\right),$$

откуда $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2)=+\infty$.

7. $$\lim_{x\to0+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty;\quad \lim_{x\to0+}\left(x-1-\frac{1}{x}\right)=-\infty,$$

а $$\lim_{x\to0+}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-1-\frac{1}{x}\right)\right]=\lim(2x-1)=-1.$$

8. $$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to0+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty,$$

но

$$\left[\left(\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]=\sin\frac{1}{x},$$

и правый предел суммы в точке 0 не существует.

Теорема VI. *Если* $\lim f_1(x)=+\infty$ *и существует такое число* $p>0$, *что при всех значениях аргумента, принадлежащих некоторой окрестности* U'_a *точки* a, *имеет место неравенство* $f_2(x)>p$, то

$$\lim_{x\to a}f_1(x)\,f_2(x)=+\infty.$$

Доказательство. В некоторой окрестности U''_a будем иметь $f_1(x)>\frac{N}{p}$. Следовательно, в любой окрестности U_a, содержащейся в U'_a и U''_a, получим $f_1(x)\,f_2(x)>N$, ч. т. д.

Следствие. Если $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=A>0$ (где A — число, либо $A=+\infty$) и $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\,f_2(x)=+\infty$.

В самом деле, существует окрестность U_A точки A, не содержащая точки 0, для которой 0 не является также и граничной точкой.

Пусть $p > 0$ — левая граничная точка этой окрестности, тогда при всех значениях аргумента в некоторой окрестности точки a будет иметь место неравенство $f_2(x) > p$. Следовательно, возможно применить теорему VI.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Если

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = +\infty \text{ и } f_2(x) < p < 0, \text{ то } \lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = -\infty.$$

Если

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = -\infty \text{ и } f_2(x) > p > 0, \text{ то } \lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = -\infty.$$

Если

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = -\infty \text{ и } f_2(x) < p < 0, \text{ то } \lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = +\infty.$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\sin x + 2 \geqslant 1$; значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(2+\sin x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1+x^2} = -\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{4}{4+\pi^2} > 0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{1+x^2} = +\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$.

Если числитель и знаменатель дроби $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ в точке a имеют бесконечные пределы: $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \pm\infty$, то о существовании предела частного в общем случае ничего нельзя сказать; в зависимости от вида функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут представиться различные случаи (см. приведенные ниже примеры).

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3+\frac{1}{x}} = \lim \dfrac{1}{x+\frac{1}{x^3}} = 0$, ибо $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1} = \lim\left(x+\dfrac{1}{x^2+1}\right) = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sin x+2)}{x+1}$ не существует. В самом деле,

$$\frac{x(\sin x+2)}{x+1}=(\sin x+2)-\frac{\sin x+2}{x+1}.$$

В точке $+\infty$ предел первого слагаемого не существует, а второго равен нулю.

§ 26. Верхняя и нижняя грани числового множества

Определения. *Числовое множество называется ограниченным сверху, если существует такое число, что каждый элемент данного множества меньше этого числа; в противном случае множество называется неограниченным сверху.*

Если существует такое число, что каждый элемент данного множества больше этого числа, то множество называется ограниченным снизу; в противном случае множество называется неограниченным снизу.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

Множество, неограниченное хотя бы сверху или хотя бы снизу, называется неограниченным.

Если данное множество неограничено, то по крайней мере один из интервалов $(N, +\infty)$ или $(-\infty, -N)$ содержит точки данного множества, каким бы ни было взято число N. Иначе говоря, любая окрестность, по крайней мере одной из точек $+\infty$ или $-\infty$, содержит точки данного множества.

Примеры.

1. Множество всех целых отрицательных чисел, множество всех рациональных отрицательных чисел, равно как и множество всех действительных отрицательных чисел суть множества, ограниченные сверху. Все эти множества не являются ограниченными снизу, потому что не существует такого числа, которое было бы меньше любого числа каждого из этих множеств.

2. Множество чисел вида $\dfrac{n}{n+1}$, где n — натуральное число, ограничено, так как оно является ограниченным сверху и снизу. В самом деле, каждое число этого множества меньше 1 и больше 0.

3. Множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условиям $a\leqslant x\leqslant b$, ограничено, т. е. сегмент есть ограниченное множество.

4. Множество всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x<6$, есть множество, ограниченное сверху и неограниченное снизу.

5. Множество периметров многоугольников, описанных около круга радиуса R, ограничено снизу и неограничено сверху. В самом деле, периметр любого описанного многоугольника больше длины окружности, поэтому данное множество ограничено снизу. Если две соседние точки прикосновения сторон взять достаточно близкими к концу одного и того же диаметра, то длины этих сторон могут быть сделаны как угодно большими, поэтому множество периметров описанных многоугольников неограничено сверху.

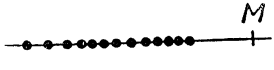
6. Множество периметров многоугольников, вписанных в круг радиуса R, ограничено (периметр всякого вписанного многоугольника меньше длины окружности и больше нуля).

7. Множество значений функции $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ограничено $\left(0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1\right)$.

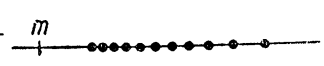
8. Множество значений функции $\operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ неограничено (сверху и снизу).

9. Интервал (a, b) есть ограниченное множество.

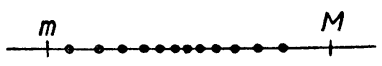
Если числовое множество $\mathfrak{M}$ ограничено сверху, (то согласно определению) существует такое число M, что для любого числа $x \in \mathfrak{M}$ выполняется неравенство $x < M$. Геометрически ограниченное сверху числовое множество изображается множеством точек числовой прямой, расположенных левее точки M (черт. 122).



Черт. 122.



Черт. 123.



Черт. 124.

Подобным же образом множество точек, изображающих ограниченное снизу числовое множество, расположено правее некоторой точки m (черт. 123).

Все точки множества, изображающего ограниченное числовое множество, принадлежат сегменту $[m, M]$ (черт. 124), где число M есть любое число, большее, а m — любое число, меньшее каждого числа $x \in \mathfrak{M}$.

Обозначим через p наибольшее из чисел $|m|$ и $|M|$, тогда для любого числа x данного ограниченного множества $\mathfrak{M}$ выполняется неравенство $|x| < p$.

Определение. *Верхней гранью множества чисел называется число* β, *обладающее следующими свойствами*:

1° *нет ни одного числа множества, большего* β;

2° *каково бы ни было положительное число* ε, *существует хоть одно число* x *множества, удовлетворяющее условиям*

$$\beta - \varepsilon < x \leqslant \beta.$$

Нижней гранью данного множества называется число α, *обладающее следующими свойствами*;

1° *нет ни одного числа множества, меньшего* α:

2° *существует хотя бы одно число* x *множества, удовлетворяющее условиям*

$$\alpha \leqslant x < \alpha + \varepsilon.$$

Верхняя грань множества $\mathfrak{M}$ обозначается символом $\sup \mathfrak{M}$, а нижняя грань — символом $\inf \mathfrak{M}$ *.

---

* sup и inf — сокращения латинских слов: superior (верхний) и inferior (нижний).

Если среди чисел множества $\mathfrak{M}$ существует наибольшее (наименьшее) число, то это число является верхней (нижней) гранью множества. Если среди чисел данного множества, имеющего верхнюю (нижнюю) грань, не существует наибольшего (наименьшего), то в любой окрестности верхней (нижней) грани $\beta = \sup \mathfrak{M}$ (или $\alpha = \inf \mathfrak{M}$) содержатся числа данного множества, все эти числа меньше (больше) β (или α). В последнем случае β (или α) есть предельная точка для $\mathfrak{M}$. Не исключена возможность, что верхняя грань β является наибольшим числом данного множества и вместе с тем его предельной точкой.

Если множество $\mathfrak{M}$ не ограничено сверху (снизу), то не существует никакого действительного числа, являющегося верхней (нижней) гранью $\mathfrak{M}$. В этом случае принято считать верхнюю (нижнюю) грань бесконечной $\sup \mathfrak{M} = +\infty$ (соответственно $\inf \mathfrak{M} = -\infty$).

Примеры.

В примере 1 (стр. 119) для множества всех рациональных отрицательных чисел число $\beta = \sup \mathfrak{M} = 0$. В самом деле,

1° число 0 больше любого числа множества;

2° в любой окрестности точки 0 существуют отрицательные рациональные числа.

В данном примере $\inf \mathfrak{M} = -\infty$.

В примере 2 имеем $\beta = 1$. Это очевидно, ибо любое число $\frac{n}{n+1}$ данного множества меньше 1:

$$\frac{n}{n+1} < 1 \text{ и } \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Легко проверить, что $1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon$, если $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Рассматриваемое множество не имеет наибольшего числа, так как для всякого числа $\frac{n}{n+1}$ существует большее число, принадлежащее данному множеству. В качестве такого числа можно взять $\frac{n+1}{n+2}$ $\left(\text{имеем } \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0\right)$. В этом примере $\inf \mathfrak{M} = \frac{1}{2}$ (при $n = 1$) есть наименьшее число данного множества.

В примере 3 $\sup \mathfrak{M} = b$, $\inf \mathfrak{M} = a$, числа b и a являются наибольшим и наименьшим числами сегмента и вместе с тем его предельными точками.

В примере 4 $\sup \mathfrak{M} = 6$ есть наибольшее число, $\inf \mathfrak{M} = -\infty$.

В примере 5 $\sup \mathfrak{M} = +\infty$.

В примере 6 $\sup \mathfrak{M} = 2\pi R$. В самом деле, как известно из геометрии, длина окружности $2\pi R$ больше периметра любого вписанного многоугольника, и существуют многоугольники, периметры которых отличаются от $2\pi R$ меньше чем на заданное число $\varepsilon > 0$.

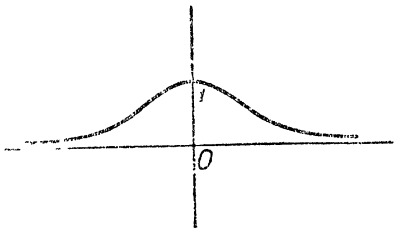
В примере 7 множество значений функции $\frac{1}{1+x^2}$ содержит наибольшее число $f(0) = 1$, а потому $\sup \mathfrak{M} = 1$. В данном примере $\inf \mathfrak{M} = 0$. В самом

деле, $0<\frac{1}{x^2+1}$ и $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$; следовательно, при всех достаточно больших значениях $|x|$ будем иметь $0<\frac{1}{x^2+1}<\varepsilon$ (черт. 125). Наименьшего значения функция $\frac{1}{x^2+1}$ не имеет (число нуль не принадлежит множеству значений функции).

В примере 8 $\sup \mathfrak{M}=+\infty$, $\inf \mathfrak{M}=-\infty$.

В примере 9 интервал (a, b) не содержит ни наибольшего, ни наименьшего числа. В данном примере $\sup \mathfrak{M}=b$, $\inf \mathfrak{M}=a$.

Ниже мы приводим пример ошибки, в которую можно впасть, допустив без надлежащего обоснования, что среди бесконечного ограниченного множества чисел существует наибольшее число. Речь будет идти о попытке Лежандра доказать постулат Евклида о параллельных линиях.



Черт. 125.

Не пользуясь аксиомой Евклида о параллельных (пятым постулатом), Лежандр доказал, что сумма углов треугольника не больше π и что если для какого-либо треугольника сумма углов равна π, то она равна π и для всякого треугольника. Утверждение, что сумма углов треугольника равна π, равносильно пятому постулату Евклида.

Пусть ABC есть треугольник с наибольшей суммой углов $\alpha<\pi$. Разобьем треугольник ABC на два треугольника ABD и DBC; сумма углов каждого из этих треугольников не превосходит α, а потому для суммы углов обоих треугольников ABD и DBC, равной $\alpha+\pi$, получим:

$$\alpha+\pi\leqslant 2\alpha,$$

откуда $\pi\leqslant\alpha$, что невозможно.

Постулат Евклида не следует из прочих аксиом геометрии, и «доказательство» Лежандра содержит ошибку. Эта ошибка допущена в утверждении, что существует треугольник с наибольшей суммой углов. В геометрии Лобачевского сумма углов всякого треугольника меньше π, но существуют треугольники с суммой углов, как угодно мало отличающейся от π. Таким образом, π является верхней гранью для множества сумм углов треугольников в плоскости Лобачевского.

Теорема. *Для всякого ограниченного сверху числового множества существует верхняя грань; эта грань единственна.*

Для всякого ограниченного снизу числового множества существует нижняя грань; эта грань единственна.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть множество $\mathfrak{M}$ ограничено сверху: тогда существует такое число P, что любое число $x\in\mathfrak{M}$ меньше P. Число P можно считать целым (так, например, всегда можно вместо P взять число $[P]+1$). Обозначим через $p+1$ наименьшее целое число, большее всех чисел данного множества: $x<p+1$, если $x\in\mathfrak{M}$.

Таким образом, в множестве $\mathfrak{M}$ найдется хотя бы одно число x большее или равное p. Следовательно, сегмент $[p, p+1]$ содержит хотя бы одну точку данного множества.

Разделим сегмент $[p,\ p+1]$ на 10 равных по длине сегментов:

$$\left[p,\ p+\frac{1}{10}\right],\ \left[p+\frac{1}{10},\ p+\frac{2}{10}\right],\ \ldots,\ \left[p+\frac{9}{10},\ p+1\right].$$

Пусть $p+\frac{p_1+1}{10}$ — наименьшее из чисел

$$p;\ \ p,1:\ \ p,2;\ \ \ldots\ \ p,\ \ 9;p+1$$

большее всех чисел множества $\mathfrak{M}$. Тогда в множестве $\mathfrak{M}$ существует хотя бы одно число $x\geqslant p+\frac{p_1}{10}$; следовательно, сегмент $\left[p+\frac{p_1}{10},\ p+\frac{p_1+1}{10}\right]$ содержит хотя бы одну точку данного множества. Разделив этот сегмент на 10 равных частей, получим сегмент

$$\left[p+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{100},\ \ p+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2+1}{100}\right],$$

содержащий хотя бы одну точку множества $\mathfrak{M}$, и такой, что любое число $x\in\mathfrak{M}$ меньше, чем $p+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2+1}{100}$. Описанный процесс деления сегмента можно продолжать неограниченно.

В результате k-го шага получится сегмент, по величине равный $\frac{1}{10^k}$ и содержащий хотя бы одну точку данного множества, но справа от этого сегмента нет ни одной точки множества $\mathfrak{M}$. Бесконечная десятичная дробь

$$p,\ p_1p_2p_3\ldots p_n\ldots$$

определяет действительное число β. Левый конец n-го сегмента, т. е. $p,\ p_1p_2\ldots p_n$, служит приближенным значением числа β по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$*. Правый конец этого сегмента служит приближенным значением β по избытку с той же точностью. Каким бы малым ни было заданное число $\varepsilon>0$, при достаточно большом n соответствующий сегмент содержится в ε-окрестности точки β.

В самом деле, так как длина n-го сегмента равна $\frac{1}{10^n}$ и $\lim\frac{1}{10^n}=0$, то при всех достаточно больших значениях n будем иметь $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$, и, следовательно,

$$\beta-\varepsilon<p+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n}{10^n}\leqslant\beta\leqslant p+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n+1}{10^n}<\beta+\varepsilon.$$

* Не исключена возможность, что $\beta=p,\ p_1p_2\ldots p_n$.

Из свойств построенных сегментов следует, что любая окрестность $(\beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon)$ точки β содержит точки множества $\mathfrak{M}$ (хотя бы одну), но вправо от этой окрестности нет ни одной точки данного множества.

Число β *есть верхняя грань. В самом деле:*

1° *Нет ни одного числа* $x\in\mathfrak{M}$, *большего* β.

Допустим, что хотя бы одно такое число x существует. Рассмотрим любую окрестность $(\beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon)$, не содержащую x; точка x лежит правее этой окрестности, что невозможно.

2° *Любая окрестность* $(\beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon)$ *содержит точки* (*хотя бы одну*) *множества* $\mathfrak{M}$; *все числа* $x\in\mathfrak{M}$, *лежащие в этой окрестности, не больше* β.

$$\beta-\varepsilon<x\leqslant\beta.$$

Следовательно, $\beta=\sup\mathfrak{M}$.

Докажем, что β есть единственная верхняя грань множества $\mathfrak{M}$. Предположим, что существуют две различные верхние грани β и β_1. Пусть, например, $\beta_1<\beta$, но тогда интервал $(\beta_1,\ \beta)$ должен содержать хотя бы одну точку x данного множества: $\beta_1<x<\beta$ (свойство 2°). Следовательно, число β_1 не может быть верхней гранью (свойство 1°), ч. т. д.

Существование единственной нижней грани α множества, ограниченного снизу, можно доказать аналогичными рассуждениями (предоставляем это читателю).

Можно свести доказательство существования нижней грани к доказательству существования верхней грани множества, ограниченного сверху.

Обозначим через $\mathfrak{M}^-$ множество чисел, противоположных числам данного множества $\mathfrak{M}$. Так как множество $\mathfrak{M}$ ограничено снизу, то существует такое число p, что $p<x$, если $x\in\mathfrak{M}$, но тогда $-x<-p$, если $-x\in\mathfrak{M}^-$, т. е. $\mathfrak{M}^-$ ограничено сверху. Пусть $-\alpha=\sup\mathfrak{M}^-$. Следовательно, любой полуинтервал $(-\alpha-\varepsilon,\ -\alpha]$ содержит числа $-x$ множества $\mathfrak{M}^-$, но не существует чисел $-x\in\mathfrak{M}^-$ вправо от этого полуинтервала. Переходя к противоположным числам, получим:

1° любой полусегмент $[\alpha,\ \alpha+\varepsilon)$ содержит числа множества $\mathfrak{M}$,

2° не существует чисел данного множества влево от точки α.

Следовательно,

$$\alpha=\inf\mathfrak{M}.$$

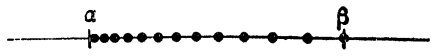
Верхняя и нижняя грани числового множества характеризуются следующим свойством.

Верхняя (*нижняя*) *грань есть наименьшее* (*наибольшее*) *действительное число, не меньшее* (*не большее*) *любого числа данного множества.*

Если числовое множество $\mathfrak{M}$ ограничено, то оно ограничено и сверху, и снизу, а потому для него существуют верхняя грань β и нижняя грань α. *Все точки множества* $\mathfrak{M}$ *расположены на сегменте* $[\alpha,\ \beta]$, ибо для всякого числа $x\in\mathfrak{M}$ имеют место неравенства

$$\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

Сегмент $[\alpha, \beta]$ есть наименьший сегмент, содержащий все точки множества $\mathfrak{M}$. Если хотя бы немного сузить этот сегмент, то вне его окажутся точки множества $\mathfrak{M}$ (хотя бы одна) (черт. 126).



Черт. 126.

Примеры.

1. Для множества чисел вида $\frac{n}{n+1}$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ таким сегментом является сегмент $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
2. Для множества, состоящего из трех чисел 1, 2, 5, — сегмент [1,].
3. Для множества всех правильных дробей — сегмент [0, 1].
4. Для множества значений функции $\sin x$ — сегмент $[-1, 1]$.

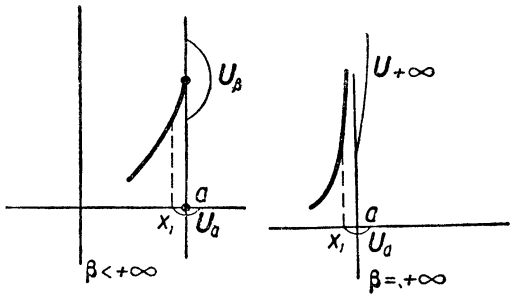
§ 27. Предел монотонной функции

Рассмотрим функцию $f(x)$ на множестве значений аргумента, меньших (бóльших) a, причем будем предполагать, что точка a является предельной для этого множества.

Теоремы.

1° *Если функция $f(x)$ монотонна в некоторой окрестности точки a на множестве значений аргумента, меньших a, то существует (конечный или бесконечный) левый предел* $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

2° *Если функция $f(x)$ монотонна в некоторой окрестности точки a на множестве значений аргумента, больших a, то существует (конечный или бесконечный) правый предел* $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$.



Черт. 127.

Доказательство. Докажем, например, утверждение 1° в предположении, что функция $f(x)$ является неубывающей в некоторой окрестности точки a (где a — действительное число или $a=\pm\infty$) на множестве значений аргумента, меньших a.

Возможны два случая:

1. $f(x)$ ограничена сверху (черт. 127, левый), тогда существует конечная верхняя грань значений данной функции: $\sup f(x)=\beta$. Следовательно, существует значение функции $f(x_1)$ — такое, что $0<\beta-f(x_1)<\varepsilon$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\beta$. Действительно, функция $f(x)$ не убывает на множестве значений аргу-

мента, принадлежащих интервалу (x_1, a). Следовательно, при любом значении аргумента, удовлетворяющем условию $x_1 < x < a$, имеем $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant \beta$. Точку x_1 можно рассматривать как левую граничную точку некоторой окрестности U_a точки a.

Значит, $|f(x) - \beta| < \varepsilon$, если $x \in U_a$ и $x < a$, а потому

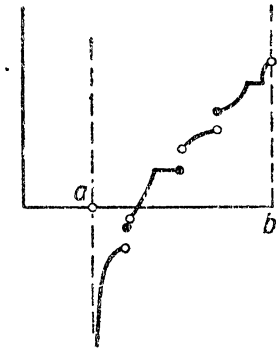
$$\lim_{x \to a-} f(x) = \beta.$$

2. Если $f(x)$ не ограничена сверху, то существует значение $f(x_1)$ данной функции — такое, что $f(x_1) > N$ (где N — любое заданное число). При любом значении аргумента, удовлетворяющем условию $x_1 < x < a$, имеем $N < f(x)$. Значит, $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = +\infty$ (черт. 127, правый).

Если функция $f(x)$ не возрастает слева от a, то $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ конечен, если $f(x)$ ограничена снизу, и $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$, если $f(x)$ не ограничена снизу (доказательство аналогично).

Доказательство утверждения 2° предоставляем учащимся.

Следствие I. Если функция $f(x)$ монотонна в интервале (a, b), то она имеет конечные односторонние пределы в каждой точке этого интервала и конечные или бесконечные односторонние пределы в граничных точках a и b.



Черт. 128.

Пусть, например, $f(x)$ не убывает. Рассмотрим произвольную точку $c \in (a, b)$. В любой окрестности $(c - \delta, c + \delta)$, содержащейся в (a, b), имеем (в силу монотонности):

$$f(c - \delta) < f(x) < f(c + \delta), \text{ где } c - \delta < x < c + \delta;$$

значит, функция $f(x)$ ограничена в δ-окрестности точки c. На основании доказанной теоремы существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to c-} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to c+} f(x).$$

Эти пределы могут быть различными (черт. 128).

Следствие II. В частности, всякая *монотонная последовательность*

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \qquad \{s_n\}$$

имеет конечный или бесконечный предел

Если последовательность $\{s_n\}$ неубывающая

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots$$

и ограниченная $(s_n < P)$, то она имеет конечный предел, т. е. является сходящейся. Если неубывающая последовательность неограничена, то она расходится к $+\infty$.

Если невозрастающая последовательность

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_n \geqslant \ldots$$

ограничена ($p < s_n$), *то она сходится*. Если невозрастающая последовательность неограничена, то она расходится к $-\infty$.

Примеры монотонных последовательностей.

1. Докажем, что последовательность

$$s_1 = \sqrt{2},\ s_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ s_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},\ \ldots,\ s_n = \underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ раз}}$$

сходится. Непосредственно ясно, что $\{s_n\}$ возрастает и ограничена. В самом деле, $1 < \sqrt{2} < 2$, поэтому $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} < 2$; следовательно, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} < 2$ и т. д.; $s_{n-1} < s_n < 2$.

Предел этой последовательности обозначается так:

$$s = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

2. Рассмотрим последовательность:

$$s_1 = \sqrt{a},\ s_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}};\ s_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}};\ \ldots$$

$$s_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}} = \sqrt{a+s_{n-1}};\ \ldots \text{ (где } a > 0).$$

Докажем, что существует предел этой последовательности. Из построения последовательности видно, что она является возрастающей. Докажем, что существует число, большее всех членов данной последовательности. Из равенства

$$s_n = \sqrt{a+s_{n-1}} \quad \text{получим} \quad s_n^2 = a + s_{n-1},$$

откуда

$$s_n = \frac{a}{s_n} + \frac{s_{n-1}}{s_n}.$$

Так как

$$s_{n-1} < s_n \quad \text{то} \quad s_n < \frac{a}{s_n} + 1.$$

Принимая во внимание, что $s_n > \sqrt{a}$, получим $s_n < \sqrt{a} + 1$; поэтому данная последовательность ограничена, а значит, в силу монотонности, существует конечный предел $\lim s_n$.

Для нахождения этого предела воспользуемся равенством: $s_n^2 = s_{n-1} + a$, и фактом существования предела s_n. Обозначим $\lim s_n = l$, тогда будем иметь также $\lim s_{n-1} = l$, откуда $l^2 = l + a$. Взяв положительный корень этого уравнения, находим:

$$l = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

($s_n > 0$, а потому и $l > 0$).

Предел $\lim s_n$ обозначается так: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}$
Согласно полученному результату, можем написать:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

§ 28. Число e

Теорема. *Функция* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *имеет в точке* $+\infty$ *конечный предел.*

Доказательство. Рассматривая данную функцию на множестве всех натуральных чисел

$$x=1, 2, \dots, n, \dots,$$

мы получим последовательность

$$(1+1)^1, \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

Докажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная. В самом деле,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{n-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^2}+\dots+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^{k-1}}+\dots+\frac{1}{n^n}=$$
$$=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Итак, выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ представлено в виде суммы n положительных слагаемых; большему значению n соответствует сумма с бо́льшим количеством слагаемых, а также большее значение каждой из скобок $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... Значит, рассматриваемая последовательность возрастает.

Так как (при $k>2$)

$$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1 \text{ и } \frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}<\frac{1}{2^{k-1}},$$

то имеем неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3.$$

Значит, рассматриваемая последовательность ограничена, а поэтому имеет конечный предел.

Этот предел обозначается буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Пусть x — любое действительное число, большее 1, положим $[x]=n$. Тогда имеем: $n \leqslant x < n+1$ и

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}[x] = \lim\ n = +\infty,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = e$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

Следовательно, в силу теоремы III о неравенствах (стр. 101), получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ ч. т. д.}$$

Функция, заданная формулой $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, определена для всех значений x, для которых $1+\frac{1}{x} > 0$. Последнее неравенство справедливо, если $x > 0$ или $x < -1$. Следовательно, область определения функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ состоит из двух интервалов $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ также равен e. В самом деле, положим $x = -z$, тогда окрестности $-\infty < x < -N$ точки $-\infty$ соответствует окрестность $N < z < +\infty$ точки $+\infty$ (и обратно). Имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to+\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} = \lim\left(\frac{z}{z-1}\right)^z =$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = e.$$

Число e принимается в математическом анализе за основание логарифмов. Логарифмы, взятые при этом основании, называются натуральными и обозначаются следующим образом:

$$\log_e x = \ln x.$$

Число e можно элементарными средствами вычислить с любой степенью точности, для чего представим выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ в виде суммы двух слагаемых следующим образом:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left[2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)+\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{(k+1)(k+2)\ldots n}\right].$$

Для второго слагаемого имеем следующую оценку:

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{(k+1)(k+2)\ldots n}\right]<$$
$$<\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right]<$$
$$<\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{k!}\,\frac{1}{(k+1)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)}=\frac{1}{k\cdot k!}.$$

Таким образом, мы получаем систему неравенств:

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left[2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]<\frac{1}{k\cdot k!}.$$

Рассматривая среднюю часть этой системы неравенств как функцию аргумента n и переходя к пределу (в точке $n=+\infty$), получим неравенство*:

$$0<e-\left(2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\right)<\frac{1}{k!\,k}.$$

Таким образом, сумма

$$2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}$$

* Нетрудно показать, что при переходе к пределу ни одно из предыдущих неравенств не обращается в равенство (предоставляем доказательство учащимся в виде упражнения).

может служить приближенным значением числа e с точностью до $\frac{1}{kk!}$.

Полагая, например, $k=10$, получим:

$$e=2{,}718281 \text{ с точностью до } \frac{1}{10!\,10}<0{,}0000001.$$

Более точными вычислениями можно найти следующее значение для числа e:

$$e=2{,}718281828459045\ldots$$

Можно показать, что число e является иррациональным.

В самом деле, число $e\sim 2{,}7$ заключено между числами 2 и 3; значит, если число e рациональное, то оно дробное. Предположим, что $e=\frac{p}{q}$ $(q>1)$. В таком случае, положив $k=q$, получим:

$$0<q!\,q\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)\right]<1$$

или

$$q\left[eq!-\left(q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\right)\right]<1, \qquad (1)$$

но

$$eq!=\frac{p}{q}\cdot q!=p\,(q-1)!$$

Вычитаемое разности, находящейся в скобках, будучи суммой целых чисел, есть число целое, а потому вся эта разность есть целое число. Следовательно, левая часть неравенства (1) должна быть натуральным числом, большим 1. Полученное противоречие показывает, что действительное число e не может быть рациональным; следовательно, оно является иррациональным.

Более подробные исследования показывают, что e является трансцендентным числом. Трансцендентными числами называются числа, не удовлетворяющие никакому алгебраическому уравнению

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

с рациональными коэффициентами (где $a_0\neq 0$).

§ 29. Принцип стягивающихся сегментов

Теорема. *Если две числовые последовательности*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad \{a_n\}$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots \qquad \{b_n\}$$

удовлетворяют следующим условиям:

1° *последовательность* $\{a_n\}$ *не убывает;*

2° *последовательность* $\{b_n\}$ *не возрастает;*

3° *при всех значениях* n *имеет место неравенство:* $a_n\leqslant b_n$;

4° $\lim(b_n-a_n)=0$,

то при выполнении перечисленных условий существуют пределы $\lim a_n$ *и* $\lim b_n$ *и имеет место равенство*:

$$\lim a_n = \lim b_n.$$

Условия 1°, 2°, 3° можно записать так:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1.$$

Доказательство. Пределы $\lim a_n$ и $\lim b_n$ существуют. В самом деле, первая последовательность монотонна и ограничена, ибо при всех значениях n имеем $a_n \leqslant b_1$; вторая последовательность также монотонна и ограничена: $a_1 \leqslant b_n$. Значит, обе последовательности сходятся.

Пусть $\xi = \lim a_n$ и $\eta = \lim b_n$; из неравенства $a_n \leqslant b_n$ следует: $\lim a_n \leqslant \lim b_n$ или $\xi \leqslant \eta$. Докажем, что $\xi = \eta$. Достаточно доказать, что неравенство $\xi < \eta$ не может иметь места. В самом деле, так как ξ и η суть соответственно верхняя и нижняя грани для множеств чисел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, то $a_n \leqslant \xi$ и $b_n \geqslant \eta$, откуда $b_n - a_n \geqslant \eta - \xi$.

Предположение, что $\eta > \xi$, находится в противоречии с условием 4° теоремы. Следовательно, $\xi = \eta$, ч. т. д.

Число ξ есть единственное, удовлетворяющее неравенствам $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$ при всех значениях n.

В самом деле, предположим, что существуют два различные числа η и η_1, удовлетворяющие неравенствам

$$a_n \leqslant \eta < \eta_1 \leqslant b_n.$$

В пределе получим неравенства:

$$\lim a_n \leqslant \eta < \eta_1 \leqslant \lim b_n.$$

Отсюда, вопреки доказанному, $\lim a_n < \lim b_n$.

Две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определяют последовательность сегментов, в которой:

1° всякий последующий сегмент содержится в предыдущем:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

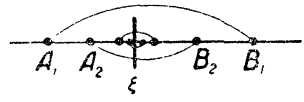
2° $$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Всякая последовательность сегментов, удовлетворяющая условиям 1° и 2°, называется последовательностью стягивающихся сегментов.

Из доказанного следует, что *для всякой последовательности стягивающихся сегментов существует единственная точка, принадлежащая каждому сегменту последовательности* (принцип стягивающихся сегментов).

Геометрическая интерпретация. Будем изображать члены двух данных последовательностей при помощи соответствую-

щих точек числовой прямой. Рассмотрим отрезок, левым и правым концами которого являются точки A_n и B_n, соответствующие числам a_n и b_n. Данным последовательностям соответствует последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ... Из неравенств $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ следует, что всякий последующий отрезок $[A_{n+1}, B_{n+1}]$ содержится в предыдущем $[A_n, B_n]$ или, в крайнем случае, совпадает с предыдущим. Условие 4° показывает, что длина отрезка A_nB_n имеет пределом 0.



Черт. 129.

Таким образом, данной последовательности числовых сегментов на прямой соответствует последовательность стягивающихся отрезков, имеющих одну единственную общую точку (черт. 129).

В элементарной математике принцип стягивающихся сегментов играет исключительно важную роль. Вспомним, как определяется длина окружности. Пусть p и P — периметры правильного вписанного и описанного многоугольников. Процесс неограниченного удвоения сторон этих многоугольников приводит к двум последовательностям периметров:

$$p, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

$$P, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

Эти периметры удовлетворяют условиям

$$p \leqslant p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots \leqslant P_n \leqslant \ldots \leqslant P_1 \leqslant P$$

и $\lim (P_n - p_n) = 0$.

Следовательно, существует общий предел двух последовательностей периметров $\lim P_n = \lim p_n = l$. Этот общий предел и рассматривается как длина окружности. Принцип стягивающихся сегментов положен в основу определения площадей поверхностей и объемов тел вращения.

Примеры.

1. Последовательности

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}, \ldots, \frac{2^{n-1}-1}{2^n}, \ldots$$

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \ldots, \frac{2^{n-1}+1}{2^n}, \ldots$$

имеют общий предел $\frac{1}{2}$; соответствующие сегменты суть

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right], \left[\frac{7}{16}, \frac{9}{16}\right], \ldots$$

2. При вычислении $\sqrt{2}$ получаются две последовательности приближенных значений по недостатку и избытку:

1; 1,4; 1,41; ... и 2; 1,5; 1,45; ...

Эти последовательности образуют систему стягивающихся сегментов.

3. Рассмотрим две последовательности:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \ldots,\ \frac{2n-1}{2n},\ \ldots$$

и

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots$$

Общим пределом этих последовательностей является число 1.

Соответствующие сегменты

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right],\ \left[\frac{3}{4}, 1\right],\ \ldots,\ \left[\frac{2n-1}{2n}, 1\right],\ \ldots$$

имеют в качестве единственной общей точки правый конец — точку 1.

Примечание. В применении к последовательностям интервалов теорема, аналогичная принципу стягивающихся сегментов, не имеет места. Достаточно привести хотя бы один пример.

Интервалы

$$(0,1) \supset \left(0, \frac{1}{2}\right) \left(0, \frac{1}{3}\right) \supset \ldots \supset \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

вложены один в другой, однако не существует точки, принадлежащей всем интервалам данной последовательности. В самом деле, заменим все эти интервалы сегментами:

$$[0,1],\ \left[0, \frac{1}{2}\right],\ \ldots,\ \left[0, \frac{1}{n}\right],\ \ldots$$

Все эти сегменты имеют одну общую граничную точку 0, но граничные точки не принадлежат интервалам.

Чтобы теорема была справедлива для последовательности интервалов, достаточно потребовать, чтобы каждый последующий интервал лежал строго внутри предыдущего:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

§ 30. Критерий Коши

Теорема, известная под названием «критерия Коши», дает необходимое и достаточное условие существования конечного предела функции в данной точке.

Теорема. *Для существования конечного предела* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом заданном числе* $\varepsilon > 0$ *существовала такая окрестность* U *точки* a, *что неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

выполняется для любых двух значений аргумента x_1 *и* x_2, *принадлежащих окрестности* U_a:

$$x_1 \in U_a \text{ и } x_2 \in U_a,$$

где a *есть предельная точка того множества* $\mathfrak{M}$ *на котором рассматривается функция* $f(x)$ *(как обычно, считаем, что точка* a *не принадлежит* $\mathfrak{M}$*).*

Условие необходимо. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq \pm\infty$, тогда существует такая окрестность U_a точки a, что

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого значения аргумента $x \in U_a$. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента в окрестности U_a, тогда

$$|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но

$$f_1(x) - f_2(x) = (f(x_1) - A) + (A - f(x_2)),$$

значит,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)|,$$

а потому

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие Коши.

Условие достаточно. В силу условия теоремы Коши, существует такая окрестность U_ε точка a, что образы любых двух отличных от a значений аргумента x_1 и x_2, лежащих в U_ε, отстоят друг от друга на расстоянии, меньшем ε:

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \tag{1}$$

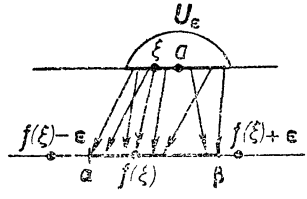
Пусть ξ — произвольно выбранное значение аргумента, принадлежащее U_ε, и пусть x — любое значение аргумента, лежащее в U_ε, $x \in U_\varepsilon$.

Неравенство (1) перепишется в виде:

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon, \tag{2}$$

или, что то же,

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon.$$



Черт. 130.

Эти неравенства показывают следующее:

1° *функция* $f(x)$ *ограничена в окрестности точки* a;

2° *при любом значении* $\varepsilon > 0$ *существуют сегмент* $[f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon]$ *и окрестность* U_ε *точки* a — *такие, что множество значений функции* $f(x)$ *для значений аргумента, содержащихся в* U_ε, *содержится на этом сегменте* (черт. 130).

Обозначим через α и β нижнюю и верхнюю грани значений $f(x)$ в окрестности U_ε. Сегмент $[\alpha, \beta]$ является наименьшим сегментом,

содержащим множество всех значений функции $f(x)$ при $x \in U_\varepsilon$. Из неравенства (2) следует, что

$$f(\xi) - \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant f(\xi) + \varepsilon, \text{ т. е. } \beta - \alpha \leqslant 2\varepsilon.$$

Мы не исключаем и того предельного случая, когда сегмент $[\alpha, \beta]$ вырождается в точку; в этом случае $\beta = \alpha = f(x) = \text{const}$ для любого значения $x \in U_\varepsilon$.

Итак, существует такая окрестность U_ε точки a, что наименьший сегмент, содержащий образы всех значений аргумента, лежащих в U_ε, имеет длину, меньшую 2ε.

Рассмотрим какую-либо убывающую, сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел, положим, например,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{10}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{100}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{10^n}, \quad \ldots$$

По доказанному, существует такая окрестность $U_a^{(1)}$, что наименьший сегмент $[\alpha_1, \beta_1]$, содержащий все значения функции при $x \in U_a^{(1)}$, меньше, чем $2\varepsilon_1$. Будем рассматривать функцию $f(x)$ на части данного множества $\mathfrak{M}$, содержащейся в окрестности $U_a^{(1)}$. Тогда существует $U_a^{(2)} \subset U_a^{(1)}$ — такая, что наименьший сегмент $[\alpha_2, \beta_2]$, содержащий все значения функции при $x \in U_a^{(2)}$, меньше (по длине), чем $2\varepsilon_2$. Так как $U_a^{(2)} \subset U_a^{(1)}$, то $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$.

Далее построим такую окрестность $U_a^{(3)}$ и такой сегмент $[\alpha_3, \beta_3]$, что:

$$U_a^{(1)} \supset U_a^{(2)} \supset U_a^{(3)}; \quad [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset [\alpha_3, \beta_3] \text{ и } \beta_3 - \alpha_3 < 2\varepsilon_3.$$

Неограниченное продолжение этого процесса приведет к двум последовательностям вложенных окрестностей и стягивающихся сегментов:

$$U_a^{(1)} \supset U_a^{(2)} \supset \ldots \supset U_a^{(n)} \supset \ldots$$

и

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \ldots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \ldots$$

При $x \in U_a^{(n)}$ имеем $f(x) \in [\alpha_n, \beta_n]$ и $\beta_n - \alpha_n < \frac{2}{10^n}$.

Согласно принципу стягивающихся сегментов, существует единственная точка A, принадлежащая всем сегментам построенной последовательности

$$\alpha_n \leqslant A \leqslant \beta_n.$$

Докажем, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. В самом деле, при всех достаточно больших значениях n будем иметь:

$$\beta_n - \alpha_n \leqslant 2\varepsilon_n < \varepsilon.$$

Числа $f(x)$ и A, как принадлежащие одному тому же сегменту $[a_n, \beta_n]$, отличаются друг от друга по абсолютной величине меньше, чем на ε, а потому

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{если} \quad x\in U_a^{(n)}, \quad \text{т. е} \quad \lim_{x\to a} f(x)=A,$$

ч. т. д.

Следствие. В применении к последовательностям критерий Коши дает необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Для сходимости последовательности

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$|s_m-s_n|<\varepsilon$$

выполнялось при всех значениях m и n, бо́льших некоторого числа N, определяемого заданием ε.

В самом деле, в данном случае окрестность U точки a есть интервал $(N, +\infty)$, и условия $x_1\in U$ и $x_2\in U$ принимают вид $m>N$ и $n>N$.

Примеры.

1. Рассмотрим функцию x^2 в окрестности точки 2. Ограничимся 1-окрестностью, т. е. интервалом (1,3). Имеем:

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|x_2-x_2|\,|x_2+x_1|,$$

но так как x_2 и x_1 расположены в интервале (1,3), то $|x_2+x_1|<6$. Для любых значений x_1 и x_2 в произвольной окрестности точки 2, радиус которой не превосходит наименьшего из чисел 1 и $\frac{\varepsilon}{6}$, будем иметь $|x_2^2-x_1^2|<$ $<\frac{\varepsilon}{6}\cdot 6=\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ существует (о существовании этого предела мы знали ранее, здесь же мы имели в виду иллюстрировать принцип Коши на знакомом примере).

2. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Образуем последовательность

$$s_1=\frac{1}{2};\ s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4};\ \ldots;\ s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n},\ \ldots$$

Покажем, что для этой последовательности выполнено условие Коши, т. е. для любых двух значений индекса n: n_1 и n_2, принадлежащих некоторой N-окрестности точки $+\infty$, имеет место неравенство $|s_{n_2}-s_{n_1}|<\varepsilon$.

Выполняя элементарные преобразования, получим:

$$s_{n_1}=1-\frac{1}{2^{n_1}} \quad \text{и} \quad s_{n_2}=1-\frac{1}{2^{n_2}},$$

откуда

$$|s_{n_2}-s_{n_1}|=\left|\frac{1}{2^{n_1}}-\frac{1}{2^{n_2}}\right|,$$

Предположим для определенности, что через n_1 обозначено меньшее из чисел n_1 и n_2; тогда имеем:

$$|s_{n_2}-s_{n_1}|=\frac{1}{2^{n_1}}\left|1-\frac{1}{2^{n_2-n_1}}\right|<\frac{1}{2^{n_1}}.$$

Пусть n_1 — любое число, большее $N=\log_2\frac{1}{\varepsilon}$; тогда $2^{n_1}>\frac{1}{\varepsilon}$, отсюда $|s_{n_2}-s_{n_1}|<\varepsilon$. Это неравенство справедливо при любых n_1 и n_2, больших N.

3. Рассмотрим последовательность

$$0{,}24;\ 0{,}23;\ 0{,}224;\ 0{,}223;0{,}2224;\ 0{,}2223\ \ldots$$

Докажем, что эта последовательность имеет предел. Пусть N — любое натуральное число, взятое при условии $\frac{1}{10^N}<\varepsilon$.

Возьмем член последовательности $\overbrace{0{,}22\ \ldots\ 23}^{N-1\text{ раз}}$ (это член номера $2N$). Какие бы мы два члена последовательности номера, большего, чем $2N$, ни взяли, разность этих двух членов по абсолютной величине меньше ε. В самом деле, всякие два члена последовательности номера $n>2N$, выражаются десятичными дробями, у которых первые N-десятичных знаков наверное одни и те же. *Значит, всякие два такие числа отличаются на число, меньшее* $\frac{1}{10^N}$.

Итак, при любом $\varepsilon>0$ найдется такая окрестность точки $+\infty$, что при любых p и q, больших $2N$, имеем $|s_p-s_q|<\frac{1}{10^N}<\varepsilon$.

Условия критерия Коши выполняются, а потому последовательность сходится.

4. Покажем, что последовательность

$$s_1=1;\ s_2=1+\frac{1}{2^2};\ s_3=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2};\ \ldots$$

$$s_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2};\ \ldots$$

сходится. Рассмотрим разность s_q-s_p, где для определенности будем считать, что $q>p$:

$$|s_q-s_p|=\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\ldots+\frac{1}{q^2}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)\,k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

получим:

$$|s_q-s_p|<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)+\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{1}{p}.$$

Итак, $|s_q - s_p| < \frac{1}{p}$ при любом значении $q > p$. Поэтому, если $q > p > \frac{1}{\varepsilon}$, то

$$|s_q - s_p| < \varepsilon, \tag{1}$$

т. е. неравенство (1) выполняется при любых p и q в $\frac{1}{\varepsilon}$-окрестности точки $+\infty$. Значит данная последовательность сходится.

5. Последовательность

$$s_1 = 1;\ s_2 = 1 + \frac{1}{2};\ \ldots;\ s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};\ \ldots$$

расходится к $+\infty$ (см. стр. 87); покажем, что условие Коши нарушается. Рассмотрим

$$|s_q - s_p| = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{q} > \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q} = \frac{q-p}{q}.$$

Каким бы большим мы ни взяли число p, число q можно взять еще бо́льшим, так чтобы частное $\frac{q-p}{q}$ могло быть как угодно близким к 1. Если, например, положим $q = 2p$, то будем иметь:

$$|s_{2p} - s_p| > \frac{1}{2}.$$

Этого достаточно, чтобы видеть, что модуль $|s_p - s_p|$ не может быть сделан меньшим любого заданного числа $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях p и q.

6. Как мы знаем, функция $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке 0. В любой окрестности точки 0 найдутся такие x_1 и x_2, что

$$f(x_1) = 1 \text{ и } f(x_2) = -1 \quad \left(\text{где } x_1 = \frac{1}{2k\pi},\ x_2 = \frac{1}{(2k+1)\pi}\right).$$

Выбрав число $\varepsilon > 0$ меньшим, чем число 2, получим:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = 2 > \varepsilon.$$

Условие критерия Коши нарушается.

7. Как известно, функция $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ имеет предел в точке 0; покажем, что в окрестности этой точки выполняется критерий Коши.

Имеем: $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant x$; следовательно,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \left|x_2\sin\frac{1}{x_2}\right| + \left|x_1\sin\frac{1}{x_1}\right| \leqslant |x_2| + |x_1|.$$

В $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности точки 0 имеем:

$$|x_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |x_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда: $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

§ 31. Определение предела по Гейне

Теорема. *Для существования предела (конечного или бесконечного) функции $f(x)$ в точке a на множестве $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности значений аргумента*

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots, \qquad \{x_n\}$$

состоящей из точек множества $\mathfrak{M}$ и имеющей предел, равный a:

$$\lim x_n = a,$$

существовал предел соответствующей последовательности

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \qquad \{f(x_n)\}$$

значений функции *.

Доказательство. Условие необходимо. Если существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то на любой части $\mathfrak{M}_1$ (для которой a — предельная точка) множества $\mathfrak{M}$ предел $f(x)$ также равен A. Последовательность $\{x_n\}$ есть часть множества $\mathfrak{M}$, для которой a является предельной точкой, а потому имеем (в частности) $\lim f(x_n) = A$.

Условие достаточно. Предположим, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ и $\lim x_n = a$ соответствующая последовательность значений функции имеет предел. Докажем, что существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где функция $f(x)$ рассматривается на всем множестве $\mathfrak{M}$. Предположим противное, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует. Пусть $\{x'_n\}$ — какая-либо вполне определенная последовательность, имеющая предел, равный a:

$$\lim x'_n = a \quad (\text{где } x'_n \in \mathfrak{M}).$$

По условию (в частности), существует предел с оответствующей последовательности значений функции $\lim f(x'_n) = A$. Так как по предположению $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, то имеется окрестность U_A точки A, обладающая следующим свойством: в любой окрестности U_a точки a существуют значения аргумента $x \in \mathfrak{M}$, для которых соответствующие значения функции $f(x)$ не содержатся в окрестности U_A. Если a — действительное число, то взяв любую убывающую, сходящуюся к нулю последовательность действительных чисел:

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n > \ldots \text{ и } \lim \delta_n = 0,$$

---

* Как обычно, считается, что точка a не включается в $\mathfrak{M}$, а потому $x_n \neq a$ ни при каком значении n.

рассмотрим соответствующую последовательность окрестностей точки a:

$$U_1=(a-\delta_1,\ a+\delta_1),\ U_2=(a-\delta_2,\ a+\delta_2),\ \ldots,$$
$$U_n=(a-\delta_n,\ a+\delta_n),\ \ldots$$

Если $a=+\infty$ (или $-\infty$), то, взяв любую возрастающую, расходящуюся к $+\infty$ последовательность положительных чисел:

$$N_1<N_2<\ldots<N_n,\ \ldots \text{ и } \lim N_n=+\infty,$$

положим:

$$U_1=(N_1,\ +\infty),\ U_2=(N_2,\ +\infty),\ \ldots,\ U_n=(N_n,\ +\infty),\ \ldots$$

[или соответственно $U_n=(-\infty,\ -N_n)$].

Таким образом, мы получим последовательность вложенных окрестностей

$$U_1\supset U_2\supset U_3\supset\ldots\supset U_n\supset\ldots \qquad \{U_n\}$$

точки a.

В окрестности U_1 найдется точка x_1'' (хотя бы одна), образ которой $f(x_1'')$ не содержится в окрестности U_A. То же можно сказать про U_2, U_3 и т. д. Вообще в каждой окрестности U_n может быть выбрана точка x_n'', образ которой $f(x_n'')$ не содержится в окрестности U_A. Значит, для последовательности значений функции

$$f(x_1''),\ f(x_2''),\ \ldots,\ f(x_n''),\ \ldots \qquad \{f(x_n'')\}$$

A не может быть пределом. Последовательность

$$x_1'',\ x_2'',\ \ldots,\ x_n''\ \ldots \qquad \{x_n''\}$$

имеет предел, равный a, ибо в силу построения последовательности окрестностей $\{U_n\}$ любая заданная окрестность U_a точки a при достаточно большом n содержит окрестность U_n (и все последующие окрестности), а вместе с U_n в U_a содержатся и все точки x_n'' при достаточно большом n. Так как, по предположению, существует предел функции по любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, взятой при условии $\lim x_n=a$, то, в частности, существует предел $\lim f(x_n'')=B\neq A$. Составим третью последовательность значений аргумента, положив

$$x_1=x_1',\quad x_2=x_1'',\ \ldots,\ x_{2n-1}=x_n',\quad x_{2n}=x_n''\ \ldots$$

Имеем:

$$\lim x_n=a.$$

По предположению, существует предел $\lim f(x_n)$, но, с другой стороны, этот предел не может существовать, так как по двум различным частям последовательности $\{x_n\}$, именно по $\{x_n'\}$ и по $x_n''\}$, функция имеет различные пределы. Итак, мы получим

противоречие, предположив, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, чем и доказано существование предела функции $f(x)$ в точке a, ч. т. д.

Полученное условие, будучи необходимым и достаточным условием существования предела функции в точке, может быть принято в качестве определения понятия предела. Подробно это определение Гейне формулируется следующим образом.

Определение Гейне. *Точка A есть предел последовательности*

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots,$$

если, какова бы ни была заданная окрестность U_A точки A, существует число N — такое, что $s_n \in U_A$ при всех значениях n, больших N, т. е. $n > N$.

Функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный A, если, какова бы ни была последовательность значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, где $x_n \neq a$, имеющая предел, равный a:

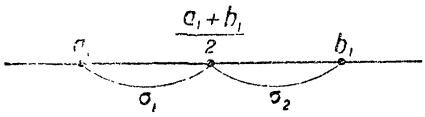
$$\lim x_n = a,$$

соответствующая последовательность значений функции имеет предел, равный A.

В силу доказанной теоремы, это определение Гейне эквивалентно первоначально принятому определению предела Коши. В концепции Гейне отправным пунктом является понятие предела последовательности, тогда как понятие предела функции является производным понятием.

§ 32. Принцип предельных точек

Теорема. (Принцип предельных точек.) *Для всякого бесконечного ограниченного числового множества существует хотя бы одна предельная точка.*



Черт. 131.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — данное бесконечное ограниченное множество. В силу ограниченности $\mathfrak{M}$, существует сегмент $[a_1, b_1]$, содержащий все точки данного множества:

$a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, если $x \in \mathfrak{M}$ (черт. 131).

Разделим сегмент $[a_1, b_1]$ на два равные (по длине) сегмента:

$$\sigma_1 = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right].$$

По крайней мере один из сегментов σ_1 и σ_2 (а может быть, и оба) содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$.

В самом деле, если на каждом сегменте σ_1 и σ_2 содержится конечное число точек множества $\mathfrak{M}$, то и все множество $\mathfrak{M}$ состоит из конечного числа точек, что противоречит условию теоремы. Обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из сегментов σ_1 и σ_2, который содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Если оба сегмента σ_1 и σ_2 содержат бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$, то через $[a_2, b_2]$ можно обозначить любой из этих двух сегментов. Далее, разделим сегмент $[a_2, b_2]$ пополам и (повторяя предыдущие рассуждения) обозначим через $[a_3, b_3]$ ту из половин сегмента $[a_2, b_2]$, которая содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$.

Неограниченное продолжение этого процесса приведет к последовательности стягивающихся сегментов.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \qquad (1)$$

Длина n-го сегмента равна $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$, а потому $\lim (b_n - a_n) = 0$. Каждый из сегментов полученной последовательности содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Согласно принципу стягивающихся сегментов, существует точка p, содержащаяся во всех сегментах последовательности (1).

Точка p является предельной для множества $\mathfrak{M}$. В самом деле, в любой окрестности $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ точки p содержится бесконечное множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$, так как эта окрестность содержит все сегменты последовательности (1), имеющие достаточно большой номер n. Так, при $b_n - a_n = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ будем иметь:

$$p - \varepsilon < a_n \leqslant p \leqslant b_n < p + \varepsilon, \quad \text{ч. т. д.}$$

Если множество $\mathfrak{M}$ не является ограниченным, то хотя бы одна из точек $\pm\infty$ является предельной, поэтому для произвольных ограниченных или неограниченных множеств принцип предельных точек можно сформулировать в следующем виде:

Всякое бесконечное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку, являющуюся либо действительным числом, либо точкой $+\infty$ *или* $-\infty$. Принцип предельных точек не решает вопроса о числе предельных точек данного множества, он лишь утверждает существование хотя бы одной предельной точки (примеры см. на стр. 68).

Предельная точка p множества $\mathfrak{M}$, получаемая описанным процессом деления промежутка, *может принадлежать, а может и не принадлежать данному множеству* $\mathfrak{M}$. *Предельные точки множества* $\mathfrak{M}$, *содержащегося на сегменте* $[a, b]$, *принадлежат*

этому сегменту. В самом деле, достаточно малая окрестность любой внешней точки сегмента не содержит точек множества $\mathfrak{M}$, а потому внешняя точка не может быть предельной.

Предельные точки последовательности. Под предельной точкой последовательности

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

будем подразумевать точку p, удовлетворяющую следующему условию: *какова бы ни была заданная окрестность U_p точки p, существует бесконечное множество значений индекса n, для которых соответствующие члены последовательности содержатся в данной окрестности*: $s_n \in U_p$.

Предельная точка последовательности может не быть предельной точкой множества, изображающего члены данной последовательности. Так, например, члены последовательности

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

изображаются множеством, состоящим из двух точек 0 и 1; это множество (как конечное) не имеет предельных точек. Однако обе точки 0 и 1 надлежит считать предельными точками данной последовательности. Так, например, при всех четных $n = 2k$ имеем $s_{2k} = 0$. Следовательно, для бесконечного множества значений $n\,(n = 2k)$ член s_n содержится в любой заданной окрестности точки 0 (будучи ее центром).

Чтобы устранить указанное расхождение, условимся всякую точку k, для которой $s_{n_1} = s_{n_2} = \ldots = k$ при бесконечном множестве значений $n = n_1, n_2, \ldots$, считать «бесконечно кратной», совпадающей с бесконечным множеством членов данной последовательности.

Принцип предельных точек для последовательностей имеет ту же формулировку, что и для множеств. *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну (конечную) предельную точку.*

Доказательство применимо без изменения, если считать, что всякий промежуток, содержащий бесконечно кратную точку, содержит бесконечное множество точек (совпавших) данной последовательности.

Примеры.

1. Последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots$$

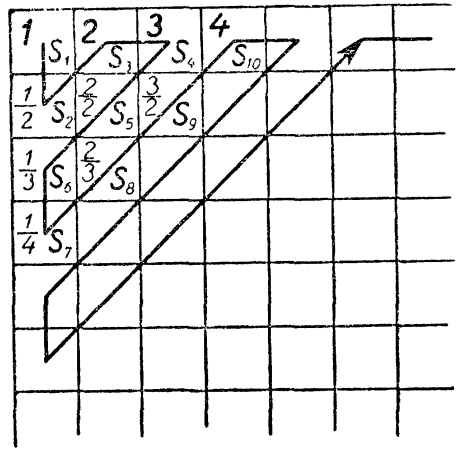
имеет две предельные точки 0 и 1.

2. Последовательность

$$0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots, 0, n, \ldots$$

имеет две предельные точки 0 и $+\infty$.

3. Построим пример последовательности, для которой множество предельных точек заполняет полусегмент $[0, +\infty)$. Последовательность $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{1}{2}$, $s_3 = 2, \ldots$, построенная согласно «диагональной схеме», содержит все положительные рациональные числа. Но для множества положительных рациональных чисел любая точка $a \geqslant 0$ является предельной.



Диагональная схема

ГЛАВА III

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 33. Приращения аргумента и функции

Пусть a есть некоторое данное значение аргумента функции $f(x)$.

Определение. *Разность $h = x - a$ называется приращением аргумента в точке a;*
разность

$$k = f(x) - f(a)$$

называется приращением функции $f(x)$ в точке a (где x обозначает произвольное значение аргумента).

Приращения аргумента и функции принято обозначать также символами Δx и Δy:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a).$$

Любое значение аргумента x может быть представлено в виде суммы $x = a + h$, где h — соответствующее приращение. Заметим, что $\Delta x > 0$, если $x > a$, что $\Delta x < 0$, если $x < a$, и что $\Delta x = 0$, если $x = a$.

Аналогично, любое значение функции может быть представлено в виде суммы ее значения в какой-либо данной точке a и соответствующего приращения:

$$f(x) = f(a) + \Delta y.$$

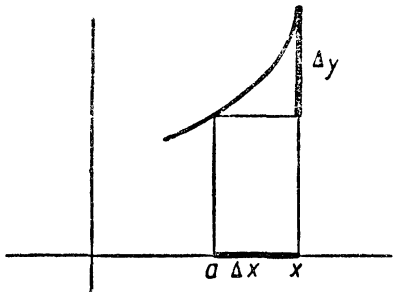
Геометрически приращения аргумента и функции изображены на чертеже 132.

Примеры.

1. Если $f(x)$ есть возрастающая функция, то при $x>a$, т. е. $x-a>0$, имеем $f(x)>f(a)$, т. е. $f(x)-f(a)>0$; если же $x-a<0$, то и

$$f(x)-f(a)<0.$$

Итак, для возрастающей функции приращение аргумента и приращение функции имеют одинаковый знак. Для убывающей функции знаки этих приращений противоположны.



Черт. 132.

2. $f(x)=x^2-2x+2$; имеем:

$$f(a+h)=(a+h)^2-2(a+h)+2,$$

откуда

$$f(a+h)-f(a)=2ah+h^2-2h.$$

Итак, $k=h^2+2h(a-1)$.

Если $k=5$ и $h=1$, то $a=\frac{k-h^2}{2h}+1=3$.

Если $a=2$ и $k=15$, то $h^2+2h-15=0$, откуда $h_1=3$, $h_2=-5$; значит, следует положить $x=2+3=5$ или $x=2-5=-3$, чтобы приращение функции в точке 2 равнялось 15.

§ 34. Функции, непрерывные в точке

В вычислительной практике нередко для нахождения значения функции при данном значении аргумента с заданной степенью точности заменяют значение аргумента некоторым его приближенным значением и вычисляют соответствующее значение функции. Так, например, вместо данного иррационального значения аргумента берут его приближенные рациональные значения в виде конечных десятичных дробей. Этот прием может применяться, если заранее известно, что приращение функции (т. е. допускаемая ошибка) может быть сделано как угодно малым по абсолютной величине для всех достаточно малых приращений аргумента. Этим свойством (непрерывность) обладает не всякая функция. Так, например, невозможно с любой степенью точности вычислить значение функции Дирихле в точке $\sqrt{2}$, заменяя $\sqrt{2}$ его рациональными приближенными значениями. В самом деле, $\chi(\sqrt{2})=0$, но в любой рациональной точке r имеем $\chi(r)=1$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если предел функции в точке a равен значению функции в этой точке, т. е. если*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Так как $f(a)$ (будучи значением функции) есть некоторое действительное число, то функция $f(x)$, непрерывная в точке a, имеет конечный предел в этой точке, равный $f(a)$.

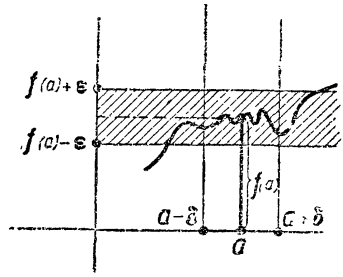
Определение непрерывности в данной точке можно сформулировать посредством неравенств следующим образом, не прибегая (явно) к понятию предела:

Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, являющейся предельной точкой для множества значений аргумента, если, каким бы малым ни было наперед заданное число $\varepsilon > 0$, существует такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (1)$$

имеет место при всех значениях аргумента, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta.$$



Черт. 133.

Заметим, что неравенство (1) для функции, непрерывной в точке a, выполняется и в самой точке $x = a$, так что нет надобности исключать точку a из того множества, на котором рассматривается $f(x)$.

Определению непрерывности можно придать и другую форму. Разность $f(x) - f(a)$ есть приращение функции Δy в точке a, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - a$; следовательно, условие непрерывности функции $f(x)$ в точке a может быть записано посредством следующих неравенств:

$$|\Delta y| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |\Delta x| < \delta$$

(число $\delta > 0$ определяется заданием ε). Значит, для функции, непрерывной в точке a, имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Примечание. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не имеет смысла, т. е. если a не есть предельная точка множества значений аргумента, то говорить о непрерывности $f(x)$ в точке a не имеет смысла с точки зрения принятого определения.

Геометрическая интерпретация. Какой бы узкой ни была полоса, ограниченная прямыми

$$y = f(a) + \varepsilon \quad \text{и} \quad y = f(a) - \varepsilon,$$

существует такое число δ, что все точки графика функции $y = f(x)$ для значений $x \in (a - \delta, a + \delta)$ содержатся внутри этой полосы (черт. 133).

Примеры.

1. Функция $\sqrt[n]{x}$ непрерывна в любой точке a, принадлежащей области ее определения, так как

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$ (см. § 20).

2. Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в любой точке $a \neq 0$, так как

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a},$$

3. Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны в любой точке интервала $(-\infty, +\infty)$, так как

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a.$$

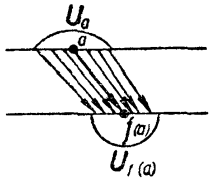
4. Трехчлен x^2+3x+4 есть непрерывная функция в любой точке, так как

$$\lim_{x \to a} (x^2+3x+4) = \lim x^2 + \lim 3x + \lim 4 = a^2+3a+4.$$

§ 35. Отображение с помощью непрерывных функций

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

В силу определения предела, *при любой заданной окрестности* $U_{f(a)}$ *точки* $f(a)$ *существует окрестность* U_a *точки* a *— такая, что*



Черт. 134.

$$f(x) \in U_{f(a)}, \text{ если } x \in U_a.$$

Итак, образы всех значений аргумента, содержащихся в окрестности U_a, содержатся в окрестности (заданной) $U_{f(a)}$ образа точки a (черт. 134).

Такое отображение называется непрерывным в точке a. Следовательно, *функция, непрерывная в точке* a, *осуществляет отображение, непрерывное в этой точке.*

§ 36. Точки разрыва. Разрывные функции

Определение. *Если точка* a *является предельной для области определения функции* $f(x)$ *и если условие непрерывности*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

не выполняется, то точка a *называется точкой разрыва функции* $f(x)$, *а функция* $f(x)$ *называется разрывной в точке* a.

Условие непрерывности может не выполняться, если:

I. *Не существует конечный предел* $f(x)$ *в точке* a;

II. *Точка* a *не принадлежит области определения функции* (тогда $f(a)$ не имеет смысла);

III. *Существует конечный предел функции в точке* a, *не равный значению функции в точке* a:

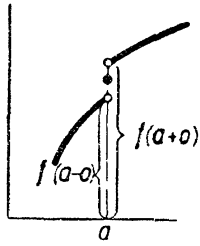
$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a).$$

Отметим нижеследующие типы точек разрыва.

1° Если существуют правый и левый конечные пределы функции $f(x)$ в точке a и если эти пределы различны:

$$f(a+0) \neq f(a-0),$$

то точка a называется точкой разрыва первого рода (черт. 135).



Черт. 135.

Так как

$$\lim_{x\to a+} f(x) \neq \lim_{x\to a-} f(x),$$

то функция $f(x)$ в точке разрыва первого рода не имеет предела. Сама точка a может принадлежать, а может и не принадлежать области определения функции.

Примеры.

1. Положим

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & (x>0); \\ -1 & (x<0). \end{cases}$$

В точке 0

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0-} f(x)=-1;$$

точка 0 есть точка разрыва первого рода, значение $f(0)$ не существует.

2. Положим $f(x)=[x]$. В точке n (где n—целое число)

$$f(n)=n, \quad \lim_{x\to n+} f(x)=n, \quad \lim_{x\to n-} f(x)=n-1.$$

Точка n есть точка разрыва первого рода (см. черт. 28).

3. Положим $f(x)=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ (стр. 36, пример 5). Имеем:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x)=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x)=-\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) \text{ не существует.}$$

Точка $\frac{\pi}{2}$ есть точка разрыва первого рода.

2° Функция, имеющая бесконечный предел в точке a (a — действительное число), является разрывной в этой точке.

Примеры.

1. Положим $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$; точка 0 есть точка разрыва (см. черт. 96).

2. Положим $f(x)=\log_2 x$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} \log_2 x=-\infty$. Точка 0 есть точка разрыва (см. черт. 98).

3° Функция $f(x)$ в точке a имеет различные односторонние пределы, причем хотя бы один из них бесконечен.

Примеры.

1. $f(x)=\operatorname{tg} x$. Имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x=-\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x=+\infty \text{ (черт. 136).}$$

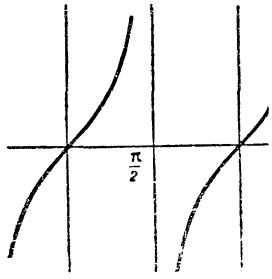
Точка $\frac{\pi}{2}$ есть точка разрыва.

2.
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (\text{если } x>0); \\ x & (\text{если } x\leqslant 0 \text{ (черт. 137).} \end{cases}$$

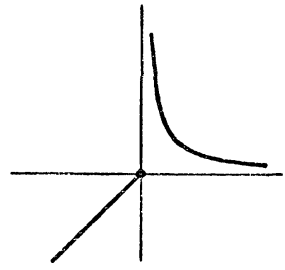
Имеем:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to 0-} f(x)=0.$$

Точка 0 есть точка разрыва.



Черт. 136.



Черт. 137.

4° Хотя бы один из односторонних пределов не существует. Такая точка разрыва называется обычно точкой разрыва второго рода. В этом случае не существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Примеры.

1. Функция

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

имеет в точке 0 разрыв второго рода (см. черт. 89).

2. Для функции Дирихле каждая точка является точкой разрыва второго рода.

3. Функция

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x} & (x>0); \\ 0 & (x\leqslant 0) \end{cases}$$

имеет точку 0 точкой разрыва второго рода, ибо не существует ни конечного, ни бесконечного предела в точке 0.

4. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x<0); \\ -x & (x\leqslant 0) \end{cases}$$

имеем $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ не существует; точка 0 есть точка разрыва второго рода (см. черт. 113).

5° Существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, но $A\neq f(a)$.

В этом случае точка a является точкой разрыва (черт. 138).

Примеры.

1. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 0);\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

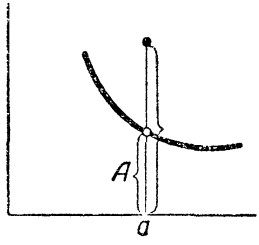
имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, но $f(0)=1$; точка 0 есть точка разрыва. График представлен на чертеже 139.

2.

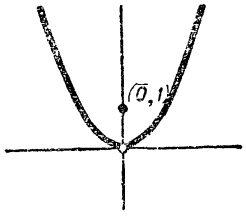
$$f(x)=(\operatorname{sign} x)^2=\begin{cases}1 & (\text{если } x\neq 0);\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

(см. черт. 32). Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ и $f(0)=0$.

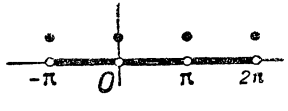
3. Рассмотрим функцию $f(x)=[|\cos x|]$; если $x\neq k\pi$ (k — целое число), то $|\cos x|<1$, а значит $[|\cos x|]=f(x)=0$; если $x=k\pi$, то $f(x)=[|\cos k\pi|]=1$.



Черт. 138.



Черт. 139.



Черт. 140.

Графиком данной функции является ось абсцисс с «вынутыми» точками $x=k\pi$, которые подняты вверх на расстояние, равное единице (черт. 140).

В каждой точке $x=k\pi$ имеем $\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)=0$, $f(k\pi)=1$. Точки $k\pi$ суть точки разрыва.

4. Положим на полусегменте $[0, +\infty)$

$$f(x)=\begin{cases} x & (\text{если } x>0);\\ 1 & (\text{если } x=0).\end{cases}$$

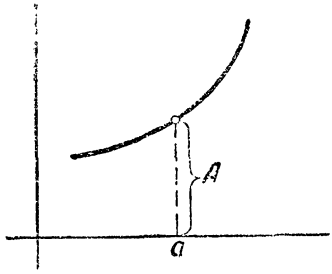
Имеем: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$, $f(0)=1$; $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ не имеет смысла. Точка 0 есть точка разрыва.

6° Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, но точка a не принадлежит области определения функции $f(x)$, то точка a есть точка разрыва (черт. 141). Рассмотрим функцию $F(x)$, опре-

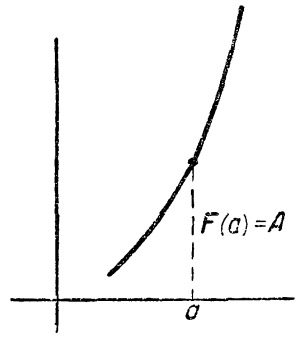
деленную следующим законом соответствия:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) \text{ (если } x\neq a); \\ A \text{ (если } (x=a) \text{ (черт. 142).} \end{cases}$$

Функции $F(x)$ и $f(x)$ различны, так как различны области их определения. Функция $F(x)$ равна $f(x)$ во всей области определения $f(x)$ и непрерывна в точке a. Иначе говоря, функция $f(x)$ есть $F(x)$, рассматриваемая на множестве значений аргумента, отличных от a.



Черт. 141.



Черт. 142.

Принято для функции $F(x)$ не вводить особого обозначения, а говорить, что $F(x)$ *есть продолжение функции* $f(x)$ *по непрерывности* (путем соглашения считать $f(a)=A$).

В этом случае a называется точкой устранимого разрыва.

Если функция $f(x)$ *задана формулой без специального указания области ее определения и если при непосредственной подстановке* $x=a$ *формула теряет смысл, но существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то принято всегда (если нет особого указания) применять принцип продолжения по непрерывности и считать*

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x).$$

Примеры.

1. $$f(x)=\frac{\sin x}{x} \quad (\text{где } x\neq 0).$$

Имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, но $f(0)$ не существует; точка 0 есть точка устранимого разрыва. Если применить принцип продолжения, положив $f(0)=1$, то получим функцию, непрерывную в точке 0.

2. $$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim (x^2+2x+4) = 12;$$

положив $f(2)=12$, имеем: $f(x)=x^2+2x+4$, при всех значениях x.

3. $$f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}} = 0;$$

следовательно, положив $f(0)=0$, имеем; $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4. $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ (ибо $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, а $\cos\frac{1}{x}$ есть ограниченная функция); следовательно, положив $f(0)=0$ (см. черт. 118), получим функцию, непрерывную в точке 0.

§ 37. Теоремы о функциях, непрерывных в данной точке

Действия над непрерывными функциями. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то (в силу определения) она имеет в этой точке конечный предел. Следовательно, к непрерывным функциям применимы теоремы о конечных пределах.

Во всех теоремах, в которых совместно рассматриваются несколько функций, непрерывных в некоторой точке a, предполагается, что a является предельной точкой для множества, на котором рассматриваются данные функции.

Теорема. *Если в окрестности точки a функция $f(x)$ постоянна, т. е.*

$$f(x) = \text{const} = f(a),$$

то $f(x)$ непрерывна в точке a.

Доказательство. В самом деле, пусть в окрестности точки a имеем $f(x)=C$, тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$, но так как $f(a)=C$, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \text{ ч. т. д.}$$

Теорема. 1° *Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ непрерывны в точке a, то любая их линейная комбинация, а также их произведение непрерывны в точке a.*

2° *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке a и $f_2(a)\neq 0$, то частное $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ есть непрерывная функция в точке a.*

3° *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то функция $|f(x)|$ также непрерывна в точке a.*

Доказательство 1°. Положим:

$$\varphi(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x).$$

Имеем:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)] =$$

$$= c_1 \lim f_1(x) + c_2 \lim f_2(x) + \ldots + c_n \lim f_n(x) =$$

$$= c_1 f_1(a) + c_2 f_2(a) + \ldots + c_n f_n(a);$$

но так как $\varphi(a) = c_1 f_1(a) + c_2 f_2(a) + \ldots + c_n f_n(a)$,

то $$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a).$$

В частности, *сумма непрерывных функций в точке a есть непрерывная функция в точке a.*

Аналогично, положив

$$\varphi(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x),$$

получим:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] =$$

$$= \lim f_1(x) \lim f_2(x) \ldots \lim f_n(x) = \varphi(a).$$

В частности, если $f(x)$ непрерывна в точке a, то функция $\varphi(x) = [f(x)]^n$ (n — натуральное число) также непрерывна в точке a.

2° Имеем:

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} = \frac{f_1(a)}{f_2(a)}.$$

3° Имеем:

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim f(x)| = |f(a)|, \text{ ч. т. д.}$$

Примеры.

1. Функция $[x]$ непрерывна в любой точке интервала $(n, n+1)$, ибо в этом интервале $[x] = \text{const} = n$. В концах интервала функция $[x]$ разрывна.

2. Функции x^2, x и $\frac{1}{x}$ непрерывны в любой точке $a \neq 0$. Значит, и функция $x^2 + x + \frac{1}{x}$ непрерывна в любой точке $a \neq 0$.

3. Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ непрерывны в любой точке; значит, многочлен $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ (являющийся их линейной комбинацией) также непрерывен в любой точке.

4. Нижеследующие функции непрерывны как суммы, произведения и степени непрерывных функций:

a) $\sin^n x$, $\cos^n x$ (n — натуральное число) в любой точке;

b) $x + \sin x$, $x \sin x$, $x^2 \cos x$ в любой точке;

c) $2 \sin x + \operatorname{tg}^2 x$ в любой точке $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

5. Нижеследующие функции непрерывны как частные непрерывных функций:

a) $\frac{x-1}{x}$ в любой точке $x \neq 0$;

b) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ в любой точке, в которой $\sin x \neq 0$, т. е. при $x \neq k\pi$.

c) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ в любой точке $x \neq \pm 1$;

d) $\frac{1}{x-\sin x}$ в любой точке $x \neq 0$, так как $|x| \geqslant |\sin x|$ и $x - \sin x \neq 0$, если $x \neq 0$;

e) $\frac{x}{\sin x}$ в любой точке $x \neq k\pi$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

В точке 0 (в силу принципа продолжения) функция непрерывна ибо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Непрерывность сложной функции.

Теорема. *Если точка a является предельной для области определения сложной функции $f(\varphi(x))$ и функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$, то функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(u)$ в точке b, выполняется условие:

$$f(u) \in U_{f(b)}, \text{ если } u \in U_b.$$

В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$ в точке a, имеем:

$$\varphi(x) \in U_b, \text{ если } x \in U_a;$$

следовательно,

$$f(\varphi(x)) \in U_{f(b)}, \text{ если } \quad x \in U_a.$$

Значит,

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f(b) = f(\varphi(a)), \quad \text{ч. т. д.}$$

Примеры.

1. Функция $\sin x^2$ непрерывна в любой точке, так как она может быть представлена в виде сложной функции:

$$f(\varphi(x)), \quad \text{где } f(u) = \sin u \text{ и } \varphi(x) = x^2$$

непрерывны в любой точке.

2. Аналогично устанавливается непрерывность следующих функций.

a) $\sin \frac{1}{x}$ в любой точке $x \neq 0$;

b) $\sqrt{\cos x}$ в любой точке области определения;

c) $\operatorname{tg} x^2$ в любой точке $x^2 \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, т. е. $x \neq \pm \sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi}$.

3. Рассмотрим функцию $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. Положим $f(u)=\operatorname{tg} u$ и $\varphi=\frac{1}{x}$. Точки разрыва функции $\operatorname{tg} u$ суть $u=\frac{2k+1}{2}\pi$. Эти значения функция $u=\frac{1}{x}$ имеет при $x=\frac{2}{2k+1}\pi$. Функция $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ разрывна в точке 0.

Следовательно, функция $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ (по теореме о непрерывности сложной функции) непрерывна во всех точках, кроме, быть может, точек 0 и $\frac{2}{2k+1}\pi$.

Нетрудно убедиться, что в указанных точках данная функция разрывна.

Примечание. Доказанные теоремы дают лишь достаточные (но не необходимые) условия непрерывности суммы, произведения, частного и сложной функции.

Примеры.

1. Функцию $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ можно рассматривать как произведение функций:

$$f_1(x)=x \text{ и } f_2(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x} & (\text{если } x\neq 0);\\ 0 & (\text{если } x=0).\end{cases}$$

Покажем, что $f(x)$ непрерывна в любой точке; в самом деле, если $x\neq 0$, то оба множителя непрерывны. Если $x=0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $f(0)=0$. Итак, функция $f(x)$ непрерывна, хотя второй множитель не является непрерывной функцией в точке 0.

2. Сумма $[x]+\{x\}=x$ непрерывна в любой точке, хотя каждое слагаемое $[x]$ и $\{x\}$ ($\{x\}$—дробная часть) есть разрывная функция в точках $x=n$, где n—целое число.

3. Рассмотрим функцию Дирихле. Сложная функция $\chi(\chi(x))=1=\text{const}$, а потому непрерывна в каждой точке. Вместе с тем функция $\chi(x)$ разрывна в любой точке. Итак, из непрерывности сложной функции $f(\varphi(x))$ не следует непрерывность функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

4. Функция

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{—рациональное число});\\ -1 & (x\text{—иррациональное число})\end{cases}$$

разрывна в любой точке; функция $[f(x)]^2=\text{const}=1$ непрерывна в любой точке.

Локальные свойства непрерывных функций.

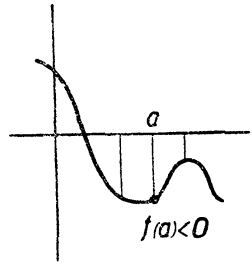
Теорема I. *Если функция непрерывна в точке a, то она ограничена в достаточно малой окрестности точки a.*

В самом деле, всякая функция, имеющая конечный предел в точке a, ограничена в достаточно малой окрестности этой точки (см. § 24, стр. 103).

Теорема II. *Если функция непрерывна в точке a и если $f(a)\neq 0$, то в достаточно малой окрестности точки a функция $f(x)<0$, если $f(a)<0$, и $f(x)>0$, если $f(a)>0$* (черт. 143).

Кратко эту теорему формулируют так: *функция $f(x)$, непрерывная в точке a, в достаточно малой окрестности этой точки имеет тот же знак, что $f(a)$ (при этом $f(a) \neq 0$).*

Эта теорема является следствием теоремы, утверждающей, что если $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$, то знак $f(x)$ в достаточно малой окрестности точки a одинаков со знаком $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (стр. 100, следствие).



Черт. 143

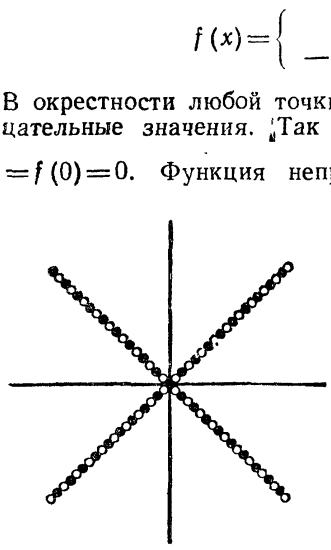
Следствие. Если непрерывная в точке a функция $f(x)$ имеет в любой окрестности точки a как положительные, так и отрицательные значения, то $f(a) = 0$; отсюда же следует, что если в любой окрестности точки a функция $f(x)$ имеет как положительные, так и отрицательные значения и если $f(a) \neq 0$, то $f(x)$ не может быть непрерывной в точке a.

Примеры.

1. Положим

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ (если } x \text{—рациональное число);} \\ -x \text{ (если } x \text{—иррациональное число).} \end{cases}$$

В окрестности любой точки a функция имеет как положительные, так и отрицательные значения. Так как $|f(x)| < \varepsilon$, если $|x| < \varepsilon$, то имеем: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$. Функция непрерывна в точке 0. Если $a \neq 0$, то и $f(a) \neq 0$. Имеем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$ на множестве рациональных чисел и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -a$ на множестве иррациональных чисел; следовательно, $f(x)$ разрывна в точке a (черт. 144).


Черт. 144.

2. Рассмотрим функцию $F(x)$, определенную так: $F(x) = 0$, если x иррационально или равно нулю. Если $x = \frac{p}{q}$, где p и q—целые взаимно простые числа, причем $q > 0$, то $F(x) = \frac{1}{q}$. Покажем, что $F(x)$ разрывна в любой рациональной точке $r = \frac{p}{q} \neq 0$. В самом деле, $F\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} > 0$; вместе с тем в *любой* окрестности точки $\frac{p}{q}$ существуют иррациональные точки, в которых $F(x) = 0$. Если бы функция $F(x)$ была непрерывна, то значения $F(x)$ в достаточно малой окрестности точки $\frac{p}{q}$ были бы положительны, что не имеет места. Во всякой иррациональной точке ξ функция $F(x)$ непрерывна. В самом деле, пусть n—натуральное число.

Покажем, что существует такая окрестность точки ξ, которая не содержит ни одной рациональной точки вида

$$\ldots -\frac{2}{n},\ -\frac{1}{n},\ 0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots . \tag{1}$$

Иррациональная точка ξ содержится между некоторыми двумя из этих точек

$$\frac{l}{n} < \xi < \frac{l+1}{n}.$$

Обозначим через U_n какую-либо окрестность точки ξ, лежащую в интервале $\left(\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}\right)$; эта окрестность не содержит ни одного числа из чисел (1), т. е. не содержит ни одной дроби со знаменателем n. Покажем, что в достаточно малой окрестности точки ξ имеет место неравенство

$$|F(x) - F(\xi)| < \varepsilon.$$

Выберем натуральное число n при условии $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Пусть U_k — окрестность точки ξ, не содержащая дробей со знаменателем k (целое число мы рассматриваем как дробь со знаменателем 1). Рассмотрим n таких окрестностей:

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n.$$

Пусть U — некоторая окрестность точки ξ, содержащаяся в окрестностях $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Окрестность U не содержит дробей со знаменателями 1, 2, 3, ..., n, поэтому всякая рациональная точка x, ей принадлежащая, есть число вида $\frac{p}{q}$, где $q > n$, а потому $F(x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$; значит,

$$|F(x) - F(\xi)| = F(x) < \varepsilon \quad (\text{ибо } F(\xi) = 0).$$

Если x есть иррациональное число, то $F(x) = 0$ и при любом x в окрестности U точки ξ имеем:

$$|F(x) - F(\xi)| < \varepsilon.$$

Итак, функция $F(x)$ непрерывна в любой иррациональной точке ξ.

Теорема III. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то существует такая окрестность U точки a, что для любых двух значений аргумента x' и x'', принадлежащих окрестности U, выполнено неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. В самом деле, так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то существует такая окрестность U точки a, при любом значении аргумента в этой окрестности выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(неравенство справедливо и в самой точке $x = a$). Пусть x_1 и x_2 — какие-нибудь значения аргумента, лежащие в U; тогда имеем:

$$|f(x_1) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f(x_2) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon, \quad \text{ч. т. д.}$$

Примечание. К этому же выводу можно прийти, применив критерий Коши.

§ 38. Функции, непрерывные на данном множестве

Пусть $\mathfrak{M}_1$ есть данное множество действительных чисел, являющееся частью области определения функции $f(x)$.

Определение. *Если точка a принадлежит множеству $\mathfrak{M}_1$ и если*

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x) \quad (x\in\mathfrak{M}_1),$$

то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a на множестве $\mathfrak{M}_1$.

Непрерывность функции в точке $a\in\mathfrak{M}_1$ на множестве $\mathfrak{M}_1$ характеризуется выполнением неравенства

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

при любом значении $x\in\mathfrak{M}_1$ в достаточно малой окрестности точки a:

$$|x-a|<\delta \quad \text{и} \quad x\in\mathfrak{M}_1$$

(a — предельная точка для $\mathfrak{M}_1$).

Функция, непрерывная в точке a на множестве $\mathfrak{M}_1$, может не быть непрерывной в этой точке, если ее рассматривать во всей области определения.

Пример.

Функция Дирихле, рассматриваемая на множестве рациональных чисел R, непрерывна в каждой рациональной точке $x=r$. В самом деле,

$$\chi(r)=\lim_{x\to r}\chi(x)=1 \quad (x\in R).$$

Однако $\chi(x)$ на множестве всех действительных чисел разрывна в любой точке. Аналогично функция $\chi(x)$ на множестве иррациональных чисел непрерывна в любой точке этого множества.

Рассмотрим функцию $f(x)$ на множестве значений аргумента, не меньших a: $x\geqslant a$. Если функция $f(x)$ непрерывна на этом множестве в точке a, т. е. если

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x) \quad (x\geqslant a),$$

то функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке a.

Аналогично определяется непрерывность слева в точке a:

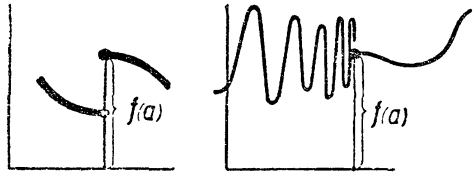
$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x) \quad (x\leqslant a).$$

Непрерывность справа в точке a характеризуется следующим условием:

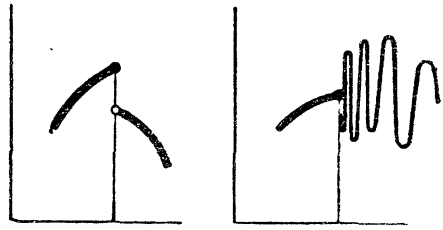
$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0) = f(a).$$

Аналогично непрерывность слева в точке a характеризуется условием:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0) = f(a).$$



Черт. 145.



Черт. 146.

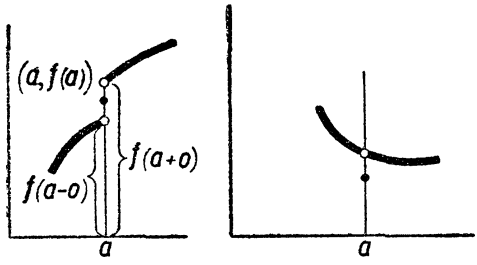
Если функция $f(x)$ непрерывна и справа и слева в точке a, то она непрерывна в точке a. В самом деле, в данном случае

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a),$$

но тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a справа (слева), а левый (правый) предел в точке a не имеет смысла, то функция непрерывна в точке a. В самом деле, в этом случае

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a} f(x).$$



Черт. 147.

Примером может служить функция $\sqrt{x}$, непрерывная в точке 0.

На чертеже 145 дано графическое изображение функций, непрерывных справа, но не непрерывных слева. Чертеж 146 изображает графики функций, непрерывных слева, но не непрерывных справа. Чертеж 147 изображает графики функций, имеющих односторонние пределы в данной точке, но не непрерывных в этой точке ни справа, ни слева.

Примеры.

1. Функция $[x]$ в точке n, где n — целое число, непрерывна справа, ибо $\lim\limits_{x\to n+} [x] = n = [n]$. Эта же функция не является непрерывной слева в той же точке, ибо $\lim\limits_{x\to n-} [x] = n-1 \neq [n]$ (см. черт. 28).

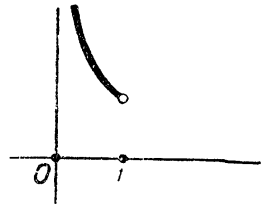
2. Функция $f(x)=\operatorname{sign} x$ не непрерывна в точке 0 ни слева, ни справа (см черт. 31).

3. Функция $\sin\frac{1}{x}$ не непрерывна в точке 0 ни справа, ни слева, ибо $\lim\limits_{x\to 0+}\sin\frac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0-}\sin\frac{1}{x}$ не существуют.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве $\mathfrak{M}$, если она непрерывна на множестве $\mathfrak{M}$ в каждой его точке.*

В частности, функция, определенная и непрерывная в каждой точке интервала (a, b), непрерывна в интервале (a, b).

Функция, определенная в каждой точке сегмента $[a, b]$ непрерывная в каждой его внутренней точке, непрерывная справа в точке a и непрерывная слева в точке b, непрерывна на сегменте $[a, b]$.



Черт. 148.

Если существует некоторая окрестность $(a-\delta,\ a+\delta)$ точки a, в каждой точке которой функция $f(x)$ определена и непрерывна, то говорят, что $f(x)$ непрерывна в окрестности точки a.

Обратим внимание, что из непрерывности функции в точке a не следует непрерывность этой функции в достаточно малой окрестности точки a.

Примером может служить функция

$$f(x)=\begin{cases} x & (x-\text{рациональное число});\\ -x & (x-\text{иррациональное число}),\end{cases}$$

непрерывная в точке 0 и разрывная в любой точке, отличной от нуля (см. черт. 144, стр. 157).

Примеры.

1. Нижеследующие функции непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$x^n,\ \sin x,\ \cos x.$$

2. Функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

3. Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна на множестве действительных чисел, отличных от нуля, т. е. в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

4. Функция $[x]$ непрерывна на полусегменте $[n, n+1)$.

5. Функция Дирихле непрерывна на множестве рациональных (иррациональных) чисел.

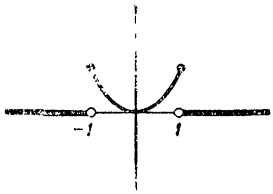
6. Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и определена в точках a и b, то это еще не значит, что она непрерывна на сегменте $[a, b]$, ибо точки a и b могут быть точками разрыва. Так, например, функция

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1);\\ 0 & (x=1 \text{ и } x=0)\end{cases}$$

непрерывна в каждой точке интервала (0, 1) и разрывна в точках 0 и 1, так как

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x\to 1-} f(x) = 1, \text{ но } f(1) = f(0) = 0$$ (черт. 148).

Примечание. Согласно определению непрерывности функции $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}_1$, значения функции при значениях аргумента, не принадлежащих $\mathfrak{M}_1$, не принимаются во внимание. Поэтому говорят, что речь идет о непрерывности функции на множестве $\mathfrak{M}_1$ относительно данного множества $\mathfrak{M}_1$. Предположим, что функция $f(x)$ рассматривается на некотором множестве $\mathfrak{M}$, а множество $\mathfrak{M}_1$ составляет его часть $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$.



Черт. 149.

Если функция $f(x)$ рассматривается на всем множестве $\mathfrak{M}$ и непрерывна в каждой точке множества $\mathfrak{M}_1$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{M}_1$ относительно множества $\mathfrak{M}$. Функция $f(x)$, непрерывная на $\mathfrak{M}_1$ относительно $\mathfrak{M}_1$, может не быть непрерывной на $\mathfrak{M}_1$ относительно $\mathfrak{M}$

Примеры.

1. Функция, определенная в интервале $(-\infty, +\infty)$ следующим законом соответствия:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1); \\ 0 & (\text{если } x > 1 \text{ или } x < -1) \end{cases}$$ (черт. 149),

разрывна в точках 1 и -1. Однако она непрерывна на сегменте $[-1, 1]$ относительно этого сегмента. В самом деле, $f(x)$ непрерывна в каждой внутренней точке интервала $(-1, 1)$ и непрерывна справа в точке -1;

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = f(-1) = 1$$ и слева в точке 1:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(x) = 1.$$

2. Функция Дирихле $\chi(x)$ непрерывна на множестве рациональных чисел относительно этого множества. Но $\chi(x)$ разрывна на множестве рациональных чисел относительно множества всех действительных чисел. Аналогично, $\chi(x)$ непрерывна на множестве всех иррациональных чисел относительно этого множества, но разрывна на этом множестве осносительно множества действительных чисел.

§ 39. Свойства функций, непрерывных на сегменте

Теорема об ограниченности. *Функция, непрерывная на сегменте, ограничена на этом сегменте.*

Доказательство. Допустим, что функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, не ограничена на этом сегменте. Возьмем любую возрастающую последовательность чисел, расходящуюся к $+\infty$, например:

$$1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Так как функция $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a, b]$, то при любом заданном числе $M > 0$ на этом сегменте найдется точка x_M — такая, что $|f(x_M)| > M$. По этой причине всегда возможно по-

строить последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих условиям:

$$|f(x_1)| > 1, \quad |f(x_2)| > 2, \ldots, |f(x_n)| > n, \ldots$$

В силу принципа предельных точек (см. § 32), последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ имеет хотя бы одну предельную точку $\xi \in [a. b]$.

Функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ не ограничена в любой (как угодно малой) окрестности ξ. Но, с другой стороны (по условию), функция $f(x)$ (на сегменте $[a, b]$) непрерывна в точке ξ, а потому ограничена в достаточно малой окрестности U_ξ. Полученное противоречие доказывает теорему.

Примечание I. Для интервала теорема не имеет места; так, например, функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(0, 1)$ но не ограничена в этом интервале. Эта функция ограничена в достаточно малой окрестности любой точки интервала $(0, 1)$, и не ограничена в окрестности точки 0, но точка 0 не принадлежит интервалу.

Примечание II. Разрывная функция, определенная в каждой точке сегмента, может не быть ограниченной на этом сегменте.

Примером может служить функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (\text{если } 0 < x \leqslant 1); \\ 0 & (\text{если } x = 0). \end{cases}$$

Теорема о наибольшем и наименьшем значениях. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то множество значений $f(x)$ содержит по крайней мере одно значение, равное верхней грани, и по крайней мере одно значение, равное нижней грани значений $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.*

Функция $f(x)$, будучи непрерывной на сегменте $[a, b]$, ограничена на этом сегменте, а потому существуют конечные верхняя и нижняя грани множества значений $f(x)$ на $[a, b]$.

Обозначим $\sup f(x) = M$ и $\inf f(x) = m$.

Теорема утверждает, что на сегменте $[a, b]$ найдется по крайней мере одна пара точек ξ и η, в которых $f(\xi) = M$ и $f(\eta) = m$, так что при любом $x \in [a, b]$ имеют место неравенства $f(\eta) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi)$.

Теорема о наибольшем и наименьшем значениях иначе формулируется так: *если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на $[a, b]$ существует по крайней мере одна точка ξ, в которой $f(x)$ имеет наибольшее значение, и по крайней мере одна точка η, в которой $f(x)$ имеет наименьшее значение.*

Доказательство. Предположим, что M не есть значение функции $f(x)$ ни в какой точке сегмента $[a, b]$; тогда имеем:

$M - f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$. Функция

$$\frac{1}{M - f(x)}$$

непрерывна на сегменте $[a, b]$, будучи частным непрерывных функций со знаменателем, отличным от нуля; следовательно, эта функция ограничена на $[a, b]$:

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < P,$$

откуда

$$f(x) < M - \frac{1}{P} \tag{1}$$

при всех значениях $x \in [a, b]$. Так как $M = \sup f(x)$ на $[a, b]$, то (в силу свойств верхней грани) существует значение $f(\xi)$, содержащееся в интервале $\left(M - \frac{1}{P}, M\right)$:

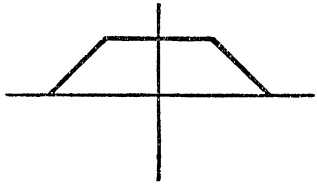
$$M - \frac{1}{P} < f(\xi) < M,$$

что невозможно в силу неравенства (1).

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема о нижней грани доказывается аналогично.

Теорема не решает вопроса о числе точек, в которых непрерывная на сегменте функция имеет наибольшее (наименьшее) значение; она утверждает лишь существование по крайней мере одной такой точки. Так, например, функция $\sin x$ на сегменте $[0, 4\pi]$ имеет верхнюю грань 1 и нижнюю -1 и имеет значение 1 в двух точках $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{2}$ и значение -1 в двух точках $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{7\pi}{2}$.



Черт. 150.

Функция $\varphi(x)$, непрерывная на сегменте $[-2, 2]$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + 2 & (\text{если } -2 \leqslant x \leqslant -1); \\ 1 & (\text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1); \\ 2 - x & (\text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2), \end{cases}$$

имеет верхнюю грань, равную 1; при этом $\varphi(x) = 1$ на сегменте $[-1, 1]$ (черт. 150).

Если функция $f(x)$ постоянна на сегменте $[a, b]$, то ее верхняя и нижняя грани совпадают и во всякой точке сегмента $M = m = f(x)$.

Для функций, не являющихся непрерывными на сегменте, теорема о наибольших и наименьших значениях не имеет места.

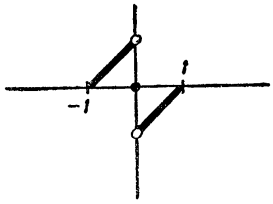
Для функций, непрерывных в интервале, теорема также не имеет места.

Примеры.

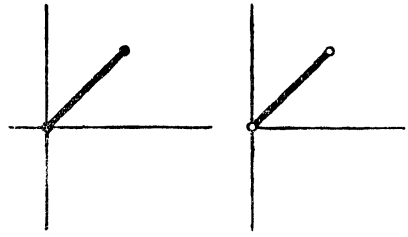
1 Положим на сегменте $[-1, 1]$:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x+1 & (\text{если } -1\leqslant x<0);\\ 0 & (\text{если } x=0);\\ x-1 & (\text{если } 0<x\leqslant 1) \text{ (черт. 151).}\end{cases}$$

Верхняя грань разрывной функции $\varphi(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ есть 1, однако $\varphi(x)\neq 1$ ни при каком значении x. Аналогично нижняя грань значений $\varphi(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ есть -1, но $\varphi(x)\neq -1$.



Черт. 151.

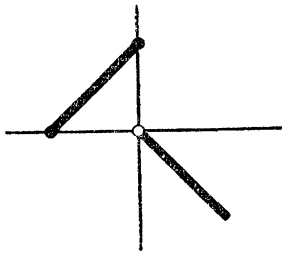


Черт. 152.

2. Непрерывная функция $f(x)=x$ имеет на сегменте $[0, 1]$ наименьшее и наибольшее значения $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Но $f(x)$ в интервале $(0, 1)$ не имеет наименьшего и наибольшего значений (черт. 152). Верхняя и нижняя грани значений $f(x)$ в интервале $(0, 1)$ суть 0 и 1, но $f(x)\neq 0$ $f(x)\neq 1$, если $0<x<1$.

3 Функция $\frac{1}{x}$, непрерывная в интервале $(0, +\infty)$, не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений: $\sup\frac{1}{x}=+\infty$ и $\inf\frac{1}{x}=0$, где $x\in(0, +\infty)$.

Примечание. В частных случаях функция, непрерывная в интервале, может иметь в этом интервале наибольшие или наименьшие значения. Например, функция $\sin x$, непрерывная в интервале $(0, 2\pi)$, имеет в этом интервале наибольшее и наименьшее значения в точках $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$. Аналогичное примечание относится и к разрывным функциям. Так, например, функция, определенная на сегменте $[-1, 1]$ законом соответствия



Черт. 153.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1\leqslant x\leqslant 0);\\ -x & (0<x\leqslant 1),\end{cases}$$

разрывна и имеет наибольшее значение в точке 0 ($f(0)=1$) и наименьшее в точке 1 ($f(1)=-1$) (черт. 153).

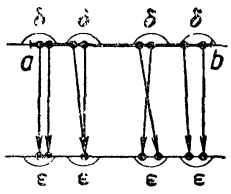
Теорема о равномерной непрерывности. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то любому заданному числу* $\varepsilon > 0$ (*как угодно малому*) *может быть поставлено в соответствие такое число* $\delta > 0$, *что неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

имеет место для любых чисел x', x'', *принадлежащих сегменту* $[a, b]$ *и удовлетворяющих неравенству*

$$|x' - x''| < \delta.$$

Таким образом, «равномерно», т. е. независимо от положения точек x' и x'' на сегменте $[a, b]$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, лишь бы только разность $x' - x''$ была достаточно малой по абсолютной величине.



Черт. 154.

Теорема утверждает, что расстояние между образами, т. е. $|f(x') - f(x'')|$, будет меньше ε, если расстояние между прообразами, т. е. $|x' - x''|$, меньше δ, где бы эти прообразы ни находились на сегменте $[a, b]$ (черт. 154), в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $[a, b]$.

Доказательство. Допустим, что теорема о равномерной непрерывности не верна, тогда существует (хотя бы одно) такое число ε, что, каким бы малым ни было δ, на сегменте $[a, b]$ найдется пара точек x_1 и x_2 — таких, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon \text{ при условии } |x_2 - x_1| < \delta.$$

Рассмотрим какую-нибудь убывающую последовательность положительных чисел, сходящуюся к нулю.

Положим, например,

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \ \ldots, \ \delta_n = \frac{1}{n}, \ \ldots$$

Согласно сказанному, на сегменте $[a, b]$ существует такая последовательность пар точек

$$\xi_1 \text{ и } \eta_1, \quad \xi_2 \text{ и } \eta_2, \ \ldots, \ \xi_n \text{ и } \eta_n, \ \ldots,$$

что

$$\begin{aligned}
&|f(\xi_1) - f(\eta_1)| \geqslant \varepsilon, \quad \text{причем} \quad |\xi_1 - \eta_1| < \delta_1;\\
&|f(\xi_2) - f(\eta_2)| \geqslant \varepsilon, \quad \text{»} \quad |\xi_2 - \eta_2| < \delta_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|f(\xi_n) - f(\eta_n)| \geqslant \varepsilon, \quad \text{»} \quad |\xi_n - \eta_n| < \delta_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ имеет хотя бы одну предельную точку $\xi \in [a, b]$. Каково бы ни было число δ, существуют как угодно большие значения n, при которых точка ξ_n содержится в окрестности $\left(\xi - \frac{\delta}{2}, \xi + \frac{\delta}{2}\right)$.

Если значение n больше $\frac{2}{\delta}$ и $\xi_n \in \left(\xi - \frac{\delta}{2}, \xi + \frac{\delta}{2}\right)$, то точка η_n содержится в окрестности $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, ибо

$$|\eta_n - \xi| \leqslant |\eta_n - \xi_n| + |\xi_n - \xi| < \delta_n + \frac{\delta}{2} < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

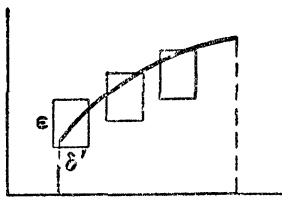
Итак, в любой окрестности точки ξ содержится пара точек ξ_n и η_n, в которых

$$|f(\xi_n) - f(\eta_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Но, с другой стороны, с силу непрерывности $f(x)$ в точке ξ существует такая δ-окрестность точки ξ, что для любой пары точек x_1 и x_2 сегмента $[a, b]$, содержащихся в этой окрестности,

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.



Черт. 155.

Геометрическая интерпретация. Рассмотрим прямоугольник, стороны которого параллельны осям OX и OY и имеют длины (соответственно), равные δ' и ε, где δ' — любое число, меньшее δ (черт. 155).

При произвольном положении на плоскости этого прямоугольника график функции, непрерывной на сегменте, не может пересечь обеих сторон, параллельных OX, так как в противном случае разность ординат графика была бы не меньше, чем ε, при разности абсцисс, меньшей δ.

Пример.

Положим $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на сегменте $1 \leqslant x \leqslant 2$; имеем:

$$|\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_1 x_2} + \sqrt[3]{x_1^2}} \leqslant \frac{|x_2 - x_1|}{3}$$

(ибо $1 \leqslant x_1$ и $1 \leqslant x_2$).

Если $\delta = 3\varepsilon$, то $|\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_1}| < \varepsilon$, каковы бы ни были точки x_2 и x_1, удовлетворяющие неравенству

$$|x_2 - x_1| < \delta.$$

Рассмотрим функцию $\sqrt[3]{x}$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ на две части $[0, \sigma]$ и $[\sigma, 1]$; число σ выберем настолько малым, чтобы в любых

двух точках $[0, \sigma]$ выполнялось неравенство:

$$|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Достаточно взять $\sigma<\frac{\varepsilon^3}{64}$, так как тогда

$$|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}|\leqslant\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_1}<2\sqrt[3]{\sigma}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

На сегменте $[\sigma, 1]$ имеем:

$$|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt[3]{x_2^2}+\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_1^2}}\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{3\sqrt[3]{\sigma^2}}.$$

Если $|x_2-x_1|<\frac{3\cdot\varepsilon\sqrt[3]{\sigma^2}}{2}$, то $|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть δ — наименьшее из чисел

$$\sigma \quad \text{и} \quad \frac{3}{2}\varepsilon\sqrt[3]{\sigma^2},$$

тогда

$$|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}|<\varepsilon, \quad \text{если} \quad |x_2-x_1|<\delta.$$

В самом деле, если точки x_2 и x_1 обе лежат на одном из сегментов $[0, \sigma]$ или $[\sigma, 1]$, то имеет место неравенство (1). Если точки x_1 и x_2 лежат на разных сегментах $[0, \sigma]$ и $[\sigma, 1]$, например $x_1<\sigma<x_2$, то

$$|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}|=(\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{\sigma})+(\sqrt[3]{\sigma}-\sqrt[3]{x_1})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Примечание I. Применительно к интервалу теорема о равномерной непрерывности не имеет места.

Примеры.

1. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(0, 1)$.

Имеем:

$$|f(x_2)-f(x_1)|=\frac{|x_2-x_1|}{x_2x_1}.$$

Положим

$$x_1=\frac{\varepsilon}{n}, \quad x_2=\frac{\varepsilon}{n+1};$$

тогда

$$|f(x_2)-f(x_1)|=\frac{1}{\varepsilon}>1, \quad \text{если} \quad \varepsilon<1.$$

Следовательно, в любой окрестности точки 0 существуют пары как угодно близких точек x_1 и x_2, для которых неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$ не выполняется.

2. Функция $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, непрерывная в интервале $(0, 1)$, не является равномерно непрерывной в этом интервале. На стр. 139 (см. пример 6) мы показали, что в любой как угодно малой окрестности точки 0 могут быть найдены пары таких точек x' и x'', что $|f(x')-f(x'')|=2>\varepsilon$, если выбрать $\varepsilon<2$.

Примечание II. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна в интервале (a, b), то выполнение неравенства

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |x_2-x_1|<\delta$$

показывает, что в окрестности любой точки функция $f(x)$ удовлетворяет условиям критерия Коши. В частности, в окрестностях точек a и b для значений аргумента из интервала (a, b) будет выполнено это условие. Следовательно, существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a+0) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to b-} f(x)=f(b-0).$$

Поэтому функцию $f(x)$ можно продолжить по непрерывности на сегмент $[a, b]$, положив $f(a+0)=f(a)$ и $f(b-0)=f(b)$, и получить функцию, непрерывную на данном сегменте.

Теорема о промежуточном значении.

Лемма. *Если значения функции, непрерывной на сегменте $[a, b]$, в точках a и b суть числа противоположных знаков, то хотя бы в одной внутренней точке сегмента значение функции равно нулю.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Разделим сегмент $[a, b]$ на две равные части

$$\sigma_1=\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{и} \quad \sigma_2=\left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то лемма справедлива.

Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, то для одного из сегментов σ_1 и σ_2 значения функции в концах противоположны по знаку (так как $f(a)$ и $f(b)$ противоположны по знаку). Обозначим этот сегмент через $[a_1, b_1]$. Разделим сегмент $[a_1, b_1]$ на две равные части и применим к нему все сказанное относительно сегмента $[a, b]$. В процессе дальнейшего деления сегмента может оказаться:

1° в некоторой точке $\frac{a_n+b_n}{2}$ значение функции равно нулю, в этом случае лемма доказана и дальнейшее деление промежутка излишне;

2° процесс деления промежутка может продолжаться неограниченно.

В этом случае получится последовательность стягивающихся сегментов

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset\ldots\supset[a_n, b_n]\supset\ldots$$

Согласно принципу стягивающихся сегментов,

$$\lim a_n=\lim b_n=c\in[a, b].$$

Но в точке a_n имеет $f(a_n) < 0$, и так как $f(x)$ непрерывна в точке c, то

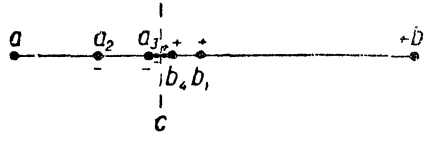
$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = \lim f(a_n) \leqslant 0,$$

и аналогично

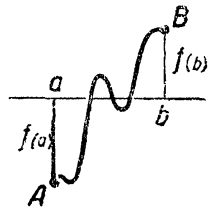
$$f(c) = \lim f(b_n) \geqslant 0 \quad \text{(черт. 156)}.$$

Выполнение обоих этих условий возможно лишь, если $f(c) = 0$. В концах сегмента $f(x) \neq 0$, поэтому точка c есть внутренняя точка $[a, b]$, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Лемма утверждает, что график непрерывной функции, соединяющий точки A и B, расположенные по разные стороны оси абсцисс, по крайней мере в одной точке пересекает ось абсцисс (черт. 157).



Черт. 156.



Черт. 157.

Теорема о промежуточном значении. *Если*

1° *функция* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* $< a, b >$,

2° *значения* $f(x)$ *в двух точках* x_1 *и* x_2 *промежутка* $< a, b >$ *различны*:

$$f(x_1) \neq f(x_2),$$

то, каково бы ни было число C, *заключенное между значениями* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$, *по крайней мере в одной точке* c, *содержащейся между* x_1 *и* x_2, *значение функции* $f(x)$ *равно* C:

$$f(c) = C.$$

Доказательство. Положим для определенности, что $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$. Пусть C — любое число, взятое при условии

$$f(x_1) < C < f(x_2).$$

Функция $F(x) = f(x) - C$ непрерывна на сегменте $[x_1, x_2]$, положительна в точке x_2 и отрицательна в точке x_1. Следовательно (в силу леммы), в некоторой точке $c \in (x_1, x_2)$ имеем:

$$F(c) = f(c) - C = 0, \quad \text{откуда} \quad f(c) = C, \quad \text{ч. т. д.}$$

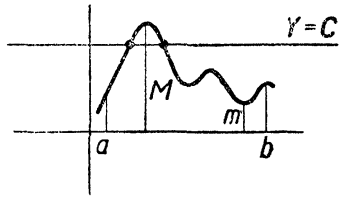
В частности, каково бы ни было число C, содержащееся между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, по крайней мере в одной точке $c \in [a, b]$, значе-

ние $f(x)$ равно C:

$$f(c)=C.$$

Заметим, что если функция $f(x)$ строго монотонна, то точка c является единственной.

Геометрическая интерпретация. Если m и M — значения функции в двух точках промежутка, в котором функция $f(x)$ непрерывна, то график $y=f(x)$ пересекает (по крайней мере в одной точке) всякую прямую $y=C$, расположенную между прямыми $y=M$ и $y=m$. На чертеже 158 имеем $m<C<M$.



Черт. 158.

Примеры.

1. Известно, что функция $\sin x$ непрерывна на сегменте

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \text{ и } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$$

следовательно, каково бы ни было число a, взятое при условии $|a|<1$, на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ существует по крайней мере одна точка x, в которой $f(x)=a$. В силу монотонности функции $\sin x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. точка x единственна.

2. Функция $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Имеем: $f\left(-\frac{4}{\pi}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}<0$, $f\left(\frac{4}{\pi}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}>0$; на сегменте $\left[-\frac{4}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$ существует бесконечное множество точек $x_k=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ и $x=0$, в которых $f(x)=0$.

3. Рассмотрим уравнение $\sin x-x+1=0$.

Значения непрерывной в интервале $(-\infty, +\infty)$ функции $f(x)=\sin x-x+1$ в точках 0 и π противоположны по знаку:

$$f(0)=1>0 \quad \text{и} \quad f(\pi)=-\pi+1<0.$$

Следовательно, на сегменте $[0, \pi]$ содержится по крайней мере один корень данного уравнения. Вычисляем значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\frac{\pi}{2}>0$. Следовательно, $f(x)$ обращается в нуль при значении аргумента между $\frac{\pi}{2}$ и π

Значения

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}+1<0 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\pi+1>0$$

разных знаков, а потому корень уравнения содержится в интервале $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$. Вычисляя значения $f(x)$ в точках, промежуточных между

$\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, можно найти сколь угодно малый интервал, внутри которого $f(x)$ обращается в нуль, и вычислить корень с любой степенью точности.

Примечание. Если известно, что функция $f(x)$ на сегменте имеет наибольшее и иаименьшее значения, а также любое значение, промежуточное между наибольшим и наименьшим, то отсюда не следует, что $f(x)$ непрерывна на данном сегменте.

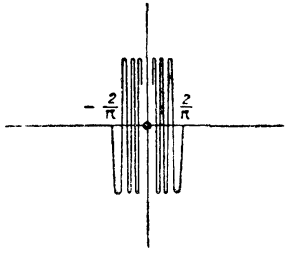
Положим, например,

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1\leqslant x\leqslant 0); \\ -x & (0<x\leqslant 1) \end{cases}$$ (см. пример на стр. 165).

Эта функция определена на сегменте $[-1, 1]$, разрывна в точке 0, имеет наибольшее и наименьшее значения (1 и -1), а также любое значение, промежуточное между -1 и 1.

Предположим, что функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и обладает свойством, выраженным теоремой о промежуточном значении: при произвольных числах x_1 и x_2,

$$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b,$$



Черт. 159.

функция имеет хотя бы в одной точке сегмента $[x_1, x_2]$ любое значение, промежуточное между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Функция $f(x)$, удовлетворяющая указанным условиям, может быть разрывной на сегменте $[a, b]$. Таким образом, *свойство иметь любое значение, промежуточное между двумя данными, не является характеристическим признаком непрерывности*

Пример.

Положим на сегменте $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$

$$f(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x} & (\text{если } x\neq 0), \\ 0 & (\text{если } x=0). \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в любой точке, за исключением $x=0$ (черт. 159). Если сегмент $[x_1, x_2]$ не содержит точку разрыва $x=0$, то по теореме о промежуточном значении функция $f(x)$ принимает любое значение α, промежуточное между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если сегмент $[x_1, x_2]$ содержит нуль (нуль может быть и граничной точкой), то этот сегмент содержит сегменты, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна и ее значения в концах суть 1 и -1. Значит, $f(x)$ может иметь значение, равное любому действительному числу α, по абсолютной величине не превышающему 1. Отсюда следует, что в любой окрестности точки 0 функция может иметь произвольное значение, промежуточное между -1 и 1. Таким образом, каковы бы ни были точки x_1 и x_2, принадлежащие сегменту $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$, функция $f(x)$ имеет по крайней мере

в одной точке сегмента $[x_1, x_2]$ любое значение, промежуточное между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, не являясь, однако, непрерывной на сегменте $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

Обобщение основных теорем*.

Теорема об ограниченности, теорема о наибольшем и наименьшем значениях и теорема о равномерной непрерывности, доказанные для функций, непрерывных на сегменте, верны в более общих предположениях относительно области определения непрерывной функции. Доказательства этих теорем опираются на нижеследующее свойство замкнутости сегмента: *сегмент содержит все свои предельные точки.* Это свойство сегмента является существенным. Так, например функция, непрерывная в интервале (a, b), может не быть ограниченной в окрестности его конечной точки, но конец интервала не принадлежит самому интервалу, а потому мы не имеем возможности (для получения противоречия) воспользоваться непрерывностью функции в граничных точках интервала.

Определение. *Множество точек $\mathfrak{M}$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки или если оно не имеет предельных точек.*

Примеры.

1. Сегмент есть замкнутое множество.
2. Все множество действительных чисел замкнуто (но неограничено).
3. Множество точек плоскости, лежащих внутри и на границе данного круга, замкнуто.
4. Множество точек, состоящее из двух сегментов

$$[a, b] \text{ и } [c, d], \text{ где } b < c, \text{ замкнуто.}$$

5. Конечное множество, а также множество всех целых чисел замкнуты, как не имеющие предельных точек.
6. Множество, состоящее из сегментов

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right], \ldots, \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], \ldots$$

и точки 0, замкнуто.

7. Множество $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ замкнуто.

8. *Если из двух последних множеств исключить точку* 0, то получатся незамкнутые множества, так как 0 есть их предельная точка.

Теорема об ограниченности, теорема о наибольшем и наименьшем значениях и теорема о равномерной непрерывности, доказательства которых основаны на общих свойствах непрерывных функций, на свойствах верхней и нижней граней и на свойствах замкнутости сегмента, остаются справедли-

---

* Настоящий пункт при первоначальном изучении курса может быть опущен.

выми для функций, непрерывных на любом ограниченном замкнутом множестве. Данные в настоящем параграфе доказательства остаются в силе.

Следовательно, *функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве,*

1° *ограничена на этом множестве,*

2° *имеет наибольшее и наименьшее значения,*

3° *равномерно непрерывна.*

Для функций, непрерывных на неограниченном (хотя бы и замкнутом) множестве, указанные теоремы не имеют места. В самом деле, хотя бы один из символов $-\infty$ и $+\infty$ есть предельная точка неограниченного множества, но эти символы не причисляются к множеству действительных чисел, а потому и не представляется возможным пользоваться непрерывностью функции в несобственных точках $\pm\infty$.

Так, например, функция x^2, непрерывная на множестве всех действительных чисел, неограничена, будучи неограниченной в окрестностях точек $+\infty$ и $-\infty$.

Теорема о промежуточном значении не может быть обобщена на случай функции, непрерывной на любом замкнутом множестве. В самом деле, метод ее доказательства основан на предположении, что любая внутренняя точка сегмента принадлежит области определения функции.

Так, например, функция

$$f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если } x\in[-2,\ -1]; \\ 1, & \text{если } x\in[1,\ 2] \end{cases}$$

непрерывна на замкнутом множестве, состоящем из двух сегментов $[-2, -1]$ и $[1, 2]$, но ни в какой точке этого множества не имеет значения, равного нулю.

Примечание. В ряде курсов анализа и теории функций (во избежание частых оговорок) функция, определенная в точке a, не являющейся предельной для области ее определения, считается непрерывной в этой точке.

Основное условие $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ выполняется в достаточно малой окрестности точки a, так как единственное значение аргумента в этой окрестности есть $x=a$, и

$$|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon.$$

§ 40. Отображение сегмента при помощи непрерывной функции

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и не является постоянной, то образом этого сегмента также является сегмент.*

Доказательство. Сопоставим результаты основных теорем (см. § 39).

1° Согласно теореме об ограниченности непрерывной на сегменте функции, множество значений функции $f(x)$ (образ сегмента) есть ограниченное множество.

2° По теореме о существовании верхней и нижней граней, для ограниченного множества оно имеет верхнюю грань M и нижнюю грань m. Поэтому все множество значений функции расположено на сегменте $[m, M]$. Значит, сегмент $[a, b]$ отображается на некоторое множество точек сегмента $[m, M]$.

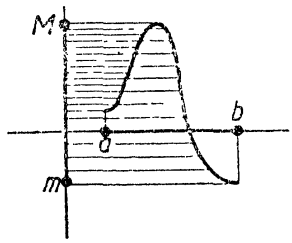
3° По теореме о наибольшем и наименьшем значениях, точки M и m являются образами некоторых значений аргумента ξ и η:

$$f(\xi) = m, \quad f(\eta) = M,$$

а поэтому концы сегмента $[m, M]$ принадлежат образу сегмента $[a, b]$.

4° По теореме о промежуточном значении, всякая точка C, лежащая внутри сегмента $[m, M]$ $(m < C < M)$, является образом некоторого значения аргумента x':

$$f(x') = C, \text{ где } a \leqslant x' \leqslant b.$$



Черт. 160.

Итак, всякая точка сегмента $[m, M]$ является образом по крайней мере одного значения аргумента. Ни одна точка сегмента $a \leqslant x \leqslant b$ не отображается в точку, лежащую вне сегмента $[m, M]$. Следовательно, образом сегмента $[a, b]$ является сегмент $[m, M]$, ч. т. д.

Если функция $f(x)$ постоянна на сегменте $[a, b]$, то $m = M$ и сегмент $[m, M]$ вырождается в одну точку.

Геометрическая интерпретация. Если каждую точку графика функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, спроектировать на ось ординат, то множество этих проекций образует на оси OY некоторый сегмент $[m, M]$ (черт. 160).

Одна и та же точка сегмента $[m, M]$ может иметь не один, а несколько или бесконечное множество прообразов. Некоторые части сегмента $[m, M]$ (или весь сегмент) могут при отображении оказаться несколько раз «покрытыми».

Пример.

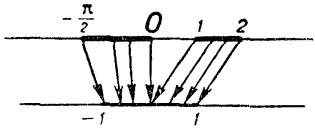
Функция $\sin x$ отображает сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ на сегмент $[-1, 1]$ и сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ на тот же сегмент. В первом случае каждая внутренняя точка сегмента $[-1, 1]$ имеет один прообраз ($\arcsin y$), а во втором — два прообраза ($\arcsin y$ и $\pi - \arcsin y$).

Примечание I. Функция, отображающая сегмент на сегмент, может быть разрывной. Так, например, функция (стр. 172)

$$y=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq 0);\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

отображает сегмент $-\dfrac{2}{\pi}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{\pi}$ на сегмент $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Примечание II. Если множество значений функции есть сегмент, то отсюда нельзя еще заключить, что множество значений аргумента также является сегментом. Так, например, функция, для которой множество значений аргумента состоит из двух сегментов $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ и $[1, 2]$ и которая определена законом соответствия:



Черт. 161.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0\right);\\ x-1 & (1\leqslant x\leqslant 2),\end{cases}$$

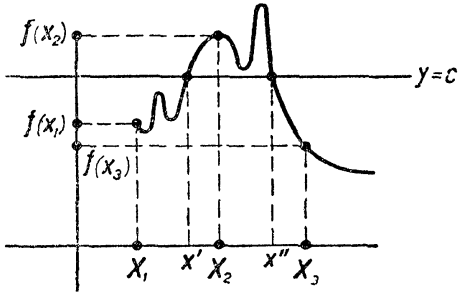
отображает множество значений аргумента на сегмент $[-1, 1]$ (черт. 161).

§ 41. Теоремы существования и непрерывности обратной функции

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $\langle a, b\rangle$, то необходимым и достаточным условием существования обратной функции $x=f(y)$ является строгая монотонность функции $f(x)$.*

Условие достаточно. В самом деле, всякая строго монотонная функция имеет обратную функцию (§ 13).

Условие необходимо. В самом деле, если функция $f(x)$ не монотонна, то существуют такие три значения аргумента



Черт. 162.

$$x_1<x_2<x_3,\ \text{что}\ f(x_1)<f(x_2),\ \text{и}\ f(x_2)>f(x_3), \qquad (1)$$

или

$$f(x_1)>f(x_2)\ \text{и}\ f(x_2)<f(x_3). \qquad (2)$$

Остановимся для определенности на случае (1). Выберем какое-либо число, удовлетворяющее неравенствам:

$$f(x_1)<C<f(x_2)\ \text{и}\ f(x_3)<C<f(x_2) \qquad \text{(черт. 162).}$$

По теореме о промежуточном значении внутри сегмента $[x_1, x_2]$, существует по крайней мере одна точка x' — такая, что $f(x') = C$. Аналогично, внутри сегмента $[x_2, x_3]$ найдется такая точка x'', что $f(x'') = C$. Значит, обе точки x' и x'' отображаются в одну и ту же точку C:

$$f(x') = f(x''),$$

а потому обратная функция не существует.

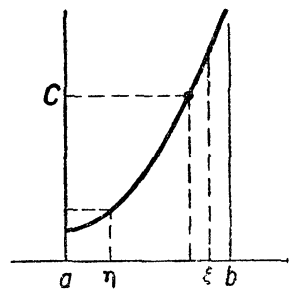
Если непрерывная в промежутке монотонная функция не является строго монотонной, то она имеет промежутки постоянства:

$$f(x) = C \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

В этом случае переход к обратной функции также невозможен, ч. т. д.

Пусть $y = f(x)$ — строго монотонная функция, непрерывная в промежутке $<a, b>$. Согласно теореме о пределе монотонной функции, функция $f(x)$ имеет в точке a правый, а в точке b левый предел. Предположим для определенности, что $f(x)$ является возрастающей. Положим

$$\lim_{x \to a+} f(x) = m \quad \text{и} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = M.$$



Черт. 163.

Точки m и M являются нижней и верхней гранями значений функции $f(x)$ в промежутке $<a, b>$. Нетрудно показать, что образом промежутка $<a, b>$ является промежуток $<m, M>$. В самом деле, пусть C — любое число, содержащееся внутри $<m, M>$:

$$m < C < M.$$

В силу свойств нижней и верхней граней, существуют значения функции $f(x)$ как бо́льшие, так и меньшие C:

$$m \leqslant f(\eta) < C < f(\xi) \leqslant M \qquad \text{(черт. 163)},$$

где $a \leqslant \eta < \xi \leqslant b$. По теореме о промежуточном значении, на сегменте $[\eta, \xi]$ существует единственная (в силу строгой монотонности) точка $x = c$, в которой $f(c) = C$. Следовательно, значения непрерывной, возрастающей в промежутке $<a, b>$ функции заполняют соответствующий промежуток $<m, M>$.

В случае убывающей функции следует положить

$$m = \inf f(x) = \lim_{x \to b-} f(x) \quad \text{и} \quad M = \sup f(x) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Теорема. *Функция $x=\bar{f}(y)$, обратная относительно строго монотонной функции $y=f(x)$, непрерывной в промежутке $<a, b>$, непрерывна в соответствующем промежутке $<m, M>$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что функция $y=f(x)$ является возрастающей. Пусть C — любая внутренняя точка промежутка $<m, M>$. Докажем что функция $x=\bar{f}(y)$ непрерывна в точке C.

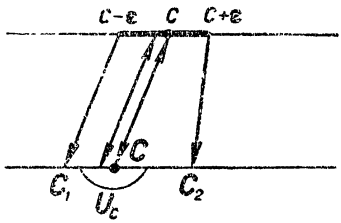
Обозначим через c точку промежутка $<a, b>$, соответствующую точке C:

$$c=\bar{f}(C) \text{ и } C=f(c).$$

Возьмем положительное число ε настолько малым, чтобы сегмент $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ содержался внутри промежутка $<a, b>$. Непрерывная возрастающая функция $y=f(x)$ отображает сегмент $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ на некоторый сегмент $[C_1, C_2]$, содержащий точку C:

$$C_1=f(c-\varepsilon), \quad C_2=f(c+\varepsilon)$$

и $C_1<C<C_2$ (черт. 164).



Черт. 164.

Обозначим через U_C любую δ-окрестность точки C, содержащуюся внутри сегмента $[C_1, C_2]$:

$$C_1<C-\delta<C+\delta<C_2.$$

Если точка y содержится в окрестности U_C, то $C_1<y<C_2$.

В силу монотонности функции $\bar{f}(y)$, имеем:

$$\bar{f}(C_1)<\bar{f}(y)<\bar{f}(C_2),$$

или, что то же:

$$c-\varepsilon<\bar{f}(y)<c+\varepsilon.$$

Последние неравенства можно переписать так:

$$|\bar{f}(y)-c|<\varepsilon$$

или

$$|\bar{f}(y)-\bar{f}(C)|<\varepsilon, \quad \text{если } |y-C|<\delta;$$

это и означает непрерывность функции $\bar{f}(y)$ в точке C.

Если граничная точка a (или b) промежутка $<a, b>$ принадлежит области определения функции, то функция $\bar{f}(y)$ непрерывна справа (слева) в соответствующей точке $y=m$. В этом случае вместо сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ следует рассмотреть сегмент $[a, a+\varepsilon]$ и соответствующий ему сегмент $[m, m_1]$ (где $m_1=f(a+\varepsilon)$); тогда

$$\bar{f}(y)\in[a, a+\varepsilon), \quad \text{если } x\in[m, m_1), \quad \text{ч. т. д.}$$

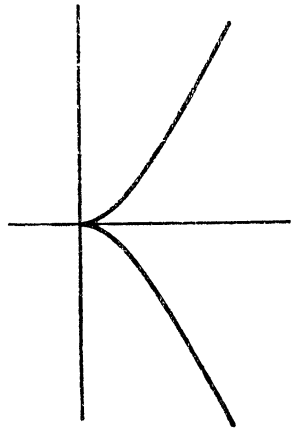
Для доказательства непрерывности функции, обратной относительно убывающей непрерывной функции $f(x)$, достаточно заметить, что непрерывная функция $-f(x)$ является возрастающей, а потому имеет обратную непрерывную функцию.

§ 42. Непрерывные линии

Рассмотрим систему функций

$$x = x(t);\ y = y(t) \tag{1}$$

на некотором множестве $\mathfrak{M}_t$. Будем толковать x и y как декартовы координаты некоторой точки $M(x, y)$ на плоскости. Эту точку M будем называть образом значения аргумента t, а значение t — прообразом точки M. При такой геометрической интерпретации множество $\mathfrak{M}_t$ отображается на некоторое множество точек $M(x,(t), y(t))$ плоскости.



Черт. 165.

Примеры.

1. Положим

$$x = t^2;\ y = t^3 \tag{1}$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$. В примере 1 на стр. 57 мы видели, что система (1) на полусегменте $0 \leqslant t < +\infty$ определяет функцию $y = \sqrt{x^3}$ на полусегменте $0 \leqslant x < +\infty$. Полусегмент $0 \leqslant t < +\infty$ отображается на верхнюю ветвь полукубической параболы $y^2 = x^3$. При противоположных значениях t абсцисса x имеет одно и то же значение, а значения y противоположны. Образом полуинтервала $-\infty < t \leqslant 0$ является нижняя ветвь полукубической параболы. Итак, система (1) (в интервале $-\infty < t < +\infty$) определяет на плоскости полукубическую параболу (черт. 165).

2. Рассмотрим систему

$$x = \cos t,\ y = \sin t \tag{2}$$

в интервале $-\infty < t < +\infty$. Система (2) на сегменте $0 \leqslant t \leqslant \pi$ определяет y как функцию x:

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Иначе говоря, сегмент $0 \leqslant t \leqslant \pi$ отображается на верхнюю полуокружность. Сегмент $-\pi \leqslant t \leqslant 0$ отображается на нижнюю полуокружность. В силу периодичности функций $\cos t$ и $\sin t$, каждый из сегментов

$$\ldots, [-2\pi, -\pi], [0, \pi], [2\pi, 3\pi], \ldots$$

отображается на верхнюю полуокружность, а каждый из сегментов

$$\ldots, [-3\pi, -2\pi], [-\pi, 0], [\pi, 2\pi], \ldots$$

на нижнюю полуокружность. Следовательно, система (2) в интервале $-\infty < t < +\infty$ определяет на плоскости окружность $x^2 + y^2 = 1$.

3. Пусть

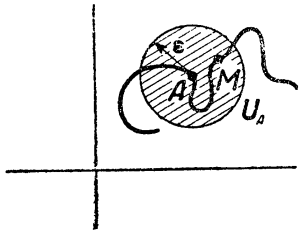
$$x=\chi(t),\ y=\chi(t),$$

где χ есть функция Дирихле. Образ интервала $(-\infty, +\infty)$ состоит из двух точек: $M(0, 0)$ и $M(1, 1)$. Всякое рациональное значение t отображается в точку $M(1, 1)$, а всякое иррациональное значение t — в точку $M(0, 0)$.

Предположим, что функции

$$x=x(t),\ y=y(t) \qquad (I)$$

непрерывны в точке t_0. Пусть A есть точка плоскости, являющаяся образом значения t_0. Отображение, реализуемое посредством системы (I), является непрерывным в точке t_0. Свойство непрерывности отображения выражается следующей теоремой.



Черт. 166.

Теорема *(о непрерывности отображения). Какова бы ни была заданная окрестность U_A точки A (т. е. круг с центром в точке A), существует окрестность U_{t_0} точки t_0 — такая, что точка $M(x(t), y(t))$ лежит в окрестности U_A, если значение t содержится в U_{t_0}:*

$$M(x(t),\ y(t))\in U_A,\ \text{если}\ t\in U_{t_0}.$$

Доказательство. Обозначим через ε радиус окрестности U_A. В силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 имеем (черт. 166):

$$|x(t)-x(t_0)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\quad \text{если}\quad |t-t_0|<\delta_1,$$

и

$$|y(t)-y(t_0)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\quad \text{если}\quad |t-t_0|<\delta_2.$$

Обозначим через U_{t_0} любую δ-окрестность точки t_0, где δ не превосходит наименьшего из чисел δ_1 и δ_2. Тогда имеем:

$$|MA|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=$$
$$=\sqrt{|x(t)-x(t_0)|^2+|y(t)-y(t_0)|^2}<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$M\in U_A,\ \text{если}\ |t-t_0|<\delta,\ \text{ч. т. д.}$$

Первоначально определение понятия линии было сформулировано в следующем виде: *множество точек плоскости называется линией, если оно может быть получено в результате отображения некоторого сегмента $a\leqslant t\leqslant b$ при помощи функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, непрерывных на этом сегменте.*

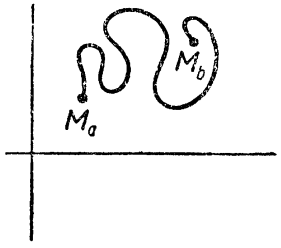
Позднейшие исследования показали, что «кривая линия» в смысле этого определения может оказаться весьма сложным множеством точек, не похожим на то, что обычно принято называть

линией. Так были построены такие непрерывные функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, определенные на сегменте $[0, 1]$, что соответствующий геометрический образ есть квадрат с вершинами (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1). Выражаясь образно, линия «проходит через каждую точку квадрата». Не входя в исследование того общего случая, когда функции $x(t)$ и $y(t)$ суть произвольные непрерывные функции, мы ограничимся рассмотрением так называемых простых дуг.

Определение. *Простой дугой называется непрерывная линия, допускающая такую параметризацию:*

$$x=x(t),\ y=y(t),\ a\leqslant t\leqslant b, \tag{1}$$

в которой двум различным значениям параметра t соответствуют две различные точки линии, т. е. если $t_1\neq t_2$, то и соответствующие точки M_1 и M_2 различны (они отличаются хотя бы одной координатой).



Черт. 167.

Это определение иначе можно выразить так: *простая дуга может быть взаимно однозначно и непрерывно отображена на сегмент.*

При этом отображении каждой точке t сегмента $[a, b]$ соответствует точка линии — ее образ, и обратно, — каждой точке линии соответствует одна точка сегмента — ее прообраз; геометрически это означает, что простая дуга не имеет точек самопересечения. Точки M_a и M_b, соответствующие значениям параметра a и b, называются концами дуги (черт. 167).

В частности, *график функции $y=f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, есть простая дуга.* В самом деле, достаточно положить

$$x=t,\ y=f(t),$$

чтобы получить простейший способ параметризации, в котором двум различным значениям параметра соответствуют две различные точки линии, так как если $t_1\neq t_2$, то и $x_1\neq x_2$.

Определение. *Если функции*

$$x=x(t) \quad \text{и} \quad y=y(t)$$

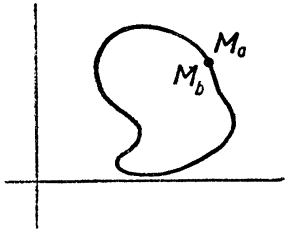
непрерывны на некотором сегменте $a\leqslant t\leqslant b$ и двум различным значениям параметра t соответствуют на линии две различные точки за исключением значений $t=a$ и $t=b$, в котором соответствует одна и та же точка:

$$x(a)=x(b);\ y(a)=y(b),$$

то линия, допускающая такую параметризацию, называется простой замкнутой линией (черт. 168).

Параметрическое задание линии важно для геометрии по следующим соображениям. Не всякая линия на плоскости является графиком некоторой функции $y=f(x)$, так как графиками функций являются лишь такие линии, что любая прямая, параллельная оси OY, или не пересекает графика, или пересекает его в одной единственной точке. Освободиться от этого ограничения и дает возможность задание линии при помощи параметрических уравнений $x=x(t)$, $y=y(t)$. В самом деле, на линии могут быть точки, имеющие разные ординаты с одной и той же абсциссой, но и функции $x(t)$ $y(t)$ могут быть подобраны так, что разным значениям t соответствует одно и то же значение x и разные значения y.

В механике параметрическими уравнениями пользуются при изучении движения материальной точки. Каждому моменту времени соответствует положение точки на плоскости, и, следовательно, координаты движущейся точки суть функции времени. В кинематике параметр t интерпретируется как время, в этой интерпретации



Черт. 168.

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

суть параметрические уравнения траектории движущейся точки.

Пусть линия задана в параметрической форме; если функция $x(t)$ строго монотонна, то система (I) определяет функцию

$$y=f(x).$$

Аналогично, если $y(t)$ есть строго монотонная функция, то система определяет x как функцию y:

$$x=\overline{f}(y).$$

Если на сегменте $[a, b]$ обе непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$ строго монотонны, то уравнение простой дуги может быть представлено как в виде $y=f(x)$, так и в виде $x=\overline{f}(y)$, где $f(x)$ и $\overline{f}(y)$ — взаимно обратные функции.

Предположим, что сегмент $[a, b]$ может быть разбит на некоторое число таких сегментов: $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, . . . , на каждом из которых хотя бы одна из непрерывных функций $x(t)$ или $y(t)$ монотонна. В соответствии с этим линия разобьется на такое же количество дуг. Дуга, соответствующая сегменту $[a_i, b_i]$, может быть представлена уравнением

$$y=f_i(x) \text{ или уравнением } x=\overline{f}_i(y),$$

в зависимости от того, какая из функций $x(t)$ или $y(t)$ монотонна на сегменте $[a_i, b_i]$.

При задании линии при помощи некоторого уравнения, не разрешенного относительно одной из координат

$$F(x,\ y)=0, \tag{2}$$

не всегда бывает возможно представить всю линию уравнением вида

$$y=f(x) \text{ или } x=\bar{f}(y),$$

тогда как во многих случаях переход к параметрическим уравнениям дает возможность представить всю линию в целом.

Рассмотрим уравнение окружности

$$x^2+y^2=1.$$

Решая уравнение относительно y, мы сможем представить в отдельности верхнюю и нижнюю полуокружности соответственно при помощи уравнений:

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{и} \quad y=-\sqrt{1-x^2}. \tag{3}$$

Аналогично, решая уравнение относительно x, мы сможем представить в отдельности правую и левую полуокружности уравнениями:

$$x=\sqrt{1-y^2} \quad \text{и} \quad x=-\sqrt{1-y^2}. \tag{4}$$

Параметрические уравнения

$$x=\cos t,\ y=\sin t, \quad \text{где } 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

дают представление всей окружности в целом. Если сегмент $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ разбить на два сегмента $0\leqslant t\leqslant \pi$ и $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$, на каждом из которых функция $\cos t$ монотонна, то мы сможем получить уравнения (3), дающие представление окружности по частям. Аналогично, рассматривая значение параметра t на сегментах $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}\pi$, на каждом из которых функция $\sin t$ монотонна, мы сможем представить окружность по частям при помощи уравнений (4). Заметим, что на сегменте $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ обе функции $\sin t$ и $\cos t$ монотонны, в соответствии с этим четверть окружности, лежащая в первом квадранте, может быть представлена любым из уравнений:

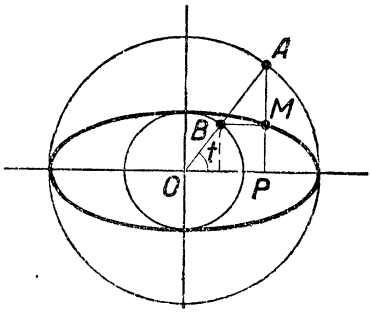
$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{или} \quad x=\sqrt{1-y^2}.$$

Примеры.

1. Рассмотрим систему:

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ (a>0,\ b>0)$$

на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Исключив параметр t, видим, что координаты x и y удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. На сегменте $[0, \pi]$ абсцисса $x=a\cos t$ убывает от a до $-a$ и $y \geqslant 0$; следовательно, сегмент $[0, \pi]$ отображается на верхнюю половину эллипса. На сегменте $[\pi, 2\pi]$ абсцисса $x=\cos t$ возрастает от $-a$ до a и $y \leqslant 0$, следовательно, сегмент $[\pi, 2\pi]$ отображается на нижнюю половину эллипса. Таким образом, сегмент $[0, 2\pi]$ отображается на весь эллипс, причем точки $t=0$ и $t=2\pi$ отображаются в одну и ту же точку $(a, 0)$.

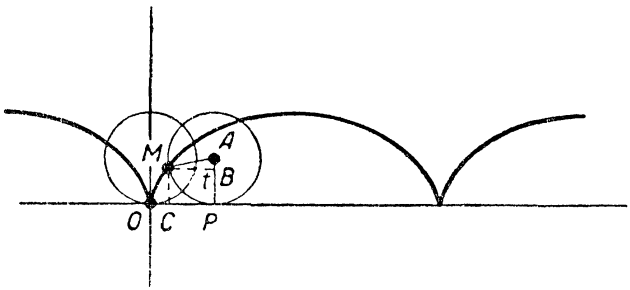


Черт. 169.

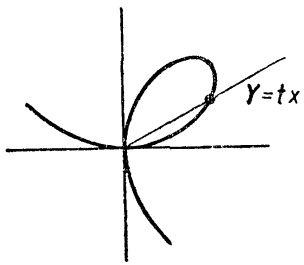
Параметру t легло дать геометрическое толкование и получить удобный способ построения эллипса. В самом деле, рассмотрим две концентрические окружности с центром в начале координат и с радиусами a и b (черт. 169). Проведем какой-нибудь луч; обозначим через t угол, образованный этим лучом с положительным направлением оси абсцисс. Из точки A опустим перпендикуляр AP на ось абсцисс. Из точки B опустим перпендикуляр BM на AP. Точка M есть точка эллипса с полуосями a и b. В самом деле, рассматривая чертеж 169, получим:

$$x=OP=a\cos t; \quad y=MP=b\sin t.$$

2. Циклоидой называется линия, которую описывает точка окружности, катящейся по прямой. Примем прямую, по которой катится окружность, за ось абсцисс. В качестве начального положения окружности рассмотрим то положение, когда данная точка M окружности расположена на оси абсцисс (черт. 170) (M совпадает с точкой O).



Черт. 170.



Черт. 171.

Рассмотрим какое-нибудь положение катящейся окружности. Пусть t есть угол поворота круга. Так как качение происходит без скольжения, то длина отрезка OP равна длине дуги MP, но $MP=rt$, где r — радиус окружности. Из чертежа 170 находим:

$$x=OC=OP-MB=rt-r\sin t;$$
$$y=MC=AP-AB=r-r\cos t.$$

Отсюда получаем параметрические уравнения циклоиды:

$$x=r(t-\sin t), \quad y=r(1-\cos t).$$

3. Рассмотрим линию третьего порядка (декартов лист) (черт. 171), заданную уравнением $x^3+y^3=3axy$ (где $a>0$). Найдем точку пересечения этой линии с прямой $y=tx$; имеем: $x^3(1+t^3)=3atx^2$.

Отсюда при $x \neq 0$ получим:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \tag{1}$$

При всяком t ($t \neq -1$) в интервале $(-\infty, +\infty)$ x и y суть точки декартова листа. В частности, при $t=0$, $x=0$ и $y=0$. Эти уравнения суть параметрические уравнения декартова листа.

4. Пусть линия задана уравнением в полярных координатах $\varrho = f(\varphi)$. Воспользовавшись формулами, связывающими декартовы координаты с полярными $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, получим параметрические уравнения данной линии:

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi$$

(здесь параметром является φ).

5. Система, заданная на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 4$:

$$x = \begin{cases} t & (\text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1); \\ 1 & (\text{если } 1 \leqslant t \leqslant 2); \\ 3-t & (\text{если } 2 \leqslant t \leqslant 3); \\ 0 & (\text{если } 3 \leqslant t \leqslant 4); \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & (\text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1); \\ t-1 & (\text{если } 1 \leqslant t \leqslant 2); \\ 1 & (\text{если } 2 \leqslant t \leqslant 3); \\ 4-t & (\text{если } 3 \leqslant \ \leqslant 4) \end{cases}$$

дает параметрическое представление периферии квадрата с вершинами (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1). Сегмент $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображается на сторону квадрата, лежащую на оси абсцисс, сегмент $1 \leqslant t \leqslant 2$—на сторону, параллельную оси ординат, сегмент $2 \leqslant t \leqslant 3$—на сторону, параллельную оси абсцисс, и, наконец, сегмент, $3 \leqslant t \leqslant 4$—на сторону, лежащую на оси ординат. Следовательно, *периферия квадрата является простой замкнутой линией.*

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 43. Степенная функция с целым показателем

Степенной функцией называется функция вида

$$f(x) = {}^n x,$$

где n — некоторое действительное число. Будем считать, что $n \neq 0$; случай $n = 0$ не представляет интереса, ибо тогда $f(x) = \text{const} = 1$.

I. Степенная функция с натуральным показателем. В этом случае x^n есть произведение n сомножителей, равных x; областью определения является интервал $(-\infty, +\infty)$. Отметим основные свойства степенной функци ипри натуральном n.

1° Степенная функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. В самом деле, функция x^n является целой положительной степенью непрерывной функции $f(x) = x$.

2° Функция x^n является четной при n четном и нечетной при n нечетном.

3° Функция x^n является возрастающей на полусегменте $[0, +\infty]$; в самом деле, если $0 < x_1 < x_2$, то $x_1^n < x_2^n$.

В силу 2°, функция x^n в интервале является убывающей при n четном и возрастающей при n нечетном.

4°

a) $$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty;$$

b) $$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ (если } n \text{ — четное);} \\ -\infty \text{ (если } n \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

Свойство a) было доказано на стр. 85.

Свойство b) следует из 2° и 4° a).

II. Степенная функция с целым отрицательным показателем. Пусть n — натуральное число; по определению, имеем: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Из этого определения и из свойств степенной функции с натуральным показателем вытекают следующие свойства степенной функции с целым отрицательным показателем.

1° Функция x^{-n} (n — натуральное число) непрерывна при любом значении $x \neq 0$, так как функция x^n непрерывна и $f(x) \neq 0$.

2° В интервале $(0, +\infty)$ функция x^{-n} убывает (так как x^n возрастает).

3° x^{-n} — четная функция при четном n и нечетная при нечетном n, а потому x^{-n} в интервале $(-\infty, 0)$ возрастает, если n — четное, и убывает, если n нечетное.

4° В интервале $(-\infty, 0)$ имеем:

$$x^{-n} = \begin{cases} > 0 \text{ (если } n \text{ — четное);} \\ < 0 \text{ (если } n \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

5° $\lim\limits_{x \to 0+} x^{-n} = +\infty$, ибо $\lim\limits_{x \to 0+} x^n = 0$ и $x^n > 0$ справа от точки 0.

$$\lim_{x \to 0-} x^{-n} = \begin{cases} +\infty \text{ (если } n \text{ — четное);} \\ -\infty \text{ (если } n \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

Бесконечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-n}$ существует и равен $+\infty$ лишь в том случае, когда n — число четное.

6° $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^{-n} = 0$.

На чертежах 40 и 96 изображены графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^2}$.

§ 44. Многочлен

Функция

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где n — натуральное число и $a_0 \neq 0$, называется многочленом или полиномом степени n.

Мы будем рассматривать полиномы с действительными коэффициентами. Отметим следующие свойства полинома:

1° $P_n(x)$ есть непрерывная функция в интервале $(-\infty, +\infty)$ как линейная комбинация непрерывных в этом интервале функций $1, x, x^2, \ldots x^n$.

2° $$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty \text{ (если } a_0 > 0); \\ -\infty \text{ (если } a_0 < 0). \end{cases}$$

Действительно,

$$P_n(x) = a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right) = 1$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$$

3° Если $a_0 > 0$, то

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty \text{ (если } n \text{ — четное);} \\ -\infty \text{ (если } n \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего свойства [надо воспользоваться равенством (1)].

При $a_0 < 0$ имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = \begin{cases} -\infty \text{ (если } n \text{ — четное);} \\ +\infty \text{ (если } n \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

4° Всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень. В самом деле, в окрестностях точек $+\infty$ и $-\infty$ значения многочлена суть числа разных знаков (ибо разные знаки имеют значения старшего члена). Поэтому можно найти такое число $N > 0$, что на концах сегмента $[-N, N]$ значения $P_n(x)$ имеют разные знаки. Следовательно, в силу непрерывности многочлена, по крайней мере в одной точке сегмента $[-N, N]$ многочлен $P_n(x)$ обращается в нуль.

5° В окрестности точки 0 знак многочлена $P_n(x)$ одинаков со знаком младшего члена. В самом деле, если $a_n \neq 0$, то

$$\lim_{x\to 0} P_n(x) = \lim(a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_0 x^n) = a_n$$

(см. § 23, теорема I, следствие).

Если младший член есть $a_{n-k}x^k$ $(a_{n-k} \neq 0)$, то

$$P_n(x) = x^k(a_{n-k} + a_{n-k-1}x + \ldots + a_n x^{n-k}).$$

Так как в окрестности точки 0 знак второго множителя одинаков со знаком a_{n-k}, то знак $P_n(x)$ одинаков со знаком $a_{n-k}x^k$.

§ 45. Рациональная функция

Дробная рациональная функция $R(x)$ может быть в результате тождественных преобразований представлена в виде *несократимой* дроби

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Основные свойства рациональной функции следующие:

1° Областью определения $R(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$ с выключенными точками, в которых $Q_m(x) = 0$. Пусть $x_1, x_2 \ldots, , x_k (k \leqslant m)$ суть действительные и различные корни $Q_m(x)$, расположенные в порядке возрастания. Областью определения $R(x)$ является система конечного числа интервалов $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_k, +\infty)$. Если $Q_m(x)$ не имеет действительных корней, то областью определения $R(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$.

2° Рациональная функция непрерывна в любой точке a, где a не есть корень $Q_m(x)$. Это следует из теоремы о непрерывности частного непрерывных функций.

3° a) При $n > m$

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) = \begin{cases} +\infty & \left(\text{если } \frac{a_0}{b_0} > 0\right); \\ -\infty & \left(\text{если } \frac{a_0}{b_0} < 0\right). \end{cases}$$

Если $\frac{a_0}{b_0} > 0$, то

$$\lim_{x \to -\infty} R(x) = \begin{cases} +\infty \text{ (если } n - m \text{ — четное);} \\ -\infty \text{ (если } n - m \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

Если $\frac{a_0}{b_0} < 0$, то

$$\lim_{x \to -\infty} R(x) = \begin{cases} -\infty \text{ (если } n - m \text{ — четное);} \\ +\infty \text{ (если } n - m \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

b) При $n < m$ имеем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} R(x) = 0$.

c) При $n = m$ имеем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}$.

Доказательство и справедливость утверждений a), b) и c) следуют из соотношений:

$$R(x)=\frac{a_0x^{n-m}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right)}{b_0\left(1+\frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{b_2}{b_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{b_m}{b_0}\cdot\frac{1}{x^m}\right)}$$

и

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{b_2}{b_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{b_m}{b_0}\cdot\frac{1}{x^m}}=1.$$

Примеры.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{-3x^3+4x}=0;\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5-x+1}{-3x^2+6x-\sqrt{2}}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x^4-2x+8}{-3x^4+x^3+2}=-\frac{7}{3}.$$

4° В точках, обращающих $Q_m(x)$ в нуль, функция $R(x)$ имеет либо бесконечный предел, равный $+\infty$ или $-\infty$, либо односторонние бесконечные пределы, один из которых равен $+\infty$, а другой $-\infty$.

Доказательство. В самом деле, если α есть корень знаменателя $Q_m(x)$, то $Q_m(x)$ делится на некоторую степень двучлена $(x-\alpha)$:

$$Q_m(x)=(x-\alpha)^k Q_{m-k}(x).$$

Так как (по предположению) дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ несократимая, то $x=\alpha$ не есть корень числителя: $P_n(\alpha)\neq 0$. Имеем:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^k Q_{m-k}(x)};\quad \text{обозначим}\quad \frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}=R_1(x),$$

откуда

$$R(x)=\frac{R_1(x)}{(x-\alpha)^k}.$$

Примем во внимание, что

$$\lim_{x\to\alpha}R_1(x)=\frac{P_n(\alpha)}{Q_{m-k}(\alpha)}=R_1(\alpha)\neq 0.$$

Если k — число четное, то

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{(x-\alpha)^k}=+\infty$$

и

$$\lim_{x\to\alpha}R(x)=\begin{cases}+\infty & (\text{если } R_1(\alpha)>0);\\ -\infty & (\text{если } R_1(\alpha)<0).\end{cases}$$

Если k — число нечетное, то

$$\lim_{x\to a+}\frac{1}{(x-a)^k}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a-}\frac{1}{(x-a)^k}=-\infty.$$

Следовательно, при нечетном k

$$\lim_{x\to a+}R(x)=\begin{cases}+\infty & (\text{если } R_1(a)>0);\\ -\infty & (\text{если } R_1(a)<0);\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a-}R(x)=\begin{cases}-\infty & (\text{если } R_1(a)>0);\\ +\infty & (\text{если } R_1(a)<0).\end{cases}$$

Пример.

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 1+}\frac{x}{x^2-1}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{x}{x^2-1}=+\infty; \qquad \lim_{x\to -1+}\frac{x}{x^2-1}=-\infty.$$

§ 46. Степенная функция с дробным показателем

А. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ где n — натуральное число, определена при n нечетном в интервале $(-\infty, +\infty)$, при n четном — на полусегменте $[0, +\infty)$.

1° При нечетном n функция $y=\sqrt[n]{x}$ непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$, возрастает, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty$. Это следует из свойств обратной функции $x=y^n$, которая при нечетном n является непрерывной и возрастающей в интервале $(-\infty, +\infty)$, причем $\lim\limits_{y\to+\infty}x=+\infty$ и $\lim\limits_{y\to-\infty}x=-\infty$.

2° При четном n функция $y=\sqrt[n]{x}$ непрерывна и возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt[n]{x}=0$. В самом деле, функция $x=y^n$, обратная данной на полусегменте $[0, +\infty)$, непрерывна и возрастает, причем $\lim\limits_{y\to+\infty}y^n=+\infty$ и $\lim\limits_{y\to0+}y^n=0$.

В. Степенная функция с дробным положительным показателем степени.

Функция $x^{\frac{p}{q}}$, где p и q — натуральные числа, определяется как $\sqrt[q]{x^p}$; будем считать, что $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Рассмотрим свойства этой функции:

1° Если q — число четное, то область определения функции $x^{\frac{p}{q}}$ или $\sqrt[q]{x^p}$ есть полусегмент $[0, +\infty)$. Если же q — число

нечетное, то область определения функции есть интервал $(-\infty, +\infty)$.

2° Функция $x^{\frac{p}{q}}$ непрерывна в любой точке области определения. Это следует из теоремы о непрерывности сложной функции, ибо $x^{\frac{p}{q}}$ можно рассматривать как сложную функцию $\sqrt[q]{u}$ с промежуточным аргументом $u = x^p$.

3° При q нечетном $x^{\frac{p}{q}}$ есть нечетная функция, если p нечетно, и четная, если p четно. В самом деле, в первом случае

$$(-x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(-x)^p} = \sqrt[q]{-x^p} = -\sqrt[q]{x^p} = -x^{\frac{p}{q}}$$

и во втором

$$(-x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(-x)^p} = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}.$$

4° Функция $x^{\frac{p}{q}}$ возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$. В самом деле, функция $x^{\frac{1}{q}}$ возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$; если

$$x_1 > x_2 \geqslant 0, \quad \text{то} \quad x_1^{\frac{1}{q}} > x_2^{\frac{1}{q}}; \quad \text{значит,} \quad x_1^{\frac{p}{q}} > x_2^{\frac{p}{q}}.$$

5° При q нечетном и p четном функция $x^{\frac{p}{q}}$ убывает в интервале $(-\infty, 0)$ и при q нечетном и p нечетном возрастает в этом интервале. Это свойство следует из свойств функции $x^{\frac{p}{q}}$ при $x \geqslant 0$ и из свойств четных и нечетных функций (см. стр. 49).

6° $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{p}{q}} = +\infty$,

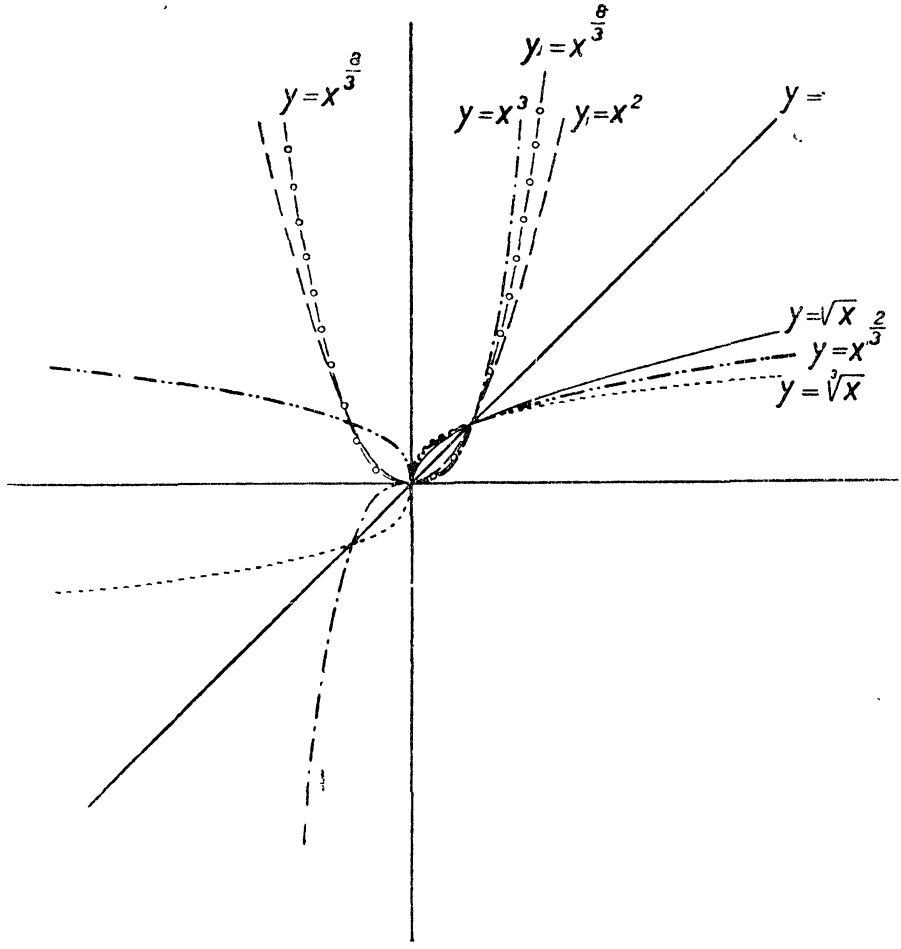
$$\lim_{x \to -\infty} x^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} +\infty \text{ (если } q \text{ — нечетное и } p \text{ — четное);} \\ -\infty \text{ (если } q \text{ — нечетное и } p \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

Это свойство следует из свойств функции $x^{\frac{1}{q}}$ и из свойств степенной функции с натуральным показателем степени ($y = u^p$; $u = x^{\frac{1}{q}}$).

На чертеже 172 представлены графики функций $y = x^n$ при различных положительных рациональных значениях n.

С. Функция x^n с отрицательным дробным показателем степени.

Функция $x^{-\frac{p}{q}}$, где p и q — натуральные числа, определяется как $\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$ и обладает следующими свойствами (полагаем, что $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь), вытекающими из свойств функции $x^{\frac{p}{q}}$:



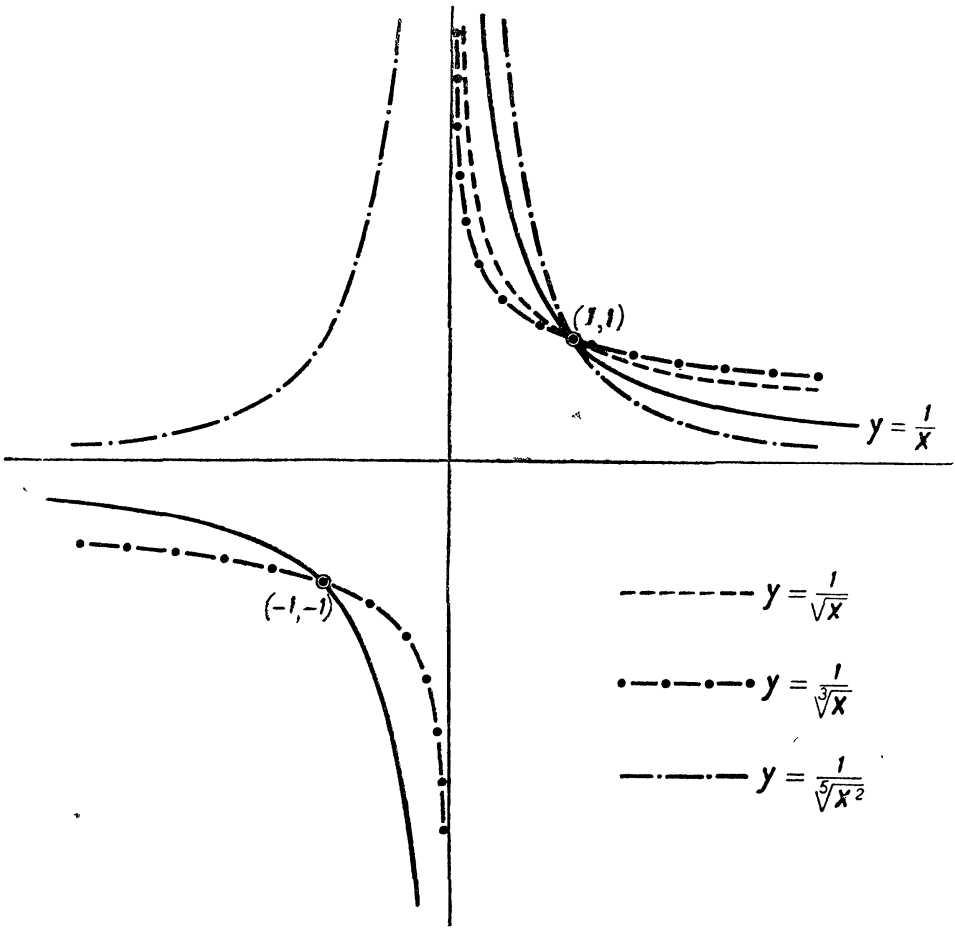
Черт. 172.

1° При q четном функция определена в интервале $(0, +\infty)$, при q нечетном — в интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

2° В области определения она непрерывна (это следует из непрерывности функции $x^{\frac{p}{q}}$).

3° Функция убывает в интервале $(0, +\infty)$. Это следует из того, что функция $x^{\frac{p}{q}}$ возрастает в этом интервале.

4° При q нечетном функция нечетная, если p нечетное, и четная, если p четное.



Черт. 173.

5° При q нечетном и p четном функция возрастает и при q нечетном и p нечетном убывает в интервале $(-\infty, 0)$.

6° $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{p}{q}} = 0$; при q нечетном $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-\frac{p}{q}} = 0$ (см. В, 6°).

7° $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-\frac{p}{q}} = +\infty$ и при q нечетном

$$\lim_{x\to 0-} x^{-\frac{p}{q}} = \begin{cases} +\infty & \text{(если } p \text{ — четное);} \\ -\infty & \text{(если } p \text{ — нечетное).} \end{cases}$$

Это следует из свойств функции $x^{\frac{p}{q}}$. Графики функций вида $y=x^{-\frac{p}{q}}$ представлены на чертеже 173.

§ 47. Показательная функция на множестве рациональных чисел

Рассмотрим функцию a^r (где $a>0$) на множестве всех рациональных чисел. Если r — натуральное число, то

$$a^r=\overbrace{a\cdot a\ldots a}^{r\text{ раз}};$$

если r — дробное положительное число $\frac{p}{q}$, то $a^r=\sqrt[q]{a^p}$; если r — число отрицательное, то $a^r=\frac{1}{a^{-r}}$, и, наконец, если $r=0$, то $a^0=1$.

Основные свойства показательной функции с рациональным аргументом следующие:

1° $f(r)=a^r$ положительна при любом r (в силу определения).

2° При $a>1$ значение $f(r)$ при положительных значениях r больше 1 и при отрицательных — меньше 1. При $a<1$ значения $f(r)$ при положительных значениях аргумента меньше 1 и при отрицательных — больше 1. Пусть, например, $r=\frac{p}{q}>0$ и $a>1$, тогда

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}>1.$$

Если $r<0$, то $a^r=\frac{1}{a^{-r}}<1$, так как $a^{-r}>1$.

3° Если $a>1$, то a^r есть возрастающая функция; если $a<1$, то a^r есть убывающая функция. Действительно, пусть $a>1$ и $r_1>r_2$. Так как $a^{r_1}-a^{r_2}=a^{r_2}(a^{r_1-r_2}-1)$ и $r_1-r_2>0$, то $a^{r_1-r_2}>1$, а значит, $a^{r_1}-a^{r_2}>0$, откуда $a^{r_1}>a^{r_2}$. Аналогично докажем, что при $a<1$ и $r_1>r_2$ имеем $a^{r_1}<a^{r_2}$.

Примечание. Если $a=1$, то $a^r=\text{const}=1$. В дальнейшем мы показательную функцию будем рассматривать в предположении, что $a\neq 1$.

4° $\lim\limits_{r\to 0}a^r=1$. В самом деле, в силу монотонности, существуют односторонние пределы $\lim\limits_{r\to 0+}a^r$ и $\lim\limits_{r\to 0-}a^r$. Чтобы найти $\lim\limits_{r\to 0+}a^r$, достаточно найти этот предел по последовательности

$$r_1=1,\quad r_2=\frac{1}{2},\ \ldots,\ r_n=\frac{1}{n},\ \ldots,$$

сходящейся к нулю. Имеем:

$$\lim_{r\to 0+} a^r = \lim a^{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

Аналогично $\lim\limits_{r\to 0-} a^r = \lim a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{a}} = 1.$

Итак, $\lim\limits_{r\to 0} a^r = a^0 = 1$; следовательно, функция a^r непрерывна в точке 0.

5° Функция a^r непрерывна на множестве всех рациональных чисел. В самом деле, при любом рациональном c имеем:

$$\lim_{r\to c} a^r = \lim (a^c \cdot a^{r-c}) = a^c \lim a^{r-c} = a^c.$$

6° Показательная функция a^r, рассматриваемая на множестве всех рациональных чисел, имеет предел (конечный или бесконечный) в любой точке c.

Доказательство.

a) Если c — рациональное число, то по предыдущему

$$\lim_{r\to c} a^r = a^c.$$

b) Пусть c — иррациональное число.

В силу монотонности a^r, существуют односторонние пределы

$$\lim_{r\to c-} a^r = l_- \quad \text{и} \quad \lim_{r\to c+} a^r = l_+.$$

Докажем, что $l_- = l_+$.

Пусть

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant \ldots \leqslant c_n \leqslant \ldots < c$$

и

$$c < \ldots \leqslant C_n \leqslant \ldots \leqslant C_2 \leqslant C_1$$

последовательности десятичных приближенных значений, по недостатку и по избытку, числа c с точностью до 0,1, 0,01 и т. д.: $C_n - c_n = \frac{1}{10^n}$ и $c_n < c < C_n$.

По этим последовательностям имеем $\lim a^{c_n} = l_-$ и $\lim a^{C_n} = l_+$. Так как

$$l_+ - l_- = \lim (a^{C_n} - a^{c_n}) = \lim a^{c_n}(a^{\frac{1}{10^n}} - 1) = 0, \text{ то } l_+ = l_-.$$

c) $c = +\infty$. В силу монотонности a^r существует $\lim\limits_{r\to+\infty} a^r$, но при $a > 1$, по последовательности натуральных чисел, имеем $\lim a^n = +\infty$,

а потому и $\lim\limits_{r\to+\infty} a^r = +\infty$. Если $a<1$, то $\lim\limits_{r\to+\infty} a^r = \lim \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^r} = 0$.

d) $c=-\infty$. В этом случае $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r = 0$ при $a>1$ и $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r = +\infty$ при $a<1$. Доказательство предоставляем читателю.

§ 48. Иррациональная степень положительного числа

Определение. *Степенью a^α, где $a>0$ и α — иррациональное число, называется предел в точке α показательной функции a^r, рассматриваемой на множестве рациональных чисел*

$$a^\alpha = \lim_{r\to\alpha} a^r.$$

В силу свойства 6° b), этот предел существует и конечен при любом иррациональном α.

Отметим следующее свойство степени с иррациональным показателем.

Если r_1 и r_2 — любые два рациональные числа, между которыми заключено число α, т. е. $r_1<\alpha<r_2$, то

$$a^{r_1} < a^\alpha < a^{r_2} \quad \text{при} \quad a>1$$

и

$$a^{r_1} > a^\alpha > a^{r_2} \quad \text{при} \quad a<1.$$

Доказательство. Степень a^α есть предел (в точке α) строго монотонной функции a^r, поэтому:

$$a^{r_1} < \lim_{r\to\alpha} a^r = a^\alpha < a^{r_2} \quad (\text{при } a>1),$$

так как в окрестности точки α имеем $a^{r_1}<a^r<a^{r_2}$. Аналогично,

$$a^{r_1} > a^\alpha > a^{r_2}, \quad \text{при} \quad a<1.$$

В элементарной алгебре доказываются следующие основные свойства степени: *при любых рациональных α и β имеют место равенства*

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad \text{и} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$

Теорема. *Основные свойства степени имеют место при любых действительных α и β.*

Доказательство. Докажем, например, первое свойство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — любые две последовательности рациональных чисел, сходящиеся (соответственно) к α и β:

$$\lim \alpha_n = \alpha \text{ и } \lim \beta_n = \beta, \quad \text{тогда} \quad \lim(\alpha_n+\beta_n) = \alpha+\beta.$$

Имеем:

$$a^{\alpha}a^{\beta} = \lim a^{\alpha_n} \lim a^{\beta_n} = \lim a^{\alpha_n + \beta_n} = a^{\alpha+\beta}, \quad \text{ч. т. д.}$$

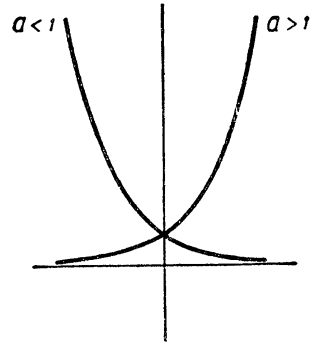
Примечание. Иррациональные степени отрицательных чисел в теории функций действительного аргумента не рассматриваются. Если $a < 0$, α — данное иррациональное число, $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} \begin{cases} > 0 \text{ (если } p \text{ — четное, } q \text{ — нечетное);} \\ < 0 \text{ (если } p \text{ и } q \text{ — нечетные);} \\ \quad \text{(не имеет действительного значения,} \\ \quad \text{если } p \text{ — нечетное, а } q \text{ — четное).} \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r$ не существует.

§ 49. Показательная функция

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, рассматриваемая на множестве всех действительных чисел, $-\infty < x < +\infty$, называется показательной функцией.



Черт. 174.

Основные свойства показательной функции a^x те же, что и свойства функции a^r на множестве рациональных чисел:

1° $a^x > 0$ при любом действительном x. Если x — рациональное число, то (§ 47, 1°) имеем $a^x > 0$, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай, когда x — иррациональное число. Значение a^x заключено между положительными числами a^{r_1} и a^{r_2}, где r_1 и r_2 — любые рациональные числа, взятые при условии $r_1 < x < r_2$, а потому $a^x > 0$, ч. т. д.

2° *При* $a > 1$ *имеем* $a^x > 1$ *в интервале* $0 < x < +\infty$ *и* $a^x < 1$ *в интервале* $-\infty < x < 0$.

При $a < 1$ *имеем* $a^x < 1$ *в интервале* $0 < x < +\infty$ *и* $a^x > 1$ *в интервале* $-\infty < x < 0$.

Доказательство. Достаточно провести доказательство для иррационального значения x. Пусть $a > 1$ и $0 < x$. Выбрав любое рациональное число r_1 в интервале $(0, x)$, будем иметь $1 < a^{r_1} < a^x$.

Если $x < 0$, то, выбрав любое рациональное число r_2 в интервале $(x, 0)$, получим $a^x < a^{r_2} < 1$.

Случай $a < 1$ рассматривается аналогично.

Доказательства нижеследующих свойств показательной функции точно такие же, как доказательства соответствующих свойств функции a^r, рассматриваемой на множестве рациональных чисел. Мы опускаем эти доказательства.

3° a^x возрастает при $a > 1$ и убывает при $a < 1$.

4° $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

5° Функция a^x непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$.

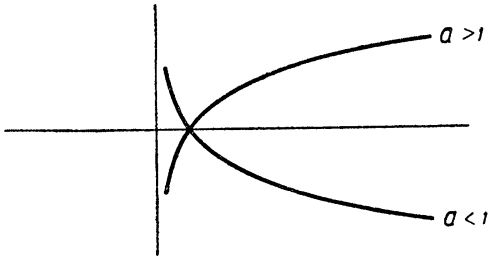
6° $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & (\text{при } a > 1); \\ 0 & (\text{при } a < 1) \end{cases}$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & (\text{при } a > 1); \\ +\infty & (\text{при } a < 1). \end{cases}$

График показательной функции представлен на чертеже 174 $\left(a = 2 \text{ и } a = \frac{1}{2}\right)$.

§ 50. Логарифмическая функция

Показательная функция $x = a^y$ при $a > 0$ и $a \neq 1$ строго монотонна и непрерывна в интервале $-\infty < y < +\infty$ и отображает этот интервал на интервал $0 < x < +\infty$. Следовательно, *существует обратная функция, строго монотонная и непрерывная в интервале* $0 < x < +\infty$ *и отображающая этот интервал на интервал* $-\infty < y < +\infty$. Эта функция называется логарифмической функцией при основании a:

$$y = \log_a x.$$



Черт. 175.

В силу определения, имеют место тождества

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{в интервале} \quad 0 < x < +\infty$$

и

$$y = \log_a a^y \quad \text{в интервале} \quad -\infty < y < +\infty.$$

При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает (так как a^y возрастает), при $a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает.

При $a > 1$ имеем $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$.

При $a < 1$ имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \text{ и } \lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty.$$

Таким образом, функция $\log_a x$ может иметь значением любое действительное число и притом, в силу монотонности, только при одном значении аргумента. Графики логарифмической функции при $a > 1$, $(a = 2)$ и при $a < 1$, $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ изображены на чертеже 175.

Поскольку мы не рассматриваем показательной функции с отрицательным основанием, не рассматривается и логарифмическая функция с отрицательным основанием. Показательная и логарифмическая функции с отрицательным основанием изучаются в теории функции комплексного аргумента.

Примечание. Так как при $a=1$ показательная функция есть константа $1^y=1$, то обратная функция не существует, а потому $\log_a x$ при $a=1$ не имеет смысла.

В математическом анализе обычно как показательная, так и логарифмическая функции рассматриваются при основании

$$a=e=2{,}71828\ldots$$

§ 51. Степенная функция с произвольным действительным показателем

Областью определения степенной функции $y=x^n$ при иррациональном n (случай рационального n рассмотрен выше) является при $n>0$ полусегмент $[0, +\infty)$, а при $n<0$ — интервал $(0, +\infty)$ (см. определение степени с иррациональным показателем).

Для изучения свойств степенной функции $y=x^n$ в интервале $(0, +\infty)$ при любом действительном n (рациональном или иррациональном) можно пользоваться следующим методом. Так как в интервале $(0, +\infty)$

$$x=e^{\ln x},\ \text{то}\ f(x)=x^n=e^{n\ln x};$$

значит, степенная функция может быть представлена в виде сложной функции

$$x^n=e^u,\quad \text{где}\quad u=n\ln x.$$

Отсюда вытекают следующие свойства степенной функции:

1° $$\lim_{x\to+\infty} x^n=\begin{cases}+\infty\ (\text{если}\ n>0);\\ 0\ (\text{если}\ n<0).\end{cases}$$

В самом деле, если $n>0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} u=+\infty$ и $\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$; если $n<0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} u=-\infty$ и $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$.

2° $$\lim_{x\to 0} x^n=\begin{cases}0\ (\text{если}\ n>0);\\ +\infty\ (\text{если}\ n<0).\end{cases}$$

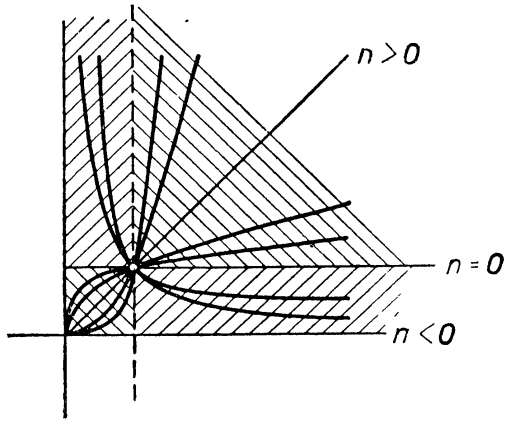
Доказательство аналогично, если принять во внимание, что

$$\lim_{x\to 0} u(x)=\lim n\ln x=\begin{cases}-\infty\ (\text{если}\ n>0):\\ +\infty\ (\text{если}\ n<0).\end{cases}$$

3° Функция x^n непрерывна в интервале $(0, +\infty)$; это следует из теоремы о непрерывности сложной функции: при $x > 0$ функция $u(x)$ непрерывна и e^u также непрерывна. Если $n > 0$, то x^n непрерывна и в точке 0, ибо по свойству 2°

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0 \text{ и } 0^n = 0.$$

4° Функция x^n при $n > 0$ возрастает, при $n < 0$ убывает. В самом деле, в первом случае $u(x) = n \ln x$ возрастает, а во втором убывает.



Черт. 176.

Сопоставим степенные функции x^{n_1} и x^{n_2} при двух различных действительных значениях показателя степени.

Предположим для определенности, что $n_1 < n_2$. Имеем:

$$x^{n_2} - x^{n_1} = x^{n_1}(x^{n_2 - n_1} - 1) \begin{cases} < 0 \text{ (при } x < 1); \\ = 0 \text{ (при } x = 1); \\ > 0 \text{ (при } x > 1). \end{cases}$$

Следовательно, $x^{n_1} < x^{n_2}$ в интервале $1 < x < +\infty$ и $x^{n_1} > x^{n_2}$ в интервале $0 < x < 1$. Отсюда геометрическая интерпретация: в интервале $(0, 1)$ линия $y = x^{n_1}$ лежит выше линии $y = x^{n_2}$, в интервале $(1, +\infty)$ линия $y = x^{n_1}$ лежит ниже линии $y = x^{n_2}$. Все линии $y = x^n$ проходят через точку $(1, 1)$, (черт. 176).

§ 52. Сложная показательная функция

Сложной показательной функцией называется функция вида

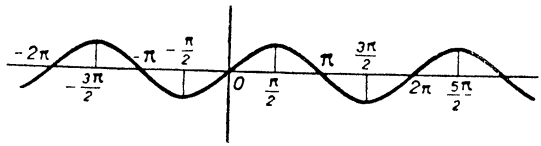
$$F(x) = f(x)^{\varphi(x)}.$$

Область определения этой функции устанавливается из следующих условий: значение x должно принадлежать областям определе-

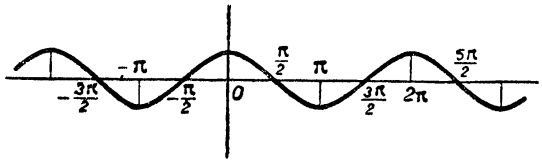
ния обеих функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и кроме того должно выполняться неравенство $f(x) > 0$. Имеем: $F(x) = e^{\varphi(x) \ln f(x)}$; функция $F(x)$ может быть представлена в виде сложной функции, $F(x) = e^u$, где $u = \varphi(x) \ln f(x)$. Из теоремы о непрерывности сложной функции следует, что $F(x)$ непрерывна во всех точках области ее определения, в которых функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны.

§ 53. Тригонометрические функции

В курсе тригонометрии изучаются тригонометрические величины угла x: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Если под x подразумевать число, измеряющее угол в какой-либо единице меры (в анализе принято пользоваться радианной мерой), то $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ являются функциями числового аргумента x, ибо каждому значению x соответствует определенное значение каждой из тригонометрических величин $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, если только эта тригонометрическая величина имеет смысл при этом значении x.



Черт. 177.



Черт. 178.

Функция $y = \sin x$ определена для любого действительного значения аргумента, т. е. в интервале $(-\infty, +\infty)$. Непрерывность этой функции была показана выше (см. стр. 148). Функция $\sin x$ периодическая и имеет период, равный 2π. Из геометрических соображений устанавливается, что эта функция возрастает на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Значит, в силу периодичности, $\sin x$ возрастает на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ и убывает на сегменте $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, где k — любое целое число (черт. 177).

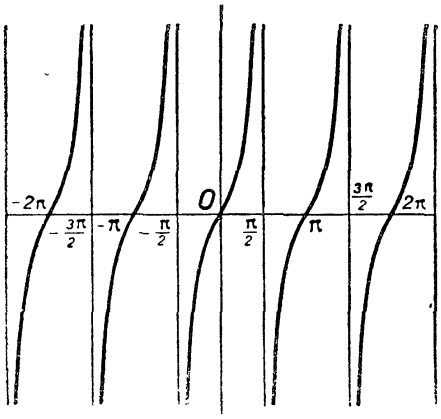
Аналогично определяется геометрически функция $\cos x$. Так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то отсюда следует непрерывность функции $\cos x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$, периодичность ее с периодом 2π, возрастание на сегменте $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ и убывание на сегменте $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ (черт. 178).

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определяется равенством $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Так как $\sin x$ и $\cos x$ — непрерывные функции, а $\cos x = 0$ при $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$,

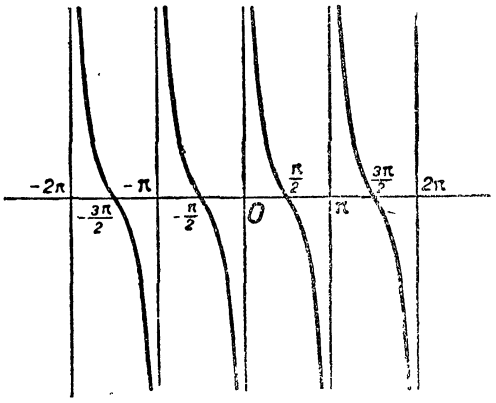
то функция $\operatorname{tg} x$ определена и непрерывна в любом интервале $\left(\overline{2k-1}\,\frac{\pi}{2}, \overline{2k+1}\,\frac{\pi}{2}\right)$. Так как

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\operatorname{tg} x,$$

то $\operatorname{tg} x$ есть периодическая функция с периодом, равным π. Рассмотрим $\operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. На полусегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\sin x$ возрастает, а $\cos x$ убывает; значит, $\operatorname{tg} x=\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}$ возрастает на этом полусегменте. Рассмотрим полуинтервал $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; в этом полуинтервале $\operatorname{tg} x \leqslant 0$ и возрастает, ибо



Черт. 179.



Черт. 180.

$\operatorname{tg} x$ есть нечетная функция, возрастающая на полусегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\operatorname{tg} x$ возрастает в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а также, в силу периодичности, в любом интервале $\left(\overline{2k-1}\cdot\frac{\pi}{2}, \overline{2k+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. Выше мы показали, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\operatorname{tg} x=-\infty$ (стр. 91), значит, в силу периодичности, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\operatorname{tg} x=-\infty$ (черт. 179).

Функция $y=\operatorname{ctg} x$ определяется равенством $y=\frac{\cos x}{\sin x}$. Она определена и непрерывна в интервале $(k\pi, \overline{k+1}\cdot\pi)$, не определена в его граничных точках (так как $\sin k\pi=0$), имеет период, равный π,

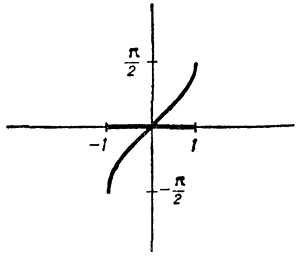
$$\left(\operatorname{ctg}(x+\pi)=\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x\right),$$

и является убывающей в интервале $(k\pi, \overline{k+1}\pi)$.

В самом деле, в полуинтервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos x$ убывает, а $\sin x$ возрастает, значит, и $\operatorname{ctg} x = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x}$ убывает. На полусегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $\operatorname{ctg} x \leqslant 0$, так как $\sin x > 0$ и $\cos x \leqslant 0$. Имеем: $|\operatorname{ctg} x| = \frac{|\cos x|}{\sin x}$, но $|\cos x|$ возрастает, а $\sin x$ убывает, поэтому $|\operatorname{ctg} x|$ возрастает, а следовательно, $\operatorname{ctg} x$ убывает. Итак, $\operatorname{ctg} x$ убывает в интервале $(0, \pi)$, а значит, в силу периодичности, и в любом интервале $(k\pi, \overline{k+1}\,\pi)$ (черт. 180).

§ 54. Обратные тригонометрические функции

Арксинус. На сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция $x = \sin y$ непрерывна, возрастает и отображает этот сегмент на сегмент $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, существует обратная функция $y = \arcsin x$ (черт. 181). Эта функция возрастает и непрерывна на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и отображает этот сегмент на сегмент $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. На сегменте $\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}\pi$ обратной функцией для $\sin y$ является



Черт. 181

$$y = \pi - \arcsin x.$$

Функция $\sin y$ возрастает на сегменте $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и убывает на сегменте $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. Обратные функции для этих сегментов (соответственно) суть

$$y = \arcsin x + 2k\pi \text{ и } y = (\pi - \arcsin x) + 2k\pi.$$

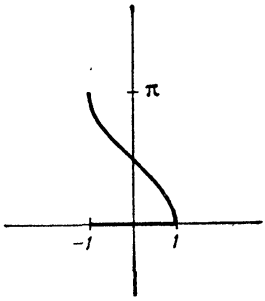
Арккосинус. Непрерывная убывающая на сегменте $0 \leqslant y \leqslant \pi$ функция $x = \cos y$ отображает этот сегмент на сегмент $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Обратная функция $y = \arccos x$ (черт. 182) непрерывна на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$, убывает и отображает этот сегмент на сегмент $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Функциями, обратными относительно косинуса на сегментах

$$[2k\pi, (2k+1)\pi] \text{ и } [(2k-1)\pi, 2k\pi],$$

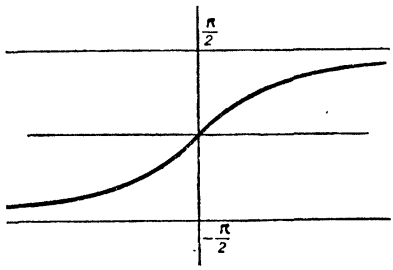
являются (соответственно) функции

$$y = \arccos x + 2k\pi \text{ и } y = -\arccos x + 2к\pi.$$

Арктангенс. Функция $x = \operatorname{tg} y$ непрерывна в интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, возрастает и отображает этот интервал на интервал $-\infty < x < +\infty$. Обратная функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ (черт. 183) непрерывна в интервале $-\infty < x < +\infty$, возрастает и отображает этот интервал на интервал $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.



Черт. 182.



Черт. 183.

В силу периодичности, функция $x = \operatorname{tg} y$ возрастает в интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$; обратной функцией в этом интервале является

$$y = \operatorname{arc\,tg} x + k\pi.$$

Арккотангенс. Для функции $x = \operatorname{ctg} y$, убывающей в интервале $0 < y < \pi$, обратной является функция

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Эта функция непрерывна, убывает и отображает интервал $-\infty < x < +\infty$ на интервал $0 < y < \pi$.

§ 55. Гиперболические функции

1° Функция $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом и обозначается символом $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \qquad (1)$$

Гиперболический синус является непрерывной возрастающей функцией в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как e^x возрастает, а e^{-x} убывает. Эта функция отображает интервал $-\infty < x < +\infty$ на интервал $-\infty < y < +\infty$, ибо

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty \text{ и } \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.$$

Далее имеем $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$; следовательно, гиперболический синус является нечетной функцией; ее график изображен на чертеже 184.

2° Функция $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, непрерывная в интервале $(-\infty, +\infty)$, называется гиперболическим косинусом:

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}. \tag{2}$$

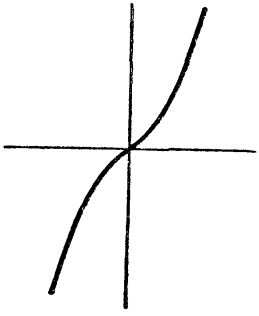
$\operatorname{ch} x$ является четной функцией; она возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$, ибо

$$\operatorname{ch} x_2-\operatorname{ch} x_1=\frac{e^{x_2}+e^{-x_2}}{2}-\frac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2}=$$

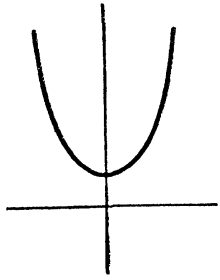
$$=\frac{1}{2}\left[e^{x_1}\left(e^{x_2-x_1}-1\right)+e^{-x_2}\left(1-e^{x_2-x_1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(e^{x_2-x_1}-1\right)\left(e^{x_1}-e^{-x_2}\right)>0,$$

при условии $0<x_1<x_2$.

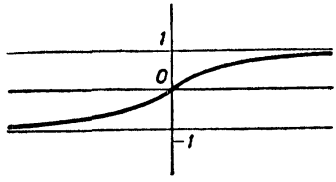
В силу четности, $\operatorname{ch} x$ убывает в полуинтервале $(-\infty, 0]$. График функции $y=\operatorname{ch} x$ называется цепной линией (черт. 185).



Черт. 184.



Черт. 185.



Черт. 186.

3° Функция

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

непрерывная в интервале $(-\infty, +\infty)$, называется гиперболическим тангенсом. Гиперболический тангенс является нечетной функцией: $\operatorname{th} x=-\operatorname{th}(-x)$.

Из равенства

$$\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \tag{3}$$

следует, что $\operatorname{th} x$ возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$; в силу нечетности, $\operatorname{th} x$ возрастает и в полуинтервале $(-\infty, 0]$; следовательно, $\operatorname{th} x$ возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Из равенства (3) следует, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th} x=1$, а в силу свойства нечетности, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th} x=-1$ (черт. 186).

Возводя в квадрат и вычитая почленно из равенства (2) равенство (1), получим основное соотношение между гиперболическими функциями:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1. \tag{4}$$

Применительно к гиперболическим функциям имеют место теоремы сложения, весьма похожие на соответствующие теоремы, относящиеся к тригонометрическим функциям. Так, например,

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y. \tag{5}$$

Для доказательства проделаем следующие преобразования:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\frac{2e^xe^y-2e^{-x}e^{-y}}{4}=$$

$$=\frac{[e^xe^y+e^xe^{-y}-e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}]+[e^xe^y-e^xe^{-y}+e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}]}{4}=$$

$$=\frac{(e^x-e^{-x})\,(e^y+e^{-y})}{4}+\frac{(e^x+e^{-x})\,(e^y-e^{-y})}{4}=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y.$$

Аналогично доказываются формулы:

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \tag{6}$$

и

$$\operatorname{th}(x+y)=\frac{\operatorname{th}x+\operatorname{th}y}{1+\operatorname{th}x\operatorname{th}y}. \tag{7}$$

Положив в формулах (5) и (6) $x=y$, получим:

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x \tag{8}$$

и

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x; \tag{9}$$

из равенств (4) и (9) получим:

$$\operatorname{ch}^2x=\frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}\quad\text{и}\quad\operatorname{sh}^2x=\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}.$$

Предоставляем читателю вывести дальнейшие формулы, аналогичные известным формулам гониометрии.

4° Функция $x=\operatorname{sh}y$ определяет обратную функцию, возрастающую и непрерывную в интервале $-\infty<x<+\infty$. Эта функция обозначается символом $\operatorname{Ar}\operatorname{sh}x$. Чтобы выразить эту функцию при помощи формулы, надо решить уравнение:

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\quad\text{или}\quad e^{2y}-2xe^y-1=0,$$

откуда находим:

$$y=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2+1}\right).$$

Из двух знаков перед радикалом следует взять знак $+$, ибо только при таком выборе знака выражение, находящееся под знаком логарифма, будет положительным.

Итак,

$$\operatorname{Ar}\operatorname{sh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

5° Функция $x=\operatorname{ch}y$ возрастает на полусегменте $0\leqslant y<+\infty$ и отображает его на полусегмент $1\leqslant x<+\infty$. Обратная функция обозначается символом $y=\operatorname{Ar}\operatorname{ch}x$; она возрастает и непрерывна на полусегменте $1\leqslant x<+\infty$ и отображает его на полусегмент $0\leqslant y<+\infty$.

Решая уравнение

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

относительно y, находим:

$$y=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right),\quad(\text{где } 1\leqslant x).$$

Из двух знаков следует взять знак $+$, ибо только при таком выборе знака будут выполнены неравенства $0 \leqslant y < +\infty$. В самом деле,

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \geqslant 0$$

и

$$\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \leqslant 0.$$

Значит,

$$\operatorname{Ar\,ch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

6° Функция $y = \operatorname{Ar\,th} x$, обратная функции $x = \operatorname{th} y$, выражается следующей формулой:

$$\operatorname{Ar\,th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Предлагаем читателю доказать, что эта функция возрастает и непрерывна в интервале $(-1, 1)$ и отображает этот интервал на интервал

$$-\infty < y < +\infty.$$

§ 56. Техника вычисления пределов элементарных функций

Во многих случаях искомый предел может быть вычислен путем непосредственного применения теорем о действиях над пределами, о пределе сложной функции и о непрерывных функциях.

Остановимся на рассмотрении некоторых случаев отыскания пределов, когда указанные теоремы непосредственно неприменимы.

Теорема о пределе частного $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ неприменима, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0.$$

Точно так же, если

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = \lim_{x\to a}|\varphi(x)| = +\infty,$$

частное может иметь предел и может не иметь предела в точке a, что зависит от вида функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Подобным же образом неприменима теорема о пределе произведения $f(x)\varphi(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$. Заметим, что этот последний случай может быть сведен к предыдущим, ибо

$$f(x)\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}.$$

Теорема о пределе разности $f(x)-\varphi(x)$ неприменима, если

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\varphi(x)$$

оба равны $+\infty$ или оба равны $-\infty$.

Пусть далее

$$F(x)=[f(x)]^{\varphi(x)},$$

где

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim \varphi(x)=0 \quad \text{и} \quad f(x)>0;$$

имеем:

$$F(x)=e^{\varphi(x)\ln f(x)}.$$

Для выяснения вопроса о существовании предела функции $F(x)$ в точке a исследуем показатель степени: $\varphi(x)\ln f(x)$.

Так как

$$\lim_{x\to a}|\ln f(x)|=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0,$$

то исследование предела показателя сводится к рассмотренному случаю: если

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)=k,$$

то (по теореме о пределе сложной функции) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=e^k$;

если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=+\infty$;

если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=0$.

Подобным же образом следует поступать при исследовании предела функции $[f(x)]^{\varphi(x)}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=1, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to a}|\varphi(x)|=+\infty,$$

а также если

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0.$$

Для удобства в дальнейшем введем следующие обозначения. Если функция $f(x)$ имеет в данной точке a предел, равный 1, то обозначим (в окрестности точки a)

$$f(x)=E\,*.$$

Для обозначения разных функций, имеющих предел, равный 1, будем писать E, E_1, E_2 ... Заметим, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, где $l\neq 0$ и $l\neq\pm\infty$, то

$$f(x)=lE,$$

ибо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{l}=1$ и, следовательно, $\dfrac{f(x)}{l}=E$.

* Этим удобным обозначением пользовался Н. М. Гюнтер.

Ниже дается сводка основных формул, наиболее часто встречающихся в практике вычисления пределов элементарных функций.

1. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad (\text{где } a_n \neq 0);$$

имеем в окрестности точки $+\infty$ (или $-\infty$):

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right).$$

Выражение в скобках имеет в точках $\pm\infty$ предел, равный 1, а потому в окрестности этих точек

$$P(x) = a_0 x^n E.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pm\infty} |P(x)| = +\infty.$$

2. Пусть $R(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$.

По предыдущему, в окрестности точек $\pm\infty$ имеем:

$$R(x) = \frac{a_n x^n E_1}{b_m x^m E_2} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} E,$$

где $E = \dfrac{E_1}{E_2}$. Итак, в окрестности точек $\pm\infty$ (a_n и $b_m \neq 0$)

$$\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} E.$$

В частности, при $n > m$ имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty} |R(x)| = +\infty,$$

при $n < m$ имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = 0,$$

и при $n = m$ имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_n}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; значит, в окрестности точки 0

$$\frac{\sin x}{x} = E,$$

откуда

$$\sin x = Ex.$$

4. $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. По предыдущей формуле в окрестности точки 0 имеем:

$$1-\cos x=2\left(\frac{x}{2}E_1\right)^2=\frac{x^2}{2}E,\quad \text{где}\quad E_1^2=E,$$

откуда

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}E.$$

5. $\operatorname{tg} x=Ex$ в окрестности точки 0.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$ (положив $y=\arcsin x$), откуда в окрестности точки 0 имеем:

$$\arcsin x=Ex.$$

7. Аналогично, в окрестности точки 0

$$\operatorname{arc\,tg} x=Ex.$$

8. Для нахождения предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ положим $\frac{1}{x}=y$; имеем (по теореме о пределе сложной функции):

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e,$$

а также

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

9. Рассмотрим функцию $\ln(1+x)$ в окрестности точки 0. Имеем:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

но

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

а потому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

Отсюда получим:

$$\ln(1+x) = Ex.$$

Для функции $\log_a(1+x)$ имеем:

$$\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a},$$

откуда

$$\log_a(1+x) = \frac{Ex}{\ln a}.$$

10. Рассмотрим функцию e^x в окрестности точки 0. Положим $e^x - 1 = z$, где $\lim\limits_{x\to 0} z = 0$, откуда $x = \ln(1+z) = zE_1$; следовательно, $z = \frac{x}{E_1} = Ex$, т. е. $e^x - 1 = Ex$ или

$$e^x = 1 + Ex;$$

для функции a^x получим:

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + Ex^{\ln a}.$$

Полученные равенства могут быть записаны в виде:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a.$$

11. Рассмотрим функцию $(1+x)^\alpha$ в окрестности точки $x=0$, где α — любое действительное число.

Имеем:

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)} = e^{\alpha x E_1} = 1 + (\alpha x E_1)E_2,$$

откуда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x E.$$

Так, например,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - xE; \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}xE;$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}xE; \qquad \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}xE.$$

12. Рассмотрим функцию $F(x) = [1 + x\varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{x}}$ в окрестности точки 0, где $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = k$ и $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x) = l$.

Имеем:

$$F(x) = e^{\frac{\psi(x)}{x}\ln[1+x\varphi(x)]}.$$

Согласно условиям,

$$\varphi(x) = E_1 k \quad \text{и} \quad \psi(x) = E_2 l.$$

Следовательно (согласно 9),

$$\ln[1 + x\varphi(x)] = x\varphi(x)E_3 = kxE_1E_3,$$

значит,

$$F(x) = e^{klE_1E_2E_3} = e^{klE}.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0} F(x) = e^{kl} \quad \text{или} \quad [1 + x\varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{x}} = e^{kl}E.$$

Для нахождения предела $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty$, нередко пользуются следующей формулой:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim \{[1 + (u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v} = e^{\lim(u-1)v}$$

в предположении, что $\lim(u-1)v$ существует.

13. Докажем, что при любом $k > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty. \tag{1}$$

Будем рассматривать функцию $\frac{e^x}{x^k}$ при достаточно больших положительных значениях x. Без ущерба для общности можно считать число k натуральным, так как $\frac{e^x}{x^k} > \frac{e^x}{x^{[k]+1}}$, а потому если равенство (1) будет доказано для натурального показателя $[k]+1$, то тем самым оно будет доказано и для любого действительного $k > 0$.

Положив $[x] = n$, примем во внимание следующие очевидные неравенства:

$$\frac{e^x}{x^k} > \frac{2^x}{x^k} > \frac{2^n}{(n+1)^k} = \frac{(1+1)^n}{(n+1)^k} =$$

$$= \frac{1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{k+1} + \ldots + C_n^n}{(n+1)^k} > \frac{C_n^{k+1}}{(n+1)^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!\,(n+1)^k}.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(n+1)^k(k+1)!} = +\infty,$$

так как степень $(k+1)$ относительно n числителя выше степени (k) знаменателя. Следовательно, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty.$$

При любом $\alpha > 0$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^k} = +\infty.$$

В самом деле, положим $\alpha x = y$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^k} = \alpha^k; \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^k} = +\infty.$$

При любом $\alpha > 1$ имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\alpha x}}{x^k} = +\infty.$$

В самом деле, достаточно заметить, что

$$a^{\alpha x} = e^{\alpha \ln a \cdot x}.$$

Итак, при любых $a > 1$, $\alpha > 0$, $k > 0$ имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\alpha x}}{x^k} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^{\alpha x}} = \lim x^k \cdot a^{-\alpha x} = 0.$$

Так, например,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2} = +\infty.$$

14. Для нахождения предела

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^k x}{x^n},$$

где k и n — любые положительные числа, сделаем замену $\ln x = y$; получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^k x}{x^n} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^k}{e^{ny}} = 0.$$

15. Для нахождения предела $\lim\limits_{x\to0+} x^n \ln^k x$, где k и n — любые положительные числа, сделаем замену: $y = \frac{1}{x}$; тогда

$$\lim_{x\to0+} x^n \ln^k x = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-\ln y)^k}{y^n} = 0.$$

Итак,

$$\lim_{x\to0} x^n \ln^k x = 0,$$

где n и k — любые положительные числа. Например,

$$\lim_{x\to0} x \ln x = 0, \quad \lim_{x\to0} \sqrt{x} \ln^3 x = 0.$$

16. Рассмотрим правый предел в точке 0 функции $\frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^n}$, где $k > 0$ и $n > 0$; положим $x = \frac{1}{y}$; получим:

$$\lim_{x\to0+} \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^n} = \lim_{y\to+\infty} e^{-ky} y^n = 0.$$

Подобным же образом получим:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x^n} = 0.$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$.

Так как числитель и знаменатель суть многочлены, обращающиеся в нуль в точке 1, то они делятся на $x-1$:

$$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1);$$
$$x^3+x^2-x-1=(x+1)^2(x-1).$$

Следовательно, в окрестности точки 1 имеет место равенство:

$$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{x^2+1}{(x+1)^2},$$

откуда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

Числитель и знаменатель суть многочлены относительно $\sin x$, поэтому удобно положить $\sin x=y$. Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} y=\dfrac{1}{2}$, то (по теореме о пределе сложной функции):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+2}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1}=$$

$$=\lim\frac{(2\ -1)(y+1)}{(2y-1)(y-1)}=\lim\frac{y+1}{y-1}=-3.$$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$.

Данная функция является рациональной относительно $\cos x$ и $\sin x$, поэтому удобно положить $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Воспользуемся известными формулами тригонометрии:

$$\sin x=\frac{2y}{1+y^2};\ \cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y=\lim\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,$$

то после элементарных преобразований получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}=\lim_{y\to 1}\frac{2(1-y)}{2y(1-y)}=\lim\frac{1}{y}=1.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+1}{3x^3+2x-5}=\lim\dfrac{1}{3}E=\dfrac{1}{3}$ (формула 2).

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, где m и n — любые действительные числа.

Положим $x=1+y$, тогда $\lim\limits_{x\to1}y=0$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^m-1}{(1+y)^n-1}=\lim\frac{myE_1}{nyE_2}=\frac{m}{n}$$ (формула 11).

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}$.

Воспользовавшись подстановкой предыдущей задачи, положим $x=1+y$, тогда получим: $x^s-1=syE_s=s(x-1)E_s$, а потому искомый предел равен

$$\lim_{x\to1}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-1)^kE_nE_{n-1}\ldots E_{n-k+1}}{1\cdot2\ldots k(x-1)^kE_1E_2\ldots E_k}=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\ldots k}=C_n^k.$$

$$7.\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}=\lim\frac{1+\frac{3}{5}x^4E_1-(1-xE_2)}{x+x^2}=$$

$$=\lim\frac{xE_2+\frac{3}{5}x^4E_1}{x+x^2}=1$$ (формула 11).

8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

Преобразуем радикалы так, чтобы было возможно применить формулу 11

$$\sqrt{1+x+x^2}=|x|\sqrt{1+\frac{1+x}{x^2}}=|x|\left(1+\frac{1+x}{2x^2}E_1\right);$$

$$\sqrt{1-x+x^2}=|x|\sqrt{1+\frac{1-x}{x^2}}=|x|\left(1+\frac{1-x}{2x^2}E_2\right);$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim\frac{(1+x)E_1-(1-x)E_2}{2|x|}=$$

$$=\lim\left[\frac{x(E_1+E_2)}{2|x|}+\frac{E_1-E_2}{2|x|}\right].$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=1\ \text{и}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=-1,$$

получим:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=1$$

и

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=-1.$$

$$9.\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}=\lim\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}}.$$

Откуда получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}=1 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}=-1.$$

$$10.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\ \dots\ (x+a_k)}-x\right)=$$

$$=\lim\left(\sqrt[k]{x^k+(\Sigma a_i)\,x^{k-1}+(\Sigma a_ia_j)\,x^{k-2}+\ \dots\ +a_1a_2\ \dots\ a_k}-x\right)=$$

$$=\lim x\left(\sqrt[k]{1+\frac{(\Sigma a_i)\,x^{k-1}+\ \dots\ +a_1a_2\ \dots\ a_k}{x^k}}-1\right)=$$

$$=\lim x\left(\frac{\Sigma a_ix^{k-1}+\ \dots\ +a_1a_2\ \dots a_k}{kx^k}\right)=\frac{\Sigma a_i}{k}=\frac{a_1+a_2+\ \dots\ +a_k}{k}$$

(формула 11).

11. Определить λ и μ таким образом, чтобы имело место равенство:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0.$$

Преобразовав $\sqrt[3]{1-x^3}$ в окрестности точки $+\infty$ следующим образом:

$$\sqrt[3]{1-x^3}=-x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}=-x\left(1-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}E\right)=\frac{E}{3x^2}-x,$$

получим:

$$\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu=-x\,(1+\lambda)-\mu+\frac{E}{3x^2}.$$

Положим для краткости:

$$\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu=\Phi(x).$$

Если $\lambda\neq-1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}|\Phi(x)|=+\infty$, поэтому необходимым условием существования равного нулю предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)$ является условие $\lambda=-1$. При $\lambda=-1$ получим $\Phi(x)=-\mu+\frac{E}{3x^2}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=-\mu$. Если $\mu=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=0$.

$$12.\ \lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\frac{mxE_1}{nxE_2}=\frac{m}{n}$$ (формула 3).

$$13.\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\frac{\sin Ex}{x}=\lim\frac{E_1Ex}{x}=1$$ (формула 3).

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos \beta x}}{x^2}=\lim\dfrac{\sqrt[m]{1-\frac{\alpha^2x^2}{2}E_1}-\sqrt[m]{1-\frac{\beta^2x^2}{2}E_2}}{x^2}=$

$$=\lim\frac{\left(1-\frac{\alpha^2x^2}{2m}E'\right)-\left(1-\frac{\beta^2x^2}{2m}E''\right)}{x^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2m}$$ (формулы 4 и 11).

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x-1})=$

$$=\lim\left(2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{2}\right)=$$

$$=\lim\left(2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2x}E\right)}{2}\right)=0,$$

ибо

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2x}E\right)}{2}=\lim\frac{E_1}{4\sqrt{x}}=0,$$

а

$$\left|\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{2}\right|\leqslant 1$$ (формулы 11 и 3).

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{Ex}=e$ (формулы 2 и 12).

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\dfrac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\dfrac{E_1x\cdot\frac{1}{2}x^2E_2}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$

(формулы 3 и 4).

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{3x}}=\lim\left(1+\dfrac{E_1}{x}\right)^{\frac{2Ex}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$

(формулы 2 и 12).

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^3+2}{3x^3+1}\right)^{x^3}=\lim\left(1+\dfrac{1}{3x^3+1}\right)^{x^3}=$

$$=\lim\left(1+\frac{1}{3x^3}E\right)^{x^3}=e^{\frac{1}{3}}$$ (формула 12).

20. $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}+\lambda\sin\dfrac{x}{m}\right)^m=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{m^2}E_1\right)+\lambda\frac{x}{m}E_2\right]^m=$

$$=\lim\left[1+\lambda\frac{x}{m}E_2-\frac{1}{2}\frac{x^2}{m^2}E_1\right]^m=\lim\left[1+\lambda\frac{x}{m}E\right]^m=e^{\lambda x}$$

(формулы 3, 4, 12).

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}=\lim\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2x^2E_1\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{2}\beta^2x^2E_2\right)}=$

$$=\lim\frac{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2E'}{-\frac{1}{2}\beta^2x^2E''}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}\quad\text{(формулы 4, 9).}$$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}$, где α и β — положительные числа;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}=\lim\frac{\ln e^{\alpha x}+\ln(1+e^{-\alpha x})}{\ln e^{\beta x}+\ln(1+e^{-\beta x})}=$$

$$=\lim\frac{\alpha x+e^{-\alpha x}E_1}{\beta x+e^{-\beta x}E_2}=\frac{\alpha}{\beta}\quad\text{(формула 9).}$$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2^x}{x}=\lim\dfrac{1+xE_1-(1+xE_2\ln 2)}{x}=$

$$=\lim\frac{x(E_1-E_2\ln 2)}{x}=1-\ln 2\quad\text{(формула 10).}$$

24. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ \dots\ +\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n=$

$$=\lim\left(\frac{k+\frac{1}{n}(\ln a_1E_1+\ln a_2E_2+\ \dots\ +\ln a_kE_k}{k}\right)^n=$$

$$=\lim\left(1+\frac{1}{n}\,\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ \dots\ +\ln a_k}{k}\,E\right)^n=e^{\frac{\ln(a_1a_2\ \dots\ a_k)}{k}}=$$

$$=\sqrt[k]{a_1a_2\ \dots\ a_k}\quad\text{(формулы 10, 12).}$$

25. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=\lim n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)$.

Если воспользоваться формулой 10, то получим:

$$n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)=n^2\left(\frac{1}{n}\ln aE_1-\frac{1}{n+1}\ln aE_2\right).$$

Из полученного выражения не видно, существует ли искомый предел и если существует, то каково его значение. Поступим в данном случае следующим образом:

$$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=a^{\frac{1}{n+1}}\,\frac{\ln a}{n(n+1)}\,E.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)=\lim\left[a^{\frac{1}{n+1}}\cdot\ln a\cdot\frac{n^2}{n(n+1)}\,E\right]=\ln a.$$

26. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = 1$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim \frac{(1+x)^x}{x^x} = 1$.

§ 57. Примеры нахождения пределов последовательностей

Указанные в предыдущем параграфе основные приемы вычисления пределов наиболее часто применяются на практике, но было бы ошибкой считать, что эти приемы «во всех случаях» приводят к цели. Нередко при вычислении пределов приходится пользоваться специальными свойствами данных функций, а также различными искусственными приемами. Эти приемы невозможно предусмотреть (ввиду их многообразия) общей теорией. Ниже приводятся примеры нахождения пределов последовательностей посредством различных частных приемов.

1. Доказать сходимость и найти предел последовательности:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = \frac{x_1+x_2}{2},\ x_4 = \frac{x_2+x_3}{2},\ \ldots,\ x_n = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2},\ \ldots$$

Так как

$$x_3 = \frac{a+b}{2},\ \text{то}\ x_4 = \frac{b+\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{a+3b}{4} = \frac{a+2b}{3} + \frac{b-a}{3\cdot 2^2},$$

$$x_5 = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a+2b}{3}+\frac{b-a}{3\cdot 2^2}}{2} = \frac{a+2b}{3} - \frac{b-a}{3\cdot 2^3}.$$

Докажем методом полной индукции, что

$$x_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^n \frac{b-a}{3\cdot 2^{n-2}}. \qquad (1)$$

Предположим, что равенство (1) справедливо при любом $n \leqslant k$. Покажем, что тогда оно справедливо при $n = k+1$. Имеем:

$$x_{k+1} = \frac{x_k+x_{k-1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a+2b}{3} + (-1)^k \frac{b-a}{3\cdot 2^{k-2}} + \frac{a+2b}{3} + (-1)^{k+1}\frac{b-a}{3\cdot 2^{k-3}}\right] =$$

$$= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{k-1}\frac{1}{2}\frac{b-a}{3\cdot 2^{k-3}}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{k+1}\frac{b-a}{3\cdot 2^{k-1}}.$$

Из (1) следует что $\lim x_n$ существует и равен $\frac{a+2b}{3}$.

2. Доказать, что последовательность $s_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает, и найти ее предел. Имеем:

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}\ *.$$

Откуда

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \frac{n+1}{n},$$

---

* См. § 20, стр. 85, неравенство $(1+h)^n > 1+nh$.

и, следовательно,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

или, что одно и то же,

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

т. е.

$$s_{n-1} > s_n.$$

Нахождение $\lim s_n$ не представляет затруднений:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nE} = e.$$

3. Доказать, что последовательность

$$a_1 = 1 - \ln 1,\ a_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln 2,\ \ldots,$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ \ldots \qquad \{a_n\}$$

является убывающей и ограниченной.

Рассмотрим две последовательности:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ и } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

первая убывает, а вторая возрастает, обе сходятся к e. Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

откуда

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1 > n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

а потому

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

или

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

При $n = 1, 2, 3, \ldots, k$ получим:

$$\ln 2 - \ln 1 < 1;$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2};$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}.$$

Складывая эти неравенства почленно, получим:

$$\ln(k+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k},$$

а потому

$$a_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\ \ldots\ +\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\ln(k+1)>0.$$

Таким образом, члены данной последовательности положительны. Далее

$$a_k-a_{k+1}=-\frac{1}{k+1}+\ln(k+1)-\ln k=\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}>0.$$

Значит, последовательность $\{a_n\}$ убывает и ограничена снизу. Следовательно, $\lim a_n$ существует. Обозначим его буквой C. Итак,

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}-\ln n\right)=C. \tag{2}$$

Число C называется константой Эйлера; ее приближенное значение равно 0,5772.

4. Найти предел последовательности:

$$1+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6};\ \ldots$$

$$\ldots;\ \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2n};\ \ldots$$

В силу примера 3,

$$1+\frac{1}{2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2n}=\ln 2n+C+\alpha_1,\ \text{где}\ \lim_{n\to+\infty}\alpha_1=0,$$

$$1+\frac{1}{2}+\ \ldots\ +\frac{1}{n-1}=\ln(n-1)+C+\alpha_2,\ \text{где}\ \lim_{n\to+\infty}\alpha_2=0$$

(C—константа Эйлера).

Вычитая почленно, получим:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ \ldots\ +\frac{1}{2n}=\ln 2n-\ln(n-1)+\alpha_1-\alpha_2=\ln\frac{2n}{n-1}+\alpha_1-\alpha_2,$$

откуда

$$\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ \ldots\ +\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

5. Доказать, что, если $\lim a_n=a$, то

$$\lim\frac{a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n}{n}=a.$$

Обозначим $a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n$ через s_n.

Доказательство основано на следующем свойстве средних арифметических: *если числа k_1, k_2, ..., k_m содержатся в некотором интервале (c, d), то в том же интервале содержится их среднее арифметическое.*

Имеем:

$$c<k_1<d;\ c<k_2<d,\ \ldots,\ c<k_m<d.$$

Складывая почленно и деля на m, получим:

$$c<\frac{k_1+k_2+\ \ldots\ +k_m}{m}<d.$$

(Случай бесконечного промежутка предоставляем рассмотреть читателю.)

Пусть N — любое натуральное число; при $n > N$ имеем:

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N + (s_n - s_N)}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \ldots + a_n}{n-N}\left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

Пусть a — действительное число, число N можно выбрать настолько большим, чтобы все члены a_{N+1}, a_{N+2}, ... содержались в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, тогда в том же интервале содержится $\frac{a_{N+1} + \ldots + a_n}{n-N}$. Это отношение можно представить в виде $a+\alpha$, где $|\alpha| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + (a+\alpha)\left(1 - \frac{N}{n}\right),$$

откуда

$$\left|\frac{s_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{|s_N|}{n} + |\alpha| + |a+\alpha|\frac{N}{n} \leqslant \frac{|s_N|}{n} + |\alpha| + (|a| + \varepsilon)\frac{N}{n}.$$

При данном N число n можно выбрать настолько большим, чтобы первое и третье слагаемые были меньше ε, а потому при всех достаточно больших n имеем:

$$\left|\frac{s_n}{n} - a\right| < 3\varepsilon. \quad \text{Значит,} \quad \lim \frac{s_n}{n} = a.$$

Пусть $a = \pm\infty$; положим для определенности $a = +\infty$, тогда при достаточно большом N члены a_{N+1}, a_{N+2}, ... больше заданного числа M (как угодно большого), а потому

$$\frac{s_n}{n} > \frac{s_N}{n} + M\left(1 - \frac{N}{n}\right);$$

так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_N}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{N}{n}\right) = 1$, то $\lim \frac{s_n}{n} = +\infty$.

Примечание. Если последовательность средних арифметических $\frac{s_n}{n}$ сходится, то отсюда не следует, что данная последовательность сходится. Положим, например,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}, \quad \ldots$$

Имеем:

$$\frac{s_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{(если } n \text{ — четное);} \\ \dfrac{n+1}{2n} & \text{(если } n \text{ — нечетное),} \end{cases}$$

откуда $\lim \frac{s_n}{n} = \frac{1}{2}$, тогда как данная последовательность расходится.

6. Если последовательность положительных чисел a_1, a_2, ..., a имеет предел (конечный или бесконечный), равный a, то тот же предел имеет последовательность средних геометрических:

$$a_1, \quad \sqrt{a_1 a_2}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad \ldots$$

В самом деле,

$$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

Так как

$$\lim \ln a_n = \begin{cases} \ln a & (\text{при } 0 < a < +\infty); \\ -\infty & (\text{при } a = 0); \\ +\infty & (\text{при } a = +\infty), \end{cases}$$

то

$$\lim \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = \begin{cases} \ln a & (\text{при } a > 0); \\ -\infty & (\text{при } a = 0); \\ +\infty & (\text{при } a = +\infty), \end{cases}$$

а потому

$$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \begin{cases} a & (\text{при } 0 < a < +\infty); \\ 0 & (\text{при } a = 0); \\ +\infty & (\text{при } a = +\infty). \end{cases}$$

7. Показать, что если

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \quad \text{то} \quad \lim \sqrt[n]{a_n} = l,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — некоторая последовательность положительных чисел. В самом деле (см. предыдущий пример),

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = l.$$

8. Вычислить $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$

Положим,

$$a_n = \frac{n!}{n^n};$$

имеем:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Значит (см. пример 7),

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

9. Найти предел последовательности:

$$\cos \frac{x}{2}, \quad \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2}, \quad \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3}, \dots,$$

где $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Так как

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin x}{2 \sin \frac{x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2^2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2^2}}; \quad \dots; \quad \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}}; \quad \dots,$$

то, перемножив эти равенства почленно, получим:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

но

$$\lim\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\frac{\sin x}{2^nE\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

Значит,

$$\lim\left[\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right]=\frac{\sin x}{x}.$$

10. Найти $\lim\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2^2}}+e^{-\frac{x}{2^2}}}{2}\ldots\frac{e^{\frac{x}{2^n}}+e^{-\frac{x}{2^n}}}{2}\right]$.

Иначе говоря, мы ищем предел

$$\lim\left[\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2^2}\ldots\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}\right].$$

Приняв во внимание равенство

$$\operatorname{sh}\alpha=2\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2},$$

получим, как и в предыдущем примере:

$$\lim\left[\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2^2}\ldots\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}\right]=\lim\frac{\operatorname{sh}x}{2^n\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}.$$

Примем во внимание, что

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}=\lim\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha}=\lim\frac{(1+E_1\alpha)-(1-E_2\alpha)}{2\alpha}=1.$$

Значение искомого предела равно

$$\frac{\operatorname{sh}x}{x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2x}.$$

11. Даны два положительные числа a и b; рассмотрим две последовательности:

$$x_1=a,\quad x_2=\frac{a+b}{2},\quad\ldots,\quad x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2},\quad\ldots$$

$$y_1=b,\quad y_2=\sqrt{x_2b},\quad\ldots,\quad y_n=\sqrt{x_ny_{n-1}},\quad\ldots$$

Если $a<b$, то положим $a=b\cos\varphi$, где $\varphi=\arccos\frac{a}{b}$.

Значит,

$$x_1=b\cos\varphi,\quad y_1=b;\quad x_2=b\cos^2\frac{\varphi}{2},\quad y_2=b\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$x_3=b\cos\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2^2},\quad y_3=b\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}.$$

Методом полной индукции докажем, что

$$y_n = b\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\ \ldots\ \cos\frac{\varphi}{2^{n-1}} \quad \text{и} \quad x_n = y_n\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}.$$

Значит (см. пример 9),

$$\lim y_n = b\,\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{b^2}}}{\arccos\dfrac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\dfrac{a}{b}};$$

$$\lim x_n = \lim\left(y_n\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\right) = \lim y_n.$$

Если $a > b$, то положим $a = b\operatorname{ch}\varphi$, где $\varphi = \operatorname{Ar\,ch}\dfrac{a}{b} = \ln\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right) - \ln b$. Подобно предыдущему, найдем:

$$\lim x_n = \lim y_n = b\,\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\ln\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)-\ln b}.$$

12. Вычислить предел последовательности:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1};\ \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1};\ \ldots;\ \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\ \ldots\ \frac{n^3-1}{n^3+1},\ \ldots$$

Так как

$$(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1,$$

то

$$\frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)};$$

$$\frac{3^3-1}{3^3+1} = \frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)} = \frac{2(3^2+3+1)}{4(2^2+2+1)};$$

$$\frac{4^3-1}{4^3+1} = \frac{(4-1)(4^2+4+1)}{(4+1)(4^2-4+1)} = \frac{3(4^2+4+1)}{5(3^2+3+1)};$$

. . . . . .

$$\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}.$$

Перемножив эти равенства, имеем:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\ \ldots\ \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{1\cdot 2(n^2+n+1)}{n(n+1)(2^2-2+1)}.$$

Значит, искомый предел равен $\dfrac{2}{3}$.

13. Покажем, что последовательность

$$y_1 = \frac{x}{2},\quad y_2 = \frac{x}{2}-\frac{y_1^2}{2},\quad y_3 = \frac{x}{2}-\frac{y_2^2}{2},\quad \ldots,\quad y_n = \frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2},\ \ldots,$$

где $0<x<1$, сходится. Имеем:

$$y_1-y_2=\frac{y_1^2}{2};$$

$$y_2-y_3=\frac{y_2^2-y_1^2}{2};$$

$$y_3-y_4=\frac{y_3^2-y_2^2}{2}.$$

. . . . . .

Складывая неравенства по два, получим:

$$y_1-y_3=\frac{y_2^2}{2}>0; \quad y_2-y_4=\frac{y_3^2-y_1^2}{2}<0.$$

Методом полной индукции покажем, что

$y_n-y_{n+2}<0$ (при n—четном), $y_n-y_{n+2}>0$ (при n—нечетном).

Значит,

$$y_1>y_3>y_5>\ldots \text{ и } y_2<y_4<y_6<\ldots$$

Покажем, что последовательность ограничена. Предположим, что

$$|y_k|<\frac{1}{2}; \text{ тогда } -\frac{1}{8}<-\frac{y_k^2}{2}<0$$

и

$$-\frac{1}{8}<\frac{x}{2}-\frac{y_k^2}{2}<\frac{1}{2}.$$

Значит,

$$|y_{k+1}|=\left|\frac{x}{2}-\frac{y_k^2}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$

Но $|y_1|=\left|\frac{x}{2}\right|<\frac{1}{2}$; следовательно, $|y_k|<\frac{1}{2}$ при любом k. Таким образом, последовательности

$$y_1, y_3, \ldots \text{ и } y_2, y_4, \ldots$$

сходятся. Положим:

$$\lim y_{2n+1}=l \text{ и } \lim y_{2n}=l_1.$$

Пусть n—число четное. Из равенства

$$y_n-y_{n+1}=\frac{y_n^2-y_{n-1}^2}{2}$$

следует:

$$l_1-l=\frac{l_1^2-l^2}{2}$$

или

$$(l_1-l)(l_1+l-2)=0.$$

Однако невозможно, чтобы $l_1+l=2$, так как $|y_k|<\frac{1}{2}$. Значит, $l_1=l$

Из равенства $y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}$ следует, что $l=\frac{x}{2}-\frac{l^2}{2}$,

откуда

$$l=-1+\sqrt{x+1} \text{ (так как } l>0).$$

14. Даны два положительные числа: a и b; пусть $a>b$. Образуем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$$x_1=\frac{a+b}{2},\quad y_1=\sqrt{ab};$$

$$x_2=\frac{x_1+y_1}{2},\quad y_2=\sqrt{x_1y_1};$$

. . . . . .

$$x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2},\quad y_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}};$$

. . . . . .

Докажем, что эти последовательности сходятся к одному пределу. Очевидно, числа x_n и y_n положительны. Покажем, что $x_n>y_n$. В самом деле,

$$x_n-y_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}-\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{x_{n-1}}-\sqrt{y_{n-1}})^2\geqslant 0.$$

В силу неравенства,

$$x_n-x_{n-1}=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}-x_{n-1}=\frac{y_{n-1}-x_{n-1}}{2}\leqslant 0,$$

а потому последовательнность $\{x_n\}$ не возрастает.

Аналогично,

$$y_n-y_{n-1}=\sqrt{y_{n-1}x_{n-1}}-y_{n-1}=\sqrt{y_{n-1}}(\sqrt{x_{n-1}}-\sqrt{y_{n-1}})\geqslant 0.$$

Значит, последовательность $\{y_n\}$ не убывает. Обе последовательности ограничены:

$$b<y_n\leqslant x_n<a,$$

и, следовательно, сходятся. Обозначим

$$\lim x_n=l_1,\quad \lim y_n=l_2.$$

Но

$$x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2};\ \text{значит,}\ l_1=\frac{l_1+l_2}{2},\ \text{отсюда}\ l_1=l_2.$$

Число $l_1=l_2$ называется средним арифметико-геометрическим чисел a и b.

§ 58. Построение графиков функций

Построение графиков функций имеет большое вспомогательное значение при изучении функций, так как оно дает наглядное геометрическое изображение закона соответствия исследуемой функции. Построение графиков имеет также большое практическое значение. Всякий начерченный график является неточным, приближенным, однако в тех случаях, когда отклонение от истинного графика находится в пределах допустимой ошибки, можно по

графику находить значение функции по значению аргумента, не прибегая к вычислениям, а также по значению $f(a)$ функции находить значения аргумента.

Мы ограничимся лишь самыми простейшими и основными сведениями, которые следует иметь в виду при построении графиков. С надлежащей полнотой вопрос о построении графиков будет изложен в последующих главах.

1° Следует учитывать специфические свойства функции, как ограниченность, монотонность, четность или нечетность, периодичность (см. § 12).

2° Необходимо исследовать функцию в окрестности точек разрыва. В частности, следует выяснить вопрос о существовании односторонних пределов.

3° Следует выяснить вопрос о существовании пределов в точках $+\infty$ и $-\infty$.

4° Для функции, заданной формулой, исследованию указанных свойств должно предпосылаться установление области определения.

5° Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=-f(x)$ зеркальным отражением относительно оси абсцисс, так как ординаты соответственных точек обоих графиков противоположны.

6° Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график $y=f(-x)$ зеркальным отражением относительно оси ординат.

7° Зная график $y=f(x)$, можно построить график $y=|f(x)|$, оставив на месте точки с неотрицательными ординатами и заменив точки с отрицательными ординатами точками, симметричными относительно оси абсцисс.

8° График функции $y=f(x)+b$ может быть получен переносом графика $y=f(x)$ на расстояние $|b|$ «вверх» при $b>0$ и «вниз» при $b<0$.

9° График функции $y=f(x-a)$ может быть получен параллельным переносом графика $y=f(x)$ на расстояние, равное $|a|$, «вправо» при $a>0$ и «влево» при $a<0$. В самом деле, положив $x=x'+a$, получим в новых координатах $y=f(x')$.

10° График функции $y=kf(x)$ (при $k>0$) может быть получен «растяжением в k раз» $\left(\text{при } k<1 \text{ имеем сжатие в } \frac{1}{k} \text{ раз}\right)$ графика $y=f(x)$ от оси абсцисс. В самом деле, положив $y=ky'$, получим в новых координатах $y'=f(x)$.

11° График функции $y=f(kx)$ (при $k>0$) может быть получен «растяжением» от оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз графика $y=f(x)$. В самом деле, положив $x=\frac{1}{k}x'$, получим в новых координатах $y=f(x')$.

12° В целях уточнения графика находятся отдельные точки. В частности, полезно учитывать точки пересечения (если они существуют) графика с осями координат. Остальные точки находятся непосредственным вычислением значений функции при ряде данных численных значений аргумента.

Таковы общие (далеко не исчерпывающие) практические указания, которые надо иметь в виду при построении графиков.

Примеры.

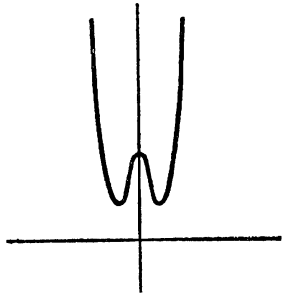
1. Для построения графика биквадратного трехчлена

$$y=x^4-4x^2+5$$

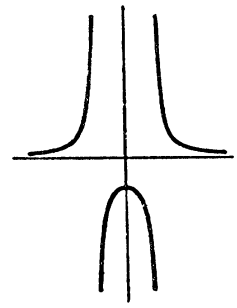
заметим, что данная функция четная. Выделив полный квадрат, получим

$$y=(x^2-2)^2+1.$$

Наименьшее значение y на полусегменте $0\leqslant x<+\infty$ есть $y=1$ при $x=\sqrt{2}$. На сегменте $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ функция убывает, а на полусегменте $\sqrt{2}\leqslant x<+\infty$,



Черт. 187.



Черт. 188

возрастает (что ясно непосредственно из формулы). Имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ и $f(0)=5$. График представлен на чертеже 187.

2. Построить график $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

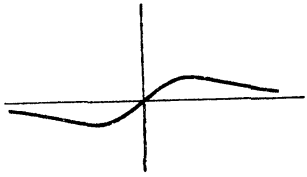
Область определения — система интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ точки разрыва $x=\pm 1$. Функция четная, исследуем ее на полусегменте $[0, +\infty)$. На полусегменте $[0, 1)$ функция убывает: $f(0)=-1$ и $\lim\limits_{x\to 1-} y=-\infty$. В интервале $(1, +\infty)$ имеем $y>0$; функция убывает, $\lim\limits_{x\to 1+} y=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$. График представлен на чертеже 188.

3. Построить график $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Выделив целую часть, получим $y=1+\dfrac{2}{x^2-1}$. Достаточно, взяв график, построенный в предыдущем примере, подвергнуть его растяжению от оси абсцисс в два раза и перенести вверх на расстояние, равное 1.

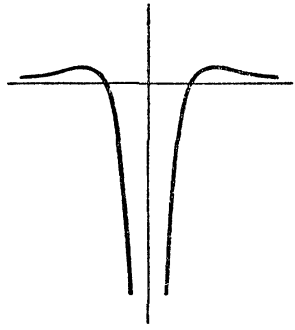
4. $y=\frac{x}{1+x^2}$; функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная, исследуем ее на полусегменте $[0, +\infty]$. Имеем:

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}(1-x_1x_2);\ \text{если}\ 0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1,$$

то $f(x_2)>f(x_1)$; следовательно, $f(x)$ возрастает на сегменте $[0, 1]$. Если $1\leqslant x_1<x_2<+\infty$, то $f(x_2)<f(x_1)$. Следовательно, $f(x)$ убывает на полусегменте $[1, +\infty)$. Значение $f(1)=\frac{1}{2}$ является наибольшим; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (график представлен на черт. 189).



Черт. 189.



Черт. 190.

5. $y=\frac{x^2-1}{x^4}$. Область определения — совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. В силу четности, достаточно исследовать данную функцию в интервале $(0, +\infty)$. Имеем:

$$y\begin{cases}>0 & (\text{если } x>1);\\ <0 & (\text{если } 0<x<1);\\ =0 & (\text{если } x=1).\end{cases}$$

Выделив полный квадрат, получим:

$$y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Наибольшее значение есть $y=\frac{1}{4}$, соответствующее значению $x=\sqrt{2}$. В интервале $(\sqrt{2}, +\infty)$ функция $\frac{1}{x^2}$ убывает, а $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\right)^2$ возрастает; следовательно, y убывает. В интервале $(0, \sqrt{2})$ функция y возрастает.

Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} y=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ (черт. 190).

6. $y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$; область определения состоит из двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Функция нечетная. Исследуем ее в интервале $(0, +\infty)$. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$.

Находим промежутки монотонности:

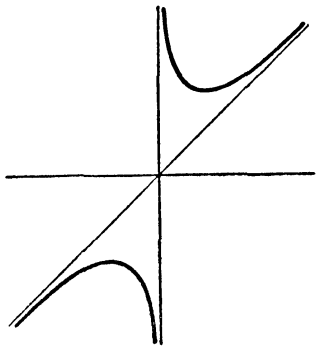
$$f(x_2)-f(x_1)=\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)(x_2-x_1),$$

то при $0<x_1<x_2<1$ имеем $f(x_2)<f(x_1)$, т. е. в интервале (0, 1) функция $f(x)$ убывает. В интервале $(1, +\infty)$ имеем $f(x_2)>f(x_1)$, а потому $f(x)$ возрастает. Наименьшее значение есть $f(1)=2$. В точках $x=k$ и $x=\frac{1}{k}$ значения функции равны.

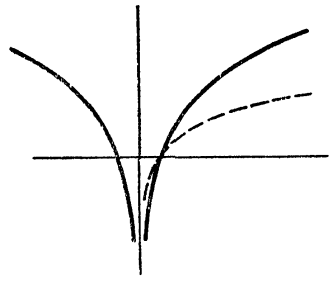
Прямая $y=x$ является асимптотой рассматриваемой линии, ибо

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ (черт. 191).}$$

7. $y=\ln x^2$. Область определения — совокупность интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Функция четная. В интервале $(0, +\infty)$ имеем $y=2\ln x$. Следовательно, в этом интервале график может быть получен растяжением графика $y=\ln x$ в два раза от оси абсцисс (черт. 192).



Черт. 191.



Черт. 192.

8 $y=a\sin x+b\cos x$; функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Имеем:

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Определим угол α из условий

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Знак перед радикалом выберем одинаковым со знаком числа a, тогда $\cos\alpha>0$, и можно считать $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$y=A\sin(x+\alpha)\quad (\text{где } A=\sqrt{a^2+b^2}).$$

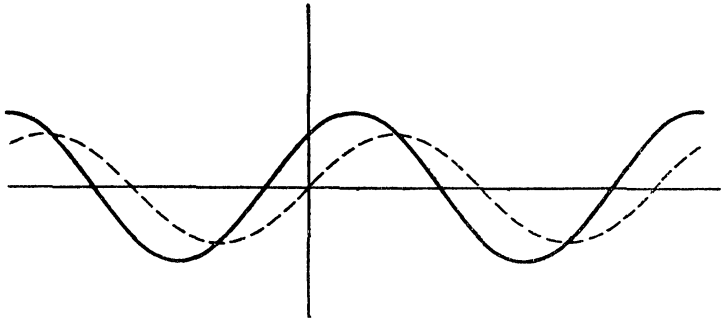
График получается переносом синусоиды в направлении оси OX на расстояние $|\alpha|$ (влево при $\alpha>0$ и вправо при $\alpha<0$), растяжением от оси абсцисс $A|$ раз, и если $A<0$, то отражением в оси OX. На чертеже 193 представлен график

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);$$

пунктиром намечена синусоида.

9. $y=\ln\sin x$. Область определения — совокупность интервалов $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, в которых $\sin x>0$. Функция периодическая с периодом 2π.

Достаточно исследовать $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\sin x$ возрастает и $0 < \sin x < 1$; следовательно, $y < 0$ и возрастает.

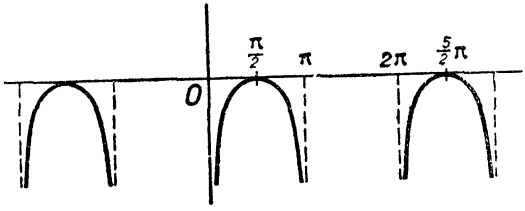


Черт. 193.

В интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ функция $y < 0$ и убывает. Наибольшее значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Имеем:

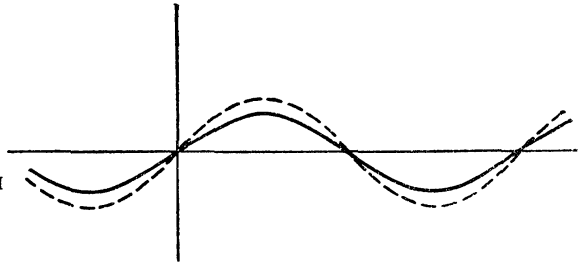
$$\lim_{x \to 0} \ln \sin x = \lim_{x \to \pi} \ln \sin x = -\infty \text{ (черт. 194).}$$

10. $y = \sin(\sin x)$. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная и периодическая с периодом 2π. На сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ возрастает от -1 до 1; в соответствии с этим y возрастает от $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-1)$ до $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 1 \approx 0{,}84$. На сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ функция убывает от $\sin 1$ до $\sin(-1)$. График изображен на чертеже 195; пунктиром намечена синусоида.



Черт. 194.

11. $y = \sin x^2$. Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция $f(x)$ четная; исследуем ее на полусегменте $[0, +\infty)$. На сегменте $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ функция x^2 возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а y возрастает от 0 до 1. На сегменте $\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right]$ функция x^2 возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$, а y убывает от 1 до -1.



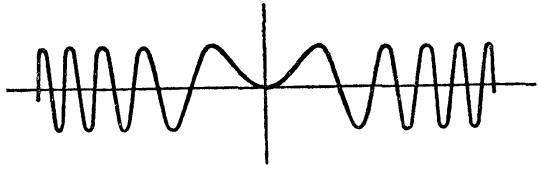
Черт. 195.

На сегменте $\left[\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right]$ функция y возрастает от -1 до 1 и т. д. При этом

$$(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = \cdots = f(\sqrt{n\pi}) = 0.$$

Заметим, что последовательность расстояний между соседними точками пересечения кривой с осью абсцисс имеет предел, равный нулю,

$$\lim\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)=0.$$



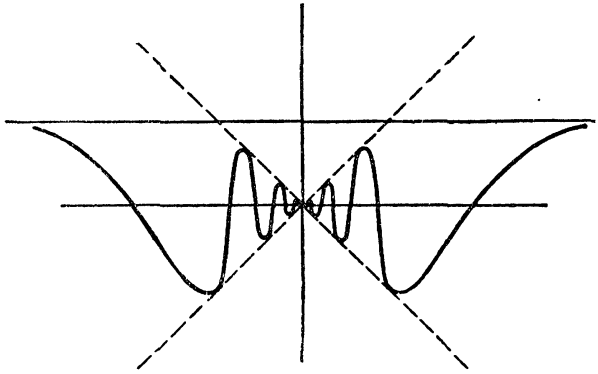
Черт. 196.

Неравенство $\sin x^2 < x^2$ показывает, что кривая расположена под параболой $y=x^2$. График (кривая Френеля) представлен на чертеже 196.

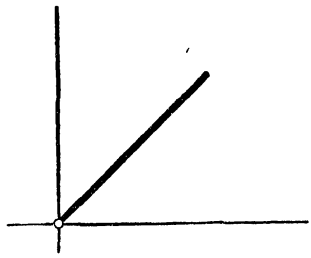
12. $y=x\sin\frac{1}{x}$. Функция четная, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim x\cdot\frac{1}{x}E=1.$$

Точки графика, соответствующие значениям $x=\frac{1}{k\pi}$, лежат на оси OX; точки,



Черт. 197



Черт. 198.

соответствующие значениям $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, лежат на прямой $y=x$, точки,

соответствующие значениям $x=\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, лежат на прямой $y=-x$.

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0 \quad \text{(черт. 197)}.$$

13. $y=e^{\ln x}$. Область определения — интервал $(0, +\infty)$. В этом интервале $y=x$. График есть часть прямой $y=x$, лежащая в I квадранте (черт. 198).

14. Положим $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Область определения — совокупность интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; в интервале $(0, +\infty)$ имеем $0<y<\dfrac{1}{2}$, так как

$$1<e^{\frac{1}{x}}<+\infty.$$

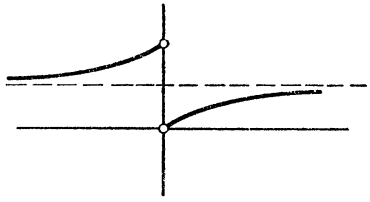
Находим:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0+} y=0, \quad (\text{ибо} \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty).$$

В интервале $(0, +\infty)$ функция $\dfrac{1}{x}$ убывает, $e^{\frac{1}{x}}$ убывает, y возрастает. В интервале $(-\infty, 0)$ функция y возрастает,

$$\frac{1}{2}<y<1, \quad \lim_{x\to-\infty} y=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0-} y=1.$$

Точка 0 есть точка разрыва первого рода (черт. 199).



Черт. 199.

15. $y=\arcsin(\sin x)$. Имеем (по определению арксинуса)

$$\sin y=\sin x, \text{ причем} -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$y=x \quad \text{на сегменте} -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$y=\pi-x \quad \text{на сегменте} \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi;$$

$$y=x-2\pi \text{ на сегменте } \frac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}\pi.$$

И вообще

$$y=x-2k\pi, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi;$$

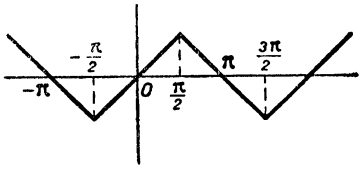
$$y=(\pi-x)+2k\pi, \text{ если} \quad \frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi.$$

График представлен на чертеже 200 в виде ломаной линии.

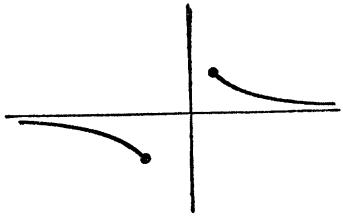
16. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$. Область определения — совокупность промежутков

$(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Функция нечетная. На полусегменте $[1, +\infty)$ функция $\frac{1}{x}$ убывает, а потому y убывает. Имеем:

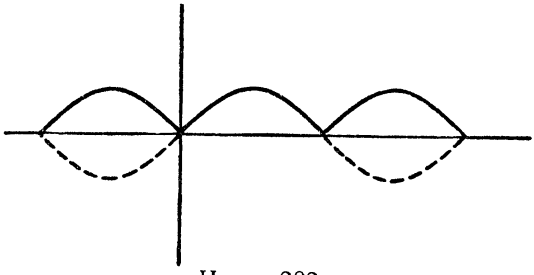
$$\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1-} y = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to+\infty} y = 0 \text{ (черт 201).}$$



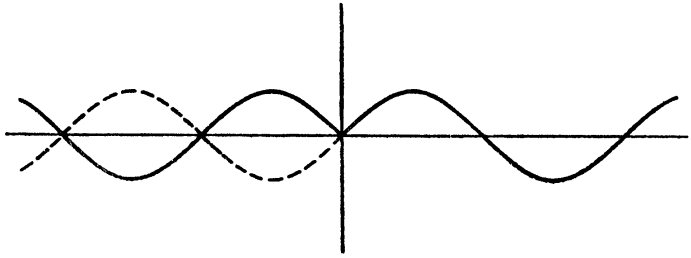
Черт. 200



Черт. 201.



Черт. 202



Черт. 203.

17. На чертеже 202 показано построение графика $y = |\sin x|$, пунктиром намечена синусоида $y = \sin x$.

На чертеже 203 показан график функции $y = \sin|x|$.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА V

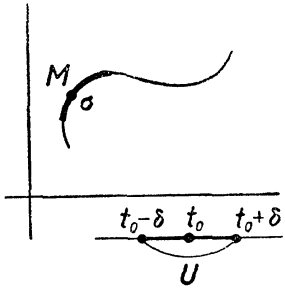
ПРОИЗВОДНАЯ

§ 59. Касательная к линии

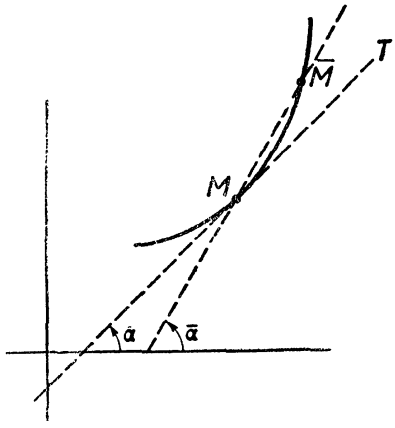
Рассмотрим простую дугу:

$$x = x(t),\ y = y(t);\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

и на ней точку M, являющуюся образом значения параметра t_0, где $\alpha < t_0 < \beta$. Образ на линии окрестности точки t_0 есть некоторая дуга σ линии (черт. 204). Рассмотрим секущую, проходящую через точку M, и произвольную точку $\overline{M}$ дуги σ. Обозна-



Черт. 204.

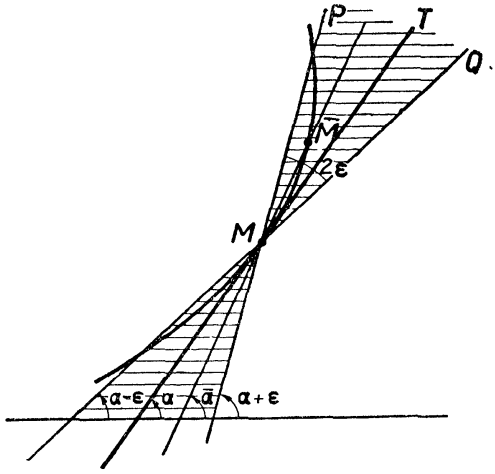


Черт. 205.

чим угол наклона секущей $M\overline{M}$ с осью OX через $\bar{\alpha}$. Каждому значению t параметра (отличному от t_0) соответствует определенная точка $\overline{M}$ линии и угол $\bar{\alpha}$ наклона секущей $M\overline{M}$; значит, $\bar{\alpha}(t)$ есть функция t, определенная в окрестности точки t_0 при $t \neq t_0$ (черт. 205). Предположим, что $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{\alpha}(t)$ существует и равен α, угол назовем пределом угла наклона секущей в точке к оси.

Определение. *Прямая MT, проходящая через точку M с углом наклона к оси OX, равным пределу угла наклона секущей в точке M, называется касательной к данной линии в точке M.*

Проведем через точку M прямые MP и MQ, образующие с осью OX углы $\alpha+\varepsilon$ и $\alpha-\varepsilon$. По определению предела, существует такая окрестность U_{t_0}, что при всяком значении $t \neq t_0$, принадлежащем этой окрестности, имеем $|\alpha(t)-\bar{\alpha}|<\varepsilon$; значит, соответствующая секущая $M\bar{M}$ лежит внутри угла величины 2ε, образованного прямыми MP и MQ (черт. 206). Таким образом, при значениях параметра t, достаточно близких к t_0, угол между соответствующей секущей и прямой MT сколь угодно близок к нулю.



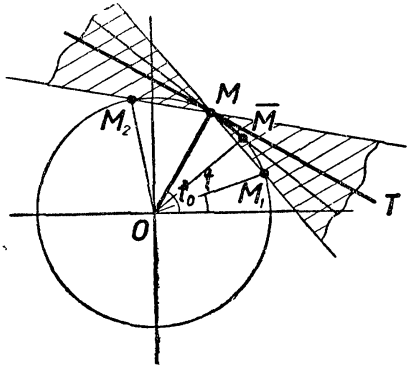
Черт. 206.

Это свойство касательной условно формулируется так: *касательная к линии в точке M есть предельное положение секущих, проходящих через точку M.*

Из определения следует, что в точке M линии либо не существует касательной (если $\lim\limits_{t\to t_0}\bar{\alpha}$ не существует), либо существует одна касательная (в силу теоремы единственности предела).

Примечание. Существование касательной, а также ее положение не связано со способом параметризации линии. В самом деле, перейдем к новому параметру, положив $t=F(\tau)$, где $F(\tau)$ — непрерывная монотонная функция. Пусть t_0 и τ_0 — взаимно соответственные значения параметра. В новой параметризации угол секущей с осью OX имеет, по теореме о пределе сложной функции, тот же предел, что и $\bar{\alpha}(t)$ в точке t_0:

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\bar{\alpha}=\lim_{\tau\to\tau_0}\bar{\alpha}(F(\tau))=\lim_{t\to t_0}\bar{\alpha}(t)=\alpha.$$



Черт. 207.

Примеры.

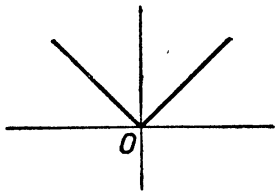
1. Касательная в любой точке к прямой линии совпадает с данной прямой. В самом деле, всякая секущая $M\bar{M}$ совпадает с данной прямой, а потому с ней совпадает и предельное положение секущих.

2. Покажем, что касательная в точке M к окружности, с точки зрения данного нами определения, и касательная, рассматриваемая в курсе элементарной геометрии, совпадают. В самом деле, пусть точка M принадлежит окружности с центром O. Проведем прямую, перпендикулярную радиусу OM (черт. 207). Эта прямая, с точки зрения элементарной геометрии, есть каса-

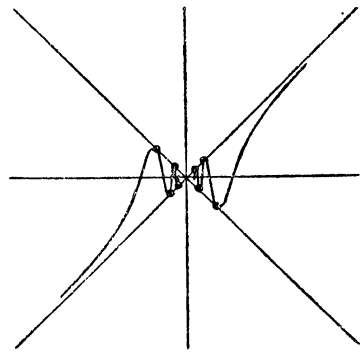
тельная. Покажем, что она есть предельное положение секущих, проходящих через точку M. Действительно, построим две секущие MM_1 и MM_2 под углом ε к MT. Без ограничения общности можно предположить, что центр данной окружности находится в начале координат; тогда ее параметрические уравнения могут быть написаны в виде:

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,$$

где параметром является центральный угол между радиусом, направленным в данную точку окружности, и осью абсцисс. Пусть t_0 — значение параметра, соответствующее точке M. Обозначим равные углы M_1OM и M_2OM через δ; точка M_1 есть образ значения $t_0-\delta$ и точка M_2 — образ значения $t_0+\delta$ параметра. Возьмем на дуге M_2MM_1 произвольную точку $\overline{M}$ — образ значения t параметра; ей соответствует секущая $M\overline{M}$, которая образует с MT угол, меньший ε; значит, MT есть предельное положение секущих, проходящих через точку M, т. е. MT есть касательная к окружности в точке M



Черт. 208.



Черт. 209.

3. Положим $y=|x|$ (параметр $t=x$). В точке $O(0, 0)$ касательная не существует. В самом деле, в любой окрестности точки $x=0$ существуют секущие, совпадающие с двумя различными прямыми $y=x$ (при $x>0$) и $y=-x$ (при $x<0$). Следовательно, предельное положение секущих в точке O не существует (черт. 208).

4. Положим $y=x\cos\frac{1}{x}$. В любой окрестности точки O существуют секущие, совпадающие с прямой

$$y=x\ \left(\text{при } x=\frac{1}{2k\pi}\right) \text{ и с прямой } y=-x\ \left(\text{при } x=\frac{1}{(2k+1)\pi}\right).$$

Следовательно, предельное положение секущих в точке O не существует. Линия не имеет касательной в начале координат (черт 209).

Односторонние касательные. Дана простая дуга

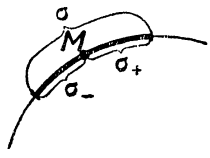
$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \text{где } \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

Пусть дуга σ есть образ δ-окрестности точки t_0, принадлежащей интервалу (α, β). Точка M — образ точки t_0 — разделяет дугу σ на две дуги. Одна из этих дуг σ_+ есть образ значений $t_0\leqslant t<t_0+\delta$, другая σ_- есть образ значений $t_0-\delta<t\leqslant t_0$ (черт. 210). В силу взаимной однозначности, отображения дуги σ_+ и σ_+ не имеют общих точек, кроме M. Эти дуги рассматриваются как лежащие (на линии) по разные стороны относительно точки M.

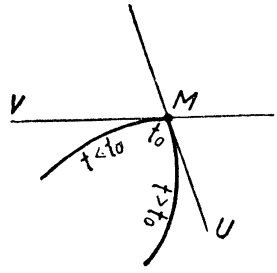
Пусть $\overline{M}$ есть произвольная точка дуги σ_+ и $\bar{\alpha}$—угол наклона секущей $M\overline{M}$.

Если $\lim\limits_{t\to t_0+}\bar{\alpha}$ *существует и равен* α_+, *то прямая* MU *с углом наклона* α_+ *к оси* OX *называется правой* (*при данной параметризации*) *касательной к линии в точке* M (черт. 211).

Аналогично, если $\lim\limits_{t\to t_0-}\bar{\alpha}$ *существует и равен* α_-, *то прямая* MV *с углом наклона* α_- *к* OX *называется левой* (*при данной параметризации*) *касательной к линии в точке* M. Прямые MU и MV называются односторонними касательными к линии в точке M.



Черт. 210.



Черт. 211.

Определение. *Односторонней касательной к линии в точке* M *называется предельное положение секущих, проходящих через точку* M *и через точки линии, лежащие по одну сторону от точки* M.

Если $\lim\limits_{t\to t_0+}\bar{\alpha}=\lim\limits_{t\to t_0-}\bar{\alpha}$, то существует $\lim\limits_{t\to t_0}\bar{\alpha}$. Итак, если односторонние касательные совпадают, то существует касательная в данной точке. Обратное утверждение очевидно. Точка, в которой односторонние касательные различны, называется угловой точкой. В угловой точке касательная не существует.

Примечание. Понятия «правая» и «левая» касательные связаны со способом параметризации. Заменим, например, параметр t на $-t$, тогда «правая» касательная станет «левой», а «левая»—«правой».

Примеры.

1. График $y=|x|$ (параметр $t=x$) в точке O (0, 0) имеет правую касательную—прямую $y=x$ и левую касательную—прямую $y=-x$. Начало координат есть угловая точка.

2. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

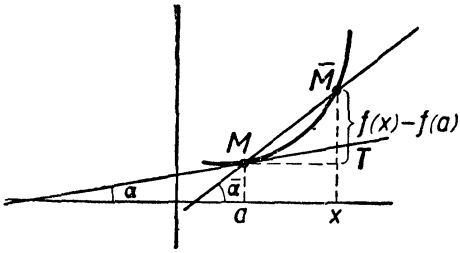
Линия в точке O (0, 0) не имеет односторонних касательных.

В любой окрестности точки $x=0$ существуют значения $x>0$—такие, что прямые $y=x$ и $y=-x$ являются секущими; значит, правой касательной в точке O не существует. Аналогично покажем, что не существует и левой касательной (см. черт. 197).

§ 60. Угловой коэффициент касательной

Рассмотрим функцию $f(x)$, график которой имеет касательную в данной точке M с абсциссой $x=a$. Допустим, что касательная MT не перпендикулярна оси абсцисс. Пусть ε—про-

извольное положительное число, меньшее $\frac{\pi}{2}$; тогда существует такое положительное число δ, что при любом x, принадлежащем δ-окрестности точки a, секущая, проходящая через точки M (с абсциссой a) и $\overline{M}$ (с абсциссой x), образует с касательной угол по абсолютной величине, меньший ε. Обозначим угол, образованный касательной MT с осью абсцисс, через α, $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, (черт. 212) и угол, образованный секущей $M\overline{M}$, через $\overline{\alpha}(x)$. При $|x-a| < \delta$ будем иметь:



Черт. 212.

$$|\overline{\alpha}(x) - \alpha| < \varepsilon, \text{ так как}$$

$$\lim_{x \to a} \overline{\alpha}(x) = \alpha.$$

Так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то при достаточно малом ε угол $\overline{\alpha}(x)$ также отличен от $\frac{\pi}{2}$. Вычислим угловой коэффициент секущей $M\overline{M}$:

$$\operatorname{tg} \overline{\alpha}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

В силу непрерывности тангенса, имеем:

$$\lim_{x \to a} \operatorname{tg} \overline{\alpha}(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Итак, если график непрерывной функции $f(x)$ имеет в точке a касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной находится по формуле:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \operatorname{tg} \alpha.$$

§ 61. Производная

Дана функция $f(x)$, определенная в окрестности точки $x = a$.

Определение. *Производной функции $f(x)$ в точке a называется предел в точке a (конечный) отношения приращения функции к приращению аргумента, т. е.*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Производная функции $f(x)$ в точке a обозначается символом $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ не существует, то функция $f(x)$ не имеет производной в точке a.

Если точка a не является предельной для области определения $f(x)$, то $f'(a)$ не имеет смысла.

Обозначим $x-a=h$; тогда $x=a+h$ и

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Точки, в которых данная функция $f(x)$ имеет производную, образуют некоторое числовое множество $\mathfrak{M}$. Каждому числу $x\in\mathfrak{M}$ соответствует значение производной $f'(x)$; поэтому $f'(x)$ *есть функция, определенная на множестве* $\mathfrak{M}$. Эта функция называется производной функции $f(x)$. Согласно определению, имеем:

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}.$$

Если функция имеет производную в каждой точке некоторого числового множества, то говорят, что она имеет производную на этом множестве. Так, можно говорить о функции, имеющей производную на сегменте, в интервале, в окрестности данной точки и т. д.

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Примеры.

1. Функция $\sin x$ в любой точке a имеет производную, равную $\cos a$. В самом деле,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim\cos\frac{x+a}{2}\cdot E=\cos a.$$

Предоставляем читателю показать, что функция $\cos x$ имеет в любой точке a производную, равную $-\sin a$.

2. $f(x)=x^3$. Имеем:

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{X^3-x^3}{X-x}=\lim(X^2+Xx+x^2)=3x^2$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

3. $f(x)=\sqrt{x}$. Имеем

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{\sqrt{X}-\sqrt{x}}{X-x}=\lim\frac{1}{\sqrt{X}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

в интервале $(0, +\infty)$.

4. $f(x)=\frac{1}{x}$ в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Имеем:

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{\frac{1}{X}-\frac{1}{x}}{X-x}=\lim\left(\frac{-1}{Xx}\right)=-\frac{1}{x^2}.$$

5. Положим $f(x)=|x|$. Имеем:

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ (если } x>0)\\ -x \text{ (если } x<0),\end{cases}$$

откуда (как легко убедится читатель):

$$f'(x)=\begin{cases} 1 \text{ в интервале } (0,\ +\infty)\\ -1 \text{ в интервале } (-\infty,\ 0).\end{cases}$$

В точке 0 производная не существует, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\frac{|x|}{x}$$

не существует.

6. Функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ не имеет производной в точке 0. В самом деле, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке 0.

Теорема. *Если функция имеет производную в точке a, то ее приращение можно представить в следующем виде:*

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\omega(x)(x-a), \qquad (1)$$

где $\omega(x)$ — функция, непрерывная в точке a и равная нулю в этой точке или $\lim\limits_{x\to a}\omega(x)=\omega(a)=0$.

Доказательство. Положим:

$$\omega(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a), \quad \text{если} \quad x\neq a \text{ и } \omega(a)=0.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to a}\omega(x)=\lim\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=f'(a)-f'(a)=0.$$

Равенство (1) имеет место, в силу определения функция $\omega(x)$ и (по доказанному) $\lim\limits_{x\to a}\omega(x)=0=\omega(a)$, ч. т. д.

Следствие. *Функция $f(x)$, имеющая производную в точке a, непрерывна в этой точке.*

В самом деле, из равенства (1) следует, что

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=f'(a)\lim(x-a)+\lim\omega(x)\lim(x-a)=0.$$

Значит,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \text{ ч. т. д.}$$

Обратная теорема места не имеет, т. е. *непрерывная функция может не иметь производной в данной точке.* Например, функция $|x|$, непрерывная в точке 0, не имеет производной в этой точке (см. пример 5).

Можно построить примеры функций, непрерывных в промежутке, но не имеющих производной ни в какой точке этого промежутка.

Примечание. Функция, имеющая производную в точке a и, следовательно, непрерывная в этой точке, может быть разрывной в любой окрестности точки a. Так, например, функция, определенная на множестве всех действительных чисел законом соответствия

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ (если } x \text{ — рациональное число)} \\ -x^2 \text{ (если } x \text{ — иррациональное число),} \end{cases}$$

непрерывна только в одной точке $x = 0$. Легко доказать, что $f'(0)$ существует. В самом деле,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x \text{ (если } x \text{ — рациональное число)} \\ -x \text{ (если } x \text{ — иррациональное число),} \end{cases}$$

откуда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0; \text{ следовательно, } f'(0) = 0.$$

§ 62. Геометрическая интерпретация производной

Согласно сказанному в § 60, если график непрерывной функции $f(x)$ имеет касательную в точке $M(a, f(a))$, не перпендикулярную оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной MT равен производной $f'(a)$. Нетрудно установить справедливость обратного утверждения.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке a, то график $f(x)$ имеет касательную MT в точке $M(a, f(a))$; угловой коэффициент MT равен производной $f'(a)$.*

Доказательство. Из условия следует, что существует предел углового коэффициента секущей $M\overline{M}$ (мы сохраняем обозначения § 60):

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} \bar{\alpha}(x) = \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x),$$

но тогда (в силу непрерывности арктангенса) существует предел угла

$$\bar{\alpha}(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to a}\bar{\alpha}(x)=\lim \operatorname{arc\,tg}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\operatorname{arctg} f'(a).$$

Следовательно, прямая MT, образующая угол

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg} f'(a)$$

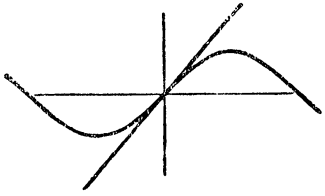
с осью абсцисс, есть предельное положение секущей $M\bar{M}$, т. е. MT есть касательная к графику. Угловой коэффициент равен:

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(a),\text{ ч. т. д.}$$

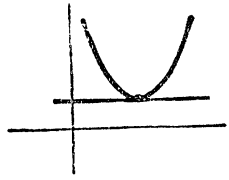
Примеры.

1. $f(x)=\sin x$;

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\lim\frac{\sin x}{x}=1.$$



Черт 213



Черт. 214

Значит, касательная к синусоиде в точке O (0, 0) образует с осью абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{4}$ (черт. 213).

2. $f(x)=x^2+px+q$;

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+px+q)-(a^2+pa+q)}{x-a}=\lim\frac{(x-a)(x+a)+p(x-a)}{x-a}=$$

$$=\lim(x+a+p)=2a+p.$$

В точке с абсциссой $-\frac{p}{2}$ имеем $f'\left(-\frac{p}{2}\right)=0$, а потому касательная в этой точке параллельна оси абсцисс (черт. 214).

§ 63. Механическая интерпретация производной

Рассмотрим материальную точку, движущуюся равномерно. Если за промежуток времени t пройден путь s, то отношение $\frac{s}{t}$ есть константа — скорость движения. Теперь рассмотрим точку, движущуюся неравномерно. Пусть $s(t)$ есть путь, пройденный точкой за время t. Рассмотрим некоторый момент времени t_0 и близкий к нему момент t. За время, истекшее от момента t_0 до момента t, точка прошла путь, равный $s(t)-s(t_0)$. Отношение $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ называется средней скоростью на промежутке

времени от t_0 до t; это отношение, вообще говоря, не является константой. Предел

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

называется скоростью движения в момент времени t_0.

Таким образом, скорость в момент времени t_0 есть производная функции $s(t)$ в точке t_0.

§ 64. Теоремы о производных

Теоремы о действиях над функциями, имеющими производные. В нижеследующих теоремах при совместном рассмотрении двух или нескольких функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ предполагается, что

1° *каждая из функций имеет производную в данной точке* x,

2° *точка* x *принадлежит некоторому промежутку, на котором совместно рассматриваются данные функции.*

Теорема I. *Линейная комбинация функций*

$$F(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)$$

имеет производную, равную

$$F'(x)=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)+\ldots+c_nf_n'(x).$$

Доказательство.

$$F'(x)=\lim_{X\to x}\frac{F(X)-F(x)}{X-x}=$$

$$=\lim\frac{[c_1f_1(X)+c_2f_2(X)+\ldots+c_nf_n(X)]-[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)]}{X-x}=$$

$$=\lim\left[c_1\frac{f_1(X)-f_1(x)}{X-x}+c_2\frac{f_2(X)-f_2(x)}{X-x}+\ldots+c_n\frac{f_n(X)-f_n(x)}{X-x}\right]=$$

$$=c_1\lim\frac{f_1(X)-f_1(x)}{X-x}+c_2\lim\frac{f_2(X)-f_2(x)}{X-x}+\ldots+c_n\lim\frac{f_n(X)-f_n(x)}{X-x}=$$

$$=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)+\ldots+c_nf_n'(x).$$

Итак,

$$[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)]'=$$

$$=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)+\ldots+c_nf_n'(x),\ \text{ч. т. д.}$$

Следствие I. В случае $n=1$ имеем:

$$F(x)=cf(x)\quad\text{и}\quad F'(x)=cf'(x)$$

или

$$[cf(x)]'=cf'(x).$$

Итак, *числовой множитель можно выносить за знак производной.*

Следствие II. Если $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$, то

$$[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

Итак, *производная сумма данных функций равна сумме производных функций.*

Примеры.

1. $F(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $F(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ (где $x \neq 0$).

2. $F(x) = \sqrt{5}\, x^3$; $F'(x) = 3\sqrt{5}\, x^2$.

Теорема II. *Произведение двух функций* $F(x) = f(x)\varphi(x)$ *имеет производную, равную*

$$F'(x) = f(x)\varphi'(x) + f'(x)\varphi(x).$$

Доказательство. Имеем:

$$F(X) - F(x) = f(X)\varphi(X) - f(x)\varphi(x).$$

Прибавим и вычтем $f(X)\varphi(x)$ в правой части, тогда получим:

$$F(X) - F(x) = f(X)\varphi(X) - f(X)\varphi(x) + f(X)\varphi(x) - f(x)\varphi(x) =$$
$$= f(X)[\varphi(X) - \varphi(x)] + \varphi(x)[f(X) - f(x)],$$

откуда

$$\frac{F(X) - F(x)}{X - x} = f(X)\frac{\varphi(X) - \varphi(x)}{X - x} + \varphi(x)\frac{f(X) - f(x)}{X - x}.$$

Так как пределы

$$\lim_{X \to x} f(X) = f(x), \quad \varphi'(x) = \lim_{X \to x}\frac{\varphi(X) - \varphi(x)}{X - x} \quad \text{и} \quad f'(x) = \lim_{X \to x}\frac{f(X) - f(x)}{X - x}$$

существуют, то

$$F'(x) = \lim_{X \to x}\frac{F(X) - F(x)}{X - x} = f(x)\varphi'(x) + \varphi(x)f'(x), \quad \text{ч. т. д.}$$

Примеры.

1. $f(x) = x^3 \sin x$; $f'(x) = x^3(\sin x)' + \sin x\,(x^3)' = \cos x \cdot x^3 + 3x^2 \cdot \sin x$.
2. $f(x) = x|x|$; $f'(x) = x|x|' + |x|x' = x|x|' + |x|$.

Производную в точке 0 по формуле производной от произведения найти нельзя, так как второй сомножитель $|x|$ в этой точке не имеет производной. Как легко видеть,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim|x| = 0.$$

Значит,

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & (x < 0) \\ 2x & (x \geqslant 0). \end{cases}$$

Следствие I. Произведение

$$F(x)=f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$$

имеет производную, равную

$$F'(x)=[f_1'(x)f_2(x)\dots f_n(x)]+[f_1(x)f_2'(x)\dots f_n(x)]+\dots$$
$$\underbrace{\dots+[f_1(x)f_2(x)\dots f_n'(x)]}_{n\text{ слагаемых}}.$$

Предположим, что это утверждение справедливо для произведения k-функций, тогда получим:

$$[f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x)]'=f_1'(x)f_2(x)\dots f_k(x)+$$
$$+f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\dots f_k(x)+\dots+f_1(x)f_2(x)\dots f_k'(x).$$

Докажем, что утверждение справедливо и для произведения $k+1$-функций. Обозначим

$$f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x)=\varphi(x),$$

тогда

$$[f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x)f_{k+1}(x)]'=[\varphi(x)f_{k+1}(x)]'=$$
$$=\varphi'(x)f_{k+1}(x)+\varphi(x)f_{k+1}'(x)=f_1'(x)f_2(x)\dots f_k(x)f_{k+1}(x)+$$
$$+f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\dots f_k(x)f_{k+1}(x)+\dots$$
$$\dots+f_1(x)\dots f_{k-1}(x)f_k'(x)f_{k+1}(x)+[f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x)]f_{k+1}'(x).$$

Итак, если теорема справедлива для произведения k-функции, то она справедлива и для произведения $k+1$-функции. Но утверждение справедливо для произведения двух функций, значит, оно справедливо для произведения любого числа функций.

Следствие II.

$$[f^n(x)]'=[\overbrace{f(x)\dots f}^{n\text{ функций}}(x)]'=[f'(x)\overbrace{f(x)\dots f}^{n-1\text{ функций}}(x)]+$$
$$+[f(x)f'(x)f(x)\dots f(x)]+\dots+[f(x)\dots f'(x)]=nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Примеры.

1. $(\sin^3 x)'=3\sin^2 x(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x.$
2. $(x^n)'=nx^{n-1}x'=nx^{n-1}.$

Теорема III. *Если* $f(x)\neq 0$, *то функция, обратная по величине:* $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, *имеет производную, равную*

$$F'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Доказательство.

$$F(X)-F(x)=\frac{1}{f(X)}-\frac{1}{f(x)}=-\frac{f(X)-f(x)}{f(X)f(x)},$$

откуда

$$F'(x)=\lim_{X\to x}\frac{F(X)-F(x)}{X-x}=-\lim\frac{1}{f(X)f(x)}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=$$

$$=-\frac{1}{[f(x)]^2}f'(x),\quad \text{ч. т. д.}$$

Теорема IV. *Если* $\varphi(x)\neq 0$, *то частное* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *имеет производную, равную*

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)'=\frac{\varphi f'-f\varphi'}{\varphi^2}$$

(для краткости записи аргумент опускаем).

Доказательство. Представим частное в виде произведения

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=f(x)\frac{1}{\varphi(x)}.$$

В силу теорем II и III, получим:

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)'=f'\cdot\frac{1}{\varphi}-f\cdot\frac{\varphi'}{\varphi^2}=\frac{\varphi f'-f\varphi'}{\varphi^2},\quad \text{ч. т. д.}$$

Пример.

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{x(\sin x)'-(x)'\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

Производная сложной функции. Предположим, что точка x является предельной точкой для области определения сложной функции $\Phi(x)=F[f(x)]$.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *имеет производную в точке* x, *а функция* $F(u)$ *имеет производную в точке* $u=f(x)$, *то функция* $\Phi(x)$ *имеет производную в точке* x, *равную*

$$\Phi'(x)=F'(u)f'(x).$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $\Phi(x)$ в точке x:

$$\Phi(X)-\Phi(x)=F[f(X)]-F[f(x)]=F(U)-F(u),$$

где $U=f(X)$.

Так как функция $F(u)$ имеет производную в точке u, то

$$F(U)-F(u)=(U-u)[F'(u)+\omega_1(U)],$$

где $\lim\limits_{U\to u}\omega_1(U)=\omega_1(u)=0$; так как функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то

$$U-u=f(X)-f(x)=(X-x)(f'(x)+\omega_2(X)),$$

где

$$\lim_{X\to x}\omega_2(X)=\omega_2(x)=0;$$

значит,

$$\Phi(X)-\Phi(x)=(X-x)(F'(u)+\omega_1)(f'(x)+\omega_2)=$$
$$=(X-x)F'(u)f'(x)+(X-x)\omega, \qquad (1)$$

где

$$\omega=F'(u)\omega_2(X)+f'(x)\omega_1(U)+\omega_1(U)\omega_2(X)$$

и

$$U=f(X).$$

Так как $\lim\limits_{X\to x}U=\lim\limits_{X\to x}f(X)=f(x)=u$, то на основании теоремы о пределе сложной функции

$$\lim_{X\to x}\omega_1(f(X))=\lim_{U\to u}\omega_1(U)=0,$$

а потому

$$\lim_{X\to x}\omega=\lim[F'(u)\omega_2+f'(x)\omega_1+\omega_1\omega_2]=\omega(x)=0.$$

Из равенства (1) следует, что

$$\frac{\Phi(X)-\Phi(x)}{X-x}=F'(u)f'(x)+\omega,$$

откуда

$$\Phi'(x)=\lim_{X\to x}\frac{\Phi(X)-\Phi(x)}{X-x}=F'(u)f'(x), \text{ ч. т. д.} \qquad (2)$$

Теорема о производной сложной функции имеет важное значение для вычисления производных, поэтому ниже приведены различные формы ее записи.

1° Для краткости иногда опускают аргументы, а пишут их в индексах:

$$\Phi'_x=F'_uf'_x \quad \text{или} \quad \Phi'_x=F'_uu'_x.$$

2° Можно и не вводить нового символа $\Phi(x)$; тогда пишут:

$$F'_x=F'_u\cdot f'_x=F'_u\cdot u'_x,$$

где F'_x — производная сложной функции $F[f(x)]$ по аргументу x.

Теорему о производной сложной функции можно обобщить на случай функции с произвольным числом промежуточных аргументов.

Пусть

$$y=f_1(x),\ z=f_2(y),\ \ldots,\ v=f_n(u),\ w=f_{n+1}(v).$$

Таким образом, v есть сложная функция с n промежуточными аргументами, а w — функция с $n+1$ промежуточными аргументами.

Предположим, что

$$v'_x=v'_u\ldots z'_yy^x.$$

Докажем, что в этом предположении

$$w'_x = w'_v v'_u \ldots z'_y y'_x.$$

В самом деле

$$w'_x = w'_v v'_x, \quad \text{а потому} \quad w'_x = w'_v v'_u \ldots z'_y y'_x.$$

Теорема справедлива при $n = 2$, а потому она справедлива для сложной функции с любым числом промежуточных аргументов.

Примеры.

1. $F(x) = \sin x^2$.

Положим $\Phi(u) = \sin u$; $f(x) = u = x^2$;

$$F'_x = \Phi'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

2. $F(x) = \sin\left(\cos\frac{1}{x}\right)$; $\Phi(u) = \sin u$; $u = \cos v$; $v = \frac{1}{x}$.

Значит, $F'_x = \Phi'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \cos u \cdot (-\sin v) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= \cos\left(\cos\frac{1}{x}\right) \cdot \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\cos\left(\cos\frac{1}{x}\right) \cdot \sin\frac{1}{x}}{x^2}.$$

Производная обратной функции.

Теорема. *Если функция $f(x)$ в промежутке $< a, b >$ удовлетворяет следующим условиям:*

1° *имеет производную в каждой точке $x \in < a, b >$;*

2° *строго монотонна в $< a, b >$;*

3° $f'(x) \neq 0$,

то обратная функция $x = \bar{f}(y)$ имеет производную в точке y, соответствующей точке x, и

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы, $y = f(x)$ есть непрерывная монотонная без промежутков постоянства функция, а потому обратная функция $x = \bar{f}(y)$ существует.

В силу условия 1°,

$$f(X) - f(x) = (X - x)[f'(x) + \omega(X)],$$

где $\lim\limits_{X \to x} \omega(X) = \omega(x) = 0$.

Если перейти к аргументу y, то это равенство перепишется так:

$$Y - y = (\bar{f}(Y) - \bar{f}(y))[f'(x) + \omega(\bar{f}(Y))]. \qquad (1)$$

В силу непрерывности обратной функции, функция $\bar{f}(Y)$ непрерывна. В силу непрерывности сложной функции, $\omega(\bar{f}(y))$ непрерывна в точке y, так как $\omega(X)$ непрерывна в точке $x=\bar{f}(y)$. Функция $\omega(\bar{f}(Y))$ равна нулю в точке y:

$$\omega(\bar{f}(y))=\omega(x)=0.$$

Из (1) получим:

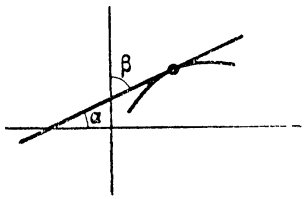
$$\bar{f}'(y)=\lim_{Y\to y}\frac{\bar{f}(Y)-f(y)}{Y-y}=\lim\frac{1}{f'(x)+\omega(\bar{f}(Y))}=\frac{1}{f'(x)},\quad \text{ч. т. д.}$$

Геометрическая интерпретация. $f'(x)$ есть тангенс угла α, образованного касательной к линии $y=f(x)$ в точке $M[x, f(x)]$ с осью абсцисс: $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$. $\bar{f}'(y)$ есть тангенс угла β, образованного той же касательной с осью ординат:

$$\bar{f}'(y)=\operatorname{tg}\beta.$$

Имеем:

$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, т. е. $f'(x)=\frac{1}{\bar{f}'(y)}$ (черт. 215).



Черт. 215.

§ 65. Производные элементарных функций

Сводка формул:

1° $$f(x)=ax+b;$$

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\lim\frac{aX-ax}{X-x}=a\lim\frac{X-x}{X-x}=a.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(ax+b)'=a.}$$

В частности,

$$\boldsymbol{(x)'=1.}$$

2° $$f(x)=\text{const}=C;$$

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\lim\frac{C-C}{X-x}=\lim 0=0.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(C)'=0.}$$

3° $$f(x)=x^n.$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) n — натуральное число.

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\lim\frac{X^n-x^n}{X-x}=$$

$$=\lim\left(X^{n-1}+X^{n-2}x+X^{n-3}x^2+\ldots+Xx^{n-2}+x^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

b) $n=\frac{1}{p}$, где p — натуральное число:

$$f(x)=x^{\frac{1}{p}}=\sqrt[p]{x};$$

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\lim\frac{\sqrt[p]{X}-\sqrt[p]{x}}{X-x}=$$

$$=\lim\frac{\sqrt[p]{X}-\sqrt[p]{x}}{(\sqrt[p]{X}-\sqrt[p]{x})(\sqrt[p]{X^{p-1}}+\sqrt[p]{X^{p-2}x}+\ldots+\sqrt[p]{x^{p-1}})}=$$

$$=\frac{1}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}}=\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}=nx^{n-1}\ (\text{где } x\neq 0).$$

c) $n=\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$.

Положим

$$y=u^p;\quad u=x^{\frac{1}{q}}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)'=(u^p)'_u\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)'_x=pu^{p-1}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}=$$

$$=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}=nx^{n-1}.$$

d) n — отрицательное рациональное число: $y=x^n=\frac{1}{x^{-n}}$. По правилу дифференцирования частного, имеем:

$$(x^n)'=-\frac{(x^{-n})'}{(x^{-n})^2}=\frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}}=nx^{n-1}\quad(x\neq 0).$$

Итак, при всяком рациональном n

$$(x^n)'=nx^{n-1}\ (\text{где } x\neq 0).$$

При $n\geqslant 1$ формула остается верной и при $x=0$ (справедливость формулы, когда n — число иррациональное, будет показано ниже).

4° $f(x)=\sin x$; имеем:

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\lim\frac{\sin X-\sin x}{X-x}=$$

$$=\lim\frac{2\sin\frac{X-x}{2}\cos\frac{X+x}{2}}{X-x}=\lim E\cdot\cos\frac{X+x}{2}=\cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

5° $f(x) = \cos x$. Имеем:

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; отсюда $\cos x = \sin u$, где $u = \frac{\pi}{2} - x$.

По правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$(\cos x)' = (\sin u)'\, u' = -\sin x.$$

Итак,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

6° $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

По правилу дифференцирования частного, имеем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7° $f(x) = \operatorname{ctg} x$,

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} u, \text{ где } u = \frac{\pi}{2} - x,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg} u)'\, u' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot(-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8° $y = \arcsin x$. Обратная функция $x = \sin y$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ возрастает и имеет производную в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, не обращающуюся в нуль. Следовательно, функция $y = \arcsin x$ имеет производную в интервале $(-1, 1)$:

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед радикалом взят знак $+$, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9° $y = \arccos x$. Обратная функция $x = \cos y$ убывает и имеет производную в интервале $(0, \pi)$, не равную нулю; значит, функция

$y = \arccos x$ имеет производную в интервале $(-1, 1)$:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед радикалом взят знак $+$, так как $\sin y > 0$ при $y \in (0, \pi)$.

Итак

$$\boldsymbol{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Пример.

$y = \arccos x^2$; положим $y = \arccos u$, где $u = x^2$.

Итак,

$$y'_x = (\arccos u)'_u (x^2)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 2x = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

10° $y = \operatorname{arctg} x$. Обратная функция возрастает в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и имеет производную в этом интервале, не равную нулю; значит, функция $y = \operatorname{arctg} x$ имеет производную в интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}}.$$

Пример.

$$y = \operatorname{arctg}(2-x^2).$$

Положим $y = \operatorname{arctg} u$; $u = 2-x^2$.

$$y'_x = (\operatorname{arctg} u)'_u \cdot (2-x^2)'_x = \frac{1}{u^2+1} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{x^4-4x^2+5}.$$

11° $y = \operatorname{arcctg} x$. Обратная функция $x = \operatorname{ctg} y$ убывает в интервале $(0, \pi)$ и имеет производную в этом интервале, не равную нулю; значит, обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$ имеет производную в интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$(\operatorname{arcctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}}.$$

12° $f(x) = \ln x$.

Имеем:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim\ln\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=$$

$$=\lim\frac{1}{x}E=\frac{1}{x}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(\ln x)'=\frac{1}{x}}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\ln(-x)$ в интервале $(-\infty, 0)$. Положим

$$\varphi(x)=\ln u, \text{ где } u=-x \ (u>0),$$

получим:

$$\varphi'(x)=\varphi'(u)\,u'=\frac{1}{u}(-1)=\frac{1}{x}.$$

Так как

$$\ln|x|=\begin{cases}\ln x & (x>0),\\ \ln(-x) & (x<0),\end{cases}$$

то

$$\boldsymbol{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}} \quad (\text{где } x\neq 0).$$

Пример.

$$y=\ln\sin x;\ \text{положим } y=\ln u;\ u=\sin x;$$

$$y'=(\ln u)'\cdot(\sin x)'=\frac{1}{u}\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x.$$

13° $f(x)=\log_a x$. Воспользуемся известной формулой:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}\ ;\ \text{в частности, } \log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}\ ;$$

значит,

$$f(x)=\frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{и} \quad f'(x)=\frac{1}{x\ln a}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}}.$$

14° $f(x)=a^x$. Обратная функция $x=\log_a y$ монотонна и имеет производную в интервале $(0, +\infty)$, не равную нулю; значит, функция $y=a^x$ имеет производную в интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'_y}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

В частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

Пример.

$$f(x) = e^{x^3};\ \text{положим}\ y = e^u,\ u = x^3;$$

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

15° $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ (где $u(x) > 0$).

Имеем:

$$f(x) = e^{v \ln u},$$

откуда

$$f'(x) = e^{v \ln u}\left[v' \ln u + v\frac{1}{u}\cdot u'\right].$$

Заменив $e^{\ln u(x)}$ на $u(x)$, получим:

$$(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'.$$

Следствие. Положим $u = x$, $v = \text{const} = n$, где n — данное иррациональное число, получим: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Итак, правило дифференцирования степенной функции остается в силе и для иррационального показателя.

16° Производные гиперболических функций.

Имеем:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Итак:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Подобным же образом найдем:

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \text{ и } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Для обратных функций будем иметь:

$$y = \operatorname{Ar\,sh} x,\ x = \operatorname{sh} y,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Итак,

$$(\operatorname{Ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Аналогично найдем:

$$(\operatorname{Ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ и } (\operatorname{Ar\,th} x)' = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Техника дифференцирования. Зная производные простейших элементарных функций и применяя теоремы о производной сложной функции и о дифференцировании суммы, произведения и частного, можно вычислять производные от любых элементарных функций. Указанные формулы и правила перестают быть применимыми в тех точках, в которых формула, изображающая функцию или ее производную, теряет смысл при непосредственной подстановке данного значения аргумента.

Примеры.

На первых порах дифференцирование сложных функций выполняется введением промежуточных аргументов примерно в таком порядке:

1. $f(x)=\sin\sqrt{x}$ или $f(x)=\sin u$ и $u=\sqrt{x}$,

$$f'(x)=(\sin u)'(\sqrt{x})'=\cos u\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

2. $f(x)=e^{\operatorname{arc tg} x^2}$; положим $f(x)=e^u$,

$$u=\operatorname{arc tg} v \text{ и } v=x^2.$$

Имеем:

$$f'(x)=(e^u)'_u\cdot(\operatorname{arc tg} v)'_v\cdot(x^2)'_x=e^u\frac{1}{1+v^2}\cdot 2x=\frac{2xe^{\operatorname{arc tg} x^2}}{1+x^4}.$$

По мере приобретения навыков выписывать промежуточные аргументы не следует. Вычисления можно располагать так:

3. $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$,

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2-a^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left[1+(\sqrt{x^2-a^2})'\right]=$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left[1+\frac{(x^2-a^2)'}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right]=$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

После приобретения твердых навыков вычисления располагаются примерно так:

4. $f(x)=\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}$;

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-x}+\arcsin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}.$$

5. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$;

$$y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)\right]+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Имеем:

$$y'=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{1}+1}\right]+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{(1-x^2)-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}.$$

После алгебраических преобразований, получим:

$$y'=\frac{1}{1+x^4}.$$

6. $f(x)=\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-(1+x^2)\cdot 2x-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=$$
$$=\frac{-4x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\cdot(1+x^2)^2}}=\frac{-4x}{2|x|(1+x^2)},$$

откуда

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{2}{1+x^2} & (\text{если } x>0)\\ \frac{2}{1+x^2} & (\text{если } x<0).\end{cases}$$

(В точке $x=0$ производная, как будет показано ниже, не существует.)

Логарифмическое дифференцирование. Если данная функция представлена в виде произведения большого числа сомножителей, так что применение формулы производной произведения громоздко, полезно вычислять сначала производную от логарифма данной функции. Этот прием пояснен на нижеследующем примере:

7. $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(2-x)}$;

$$\ln|f(x)|=\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|3x+1|+\frac{1}{3}\ln|2-x|;$$

но

$$(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)};$$

значит,

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3x+1}-\frac{1}{3(2-x)}\right]$$

или

$$f'(x)=\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3x+1}-\frac{1}{3(2-x)}\right](x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(2-x)}.$$

Непосредственное нахождение производной. Если функция в окрестности точки a не задана формулой или если при подстановке в формулу для производной $x=a$ формула теряет смысл,

то вычисление производной в точке a производится непосредственно:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

Если функция задана справа и слева от точки a разными формулами, то надо исследовать односторонние пределы:

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a};$$

$f'(a)$ существует, если эти пределы равны, и не существует, если все эти пределы различны, или хотя бы один из них не существует (конечный).

Примеры.

1. $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$.

Вычислим $f(0)$. Согласно принципу продолжения по непрерывности,

$$f(0)=\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0.$$

Имеем:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

2. $$f(x)=\begin{cases}\sin x & (x<0);\\ \operatorname{arctg} x & (x\geqslant 0).\end{cases}$$

Вычислим $f'(0)$. Так как $f(0)=0$ и при $x>0$ имеем $f(x)=\operatorname{arctg} x$, то

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Так как при $x<0$ имеем $f(x)=\sin x$, то

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Итак, $f'(0)=1$.

§ 66. Дифференцируемые функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке a, если приращение $f(x)-f(a)$ может быть представлено в виде суммы:*

$$f(x)-f(a)=A(x-a)+\omega(x)(x-a), \tag{1}$$

где A — число, а $\omega(x)$ — функция, непрерывная в точке a и равная нулю в этой точке:

$$\lim_{x\to a}\omega(x)=\omega(a)=0.$$

Следствие. *Всякая функция, дифференцируемая в точке a, непрерывна в этой точке.* В самом деле, из (1) имеем:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Пример.

1. Функция x^3 дифференцируема в любой точке a. В самом деле, положим $x-a=h$, тогда

$$f(x)-f(a)=x^3-a^3=(a+h)^3-a^3=3a^2h+3ah^2+h^3$$

или

$$x^3-a^3=3a^2(x-a)+(x-a)[3a(x-a)+(x-a)^2].$$

В этом примере $A=3a^2$ и $\omega(x)=3a(x-a)+(x-a)^2$.

2. Функция a^x дифференцируема в любой точке c. В самом деле,

$$a^x-a^c=a^c(a^{x-c}-1)=a^c(x-c)\ln a\cdot E.$$

Так как $\lim E=1$, то $E=1+\bar{\omega}(x)$, где $\lim\limits_{x\to c}\bar{\omega}(x)=0$, откуда

$$a^x-a^c=a^c\ln a\cdot(x-c)+(x-c)\,\omega(x).$$

Здесь

$$A=a^c\ln a=\text{const} \quad \text{и} \quad \omega(x)=a^c\ln a\cdot\bar{\omega}(x).$$

Теорема. *Для дифференцируемости функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(a)$ в точке a.*

Условие необходимо. В самом деле, если $f(x)$ дифференцируема в точке a, то

$$f(x)-f(a)=(x-a)A+(x-a)\,\omega(x);$$

отсюда

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A+\omega(x).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=A.$$

Условие достаточно. Если существует производная $f'(a)$, то в силу доказанной в § 61 теоремы

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\omega(x)(x-a),$$

т. е. $f(x)$ дифференцируема в точке a, ч. т. д.

Из доказанной теоремы вытекает, что выражения «функция, дифференцируемая в точке a» и «функция, имеющая производную в точке a» означают одно и то же.

Представление приращения дифференцируемой функции в виде

$$f(x)-f(a)=A(x-a)+\omega(x)(x-a) \qquad (1)$$

возможно только единственным образом. В самом деле, мы доказали, что коэффициент A есть производная функции $f(x)$

в точке a:

$$A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Допустим, что для той же функции $f(x)$ получено другое представление:

$$f(x)-f(a)=B(x-a)+\bar{\omega}(x)(x-a).$$

Тогда имеем:

$$A=B=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),\quad \text{а значит, и}\quad \omega(x)=\bar{\omega}(x).$$

Итак, *единственно возможное представление приращения дифференцируемой в точке a функции* $f(x)$ *в виде* (1) *есть*

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\omega(x)(x-a).$$

Примеры.

1. $f(x)=\sin x$. Имеем: $f'(a)=\cos a$.
Значит,

$$\sin x-\sin a=(x-a)\cos a+\omega(x)(x-a).$$

2. $f(x)=\frac{1}{x}$. Имеем: $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$ $(a\neq 0)$.
Значит,

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)+\omega(x)(x-a).$$

3. $f(x)=|x|$. Эта функция недифференцируема в точке $x=0$, так как в точке 0 она не имеет производной, а потому равенство

$$|x|-|0|=A(x-0)+\omega(x)(x-0)$$

или

$$|x|=Ax+\omega(x)x\quad(\text{где }\lim_{x\to 0}\omega(x)=0)$$

не может иметь места.

§ 67. Дифференциал

Определение. *Если функция* $y=f(x)$ *дифференцируема в точке a, то линейная функция* (аргумента x)

$$f'(a)(x-a)$$

называется дифференциалом функции $f(x)$ *в точке a.*

Дифференциал $f(x)$ в точке a будем обозначать так:

$$df(x,\ a)=(x-a)f'(a).$$

Разность между приращением функции $\Delta f(x)=f(x)-f(a)$ и ее дифференциалом имеет вид:

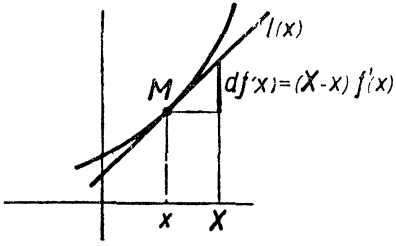
$$\Delta f(x)-df(x,\ a)=(x-a)\omega(x),\ \text{где}\ \lim_{x\to a}\omega(x)=0.$$

Если речь идет о дифференциале, взятом в произвольной точке x, в которой $f(x)$ дифференцируема, то будем писать:

$$df(x) = (X - x) f'(x) \text{ или } dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Здесь вместо a поставлена буква x как символ произвольного значения аргумента. Численное значение дифференциала определяется заданием точки a и приращения аргумента $\Delta x = x - a$.

Геометрическая интерпретация. Производная дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику $f(x)$ в точке M с абсциссой x; значит, уравнение касательной в точке M таково:



Черт. 216.

$$Y = f'(x)\ (X - x) + f(x).$$

Касательная есть график линейной функции:

$$l(X) = f'(x)\,(X - x) + f(x).$$

Следовательно, дифференциал есть приращение функции $l(X)$:

$$df(x) = f'(x)\,(X - x) = l(X) - l(x);$$

иначе говоря, *дифференциал есть приращение ординаты касательной в данной точке к графику функции* (черт. 216).

Теорема. *Дифференциал сложной функции $f(x)$, где $x = \varphi(t)$, равен производной по промежуточному аргументу, умноженной на дифференциал промежуточного аргумента.*

Доказательство.

$$df(\varphi(t)) = [f(\varphi(t))]'\,\Delta t = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\Delta t,$$

но

$$f'(\varphi(t)) = f'(x) \quad \text{и} \quad dx = \varphi'(t)\,\Delta t,$$

откуда

$$df(\varphi(t)) = f'(x)\,dx, \text{ ч. т. д.}$$

Если аргумент x является непосредственным (а не промежуточным) аргументом, то *условились дифференциалом аргумента называть его приращение*

$$dx = \Delta x.$$

При таком соглашении *формула $df(x) = f'(x)\,dx$ верна всегда, будет ли x непосредственным или промежуточным аргументом.*

Примечание. Приращение функции может быть тождественно равно ее дифференциалу в какой-либо точке в том и только в том случае, когда $f(x)$ во всей области ее определения совпадает с некоторой линейной функ-

цией. В самом деле, если приращение функции равно ее дифференциалу, т. е. если

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(a),$$

то

$$f(x)=f'(a)x+f(a)-af'(a).$$

Выражение, находящееся в правой части написанного равенства, есть линейная функция.

Обратно, пусть $L(x)$ — линейная функция:

$$L(x)=kx+b,$$

тогда

$$dL(x)=k(X-x)=kX-kx=L(X)-L(x).$$

Дифференциалом пользуются для вычисления приближенного значения функции, основываясь на следующей теореме:

Теорема. *Если* $f'(x)\neq 0$, *то* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{dy}=1$.

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim\frac{\Delta y}{f'(x)\,dx}=\lim\frac{f'(x)\,\Delta x+\omega\Delta x}{f'(x)\,\Delta x}=1,$$

ч. т. д.

Следовательно, при достаточно малых значениях Δx дробь $\dfrac{\Delta y}{dy}$ сколь угодно близка к 1. Таким образом, имеет место приближенное равенство $\dfrac{\Delta y}{dy}\approx 1$, откуда $\Delta y\approx dy$ или $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x$ и

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x. \tag{1}$$

Абсолютная ошибка, совершаемая при замене Δy через dy, равна $\omega\Delta x$.

Если известны значение функции $f(x)$ в точке x и приращение Δx аргумента и если величина $\omega\Delta x$ находится в пределах допустимой погрешности, то с помощью формулы (1) можно приближенно вычислить значение функции в точке $x+\Delta x$.

Пример.

Вычислить (приближенно) $\sin 60°3'$. Положим, $f(x)=\sin x$; имеем: $d\sin x=\cos x\,dx$. Положим, $x=60°$; $\Delta x=3'$; $x+\Delta x=60°3'$. В радианной мере $x=\dfrac{\pi}{3}$ и $\Delta x=\dfrac{\pi}{3\,600}$. Подставив в приближенную формулу (1), получим:

$$\sin 60°3'\approx\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{3\,600}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{7\,200}=$$

$$=0{,}866025+0{,}000436=0{,}866461\approx 0{,}8665.$$

Вычислив $\sin 60°3'$ с помощью таблиц, получим 0,8666.

§ 68. Теорема о наилучшей локальной аппроксимации

Теорема. *Если* $l(x)=f(a)+(x-a)f'(a)$ *и* $L(x)$ *есть линейная функция, отличная от* $l(x)$ *и в точке* $x=a$ *равная* $f(a)$, *то в достаточно малой окрестности точки* a *при* $x\neq a$ *имеет место неравенство:*

$$|f(x)-l(x)|<|f(x)-L(x)|.$$

Доказательство. Функция $L(x)$ имеет вид:

$$L(x)=k(x-a)+f(a), \quad \text{где } k\neq f'(a);$$

имеем:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\omega(x)(x-a),$$

откуда

$$|f(x)-l(x)|=|\omega(x)|\,|x-a|$$

и

$$|f(x)-L(x)|=|(f'(a)-k)+\omega(x)|\cdot|x-a|.$$

Так как

$$\lim_{x\to a}\omega(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to a}|(f'(a)-k)+\omega(x)|=|f'(a)-k|>0,$$

то в некоторой окрестности точки a будем иметь:

$$|\omega(x)|<|(f'(a)-k)+\omega(x)|;$$

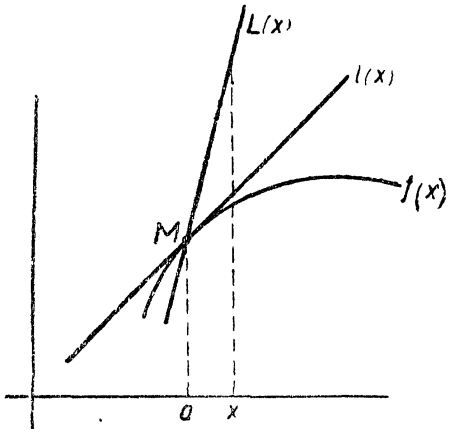
следовательно,

$$|\omega(x)|\,|x-a|<|(f'(a)-k)+\omega(x)|\,|x-a|,$$

или, что то же,

$$|f(x)-l(x)|<|f(x)-L(x)|,$$

ч. т. д.



Черт. 217.

Геометрическая интерпретация. Уравнение касательной в точке $M(a, f(a))$ к графику $f(x)$ есть

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \text{ или } y=l(x).$$

Уравнение $y=L(x)$ есть уравнение любой прямой, проходящей через точку M и отличной от касательной. Неравенство

$$|f(x)-l(x)|<|f(x)-L(x)|$$

показывает, что в достаточно малой окрестности точки M касательная (черт. 217) является более близкой к графику, чем любая заданная, отличная от касательной прямая.

§ 69. Обозначение Лейбница

Из равенства $df(x)=f'(x)\,dx$ следует, что $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ или $y'=\frac{dy}{dx}$. Это обозначение производной удобно, когда функция $f(x)$ задана формулой, содержащей несколько букв. Пусть, например, $z=xy-x^2$. Если z рассматривается как функция аргумента y, а x есть некоторая константа, то при вычислении производной пишут $\frac{dz}{dy}=x$, чем указывается, какая именно буква является символом аргумента.

В обозначении Лейбница формулы производной сложной и обратной функций принимают удобный для запоминания вид.

Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, то $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Аналогично для сложной функции с любым числом промежуточных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx_2}\cdots\frac{dx_{n-1}}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{dx}.$$

Для обратной функции имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Пример.

Пользуясь обозначением Лейбница, можем написать:

$$\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x,\quad \frac{de^x}{dx}=e^x,\quad \frac{d(\operatorname{tg} y)}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}\quad \text{и т. д.}$$

§ 70. Односторонние производные

Определение. *Правый предел* (конечный)

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

называется правой производной функции $f(x)$ в точке a.

Аналогично левый предел

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

называется левой производной в точке a.

Правая и левая производные называются односторонними производными и обозначаются (соответственно) так:

$$f'_+(a)\ \text{и}\ f'_-(a).$$

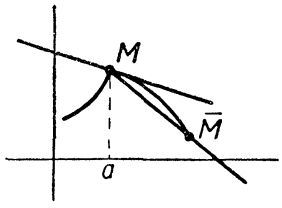
Если $f'_-(a)=f'_+(a)$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке a и

$$f'_+(a)=f'_-(a)=f'(a).$$

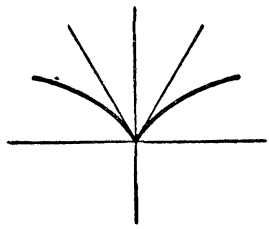
Если $f'_+(a)\neq f'_-(a)$, то $f'(a)$ не существует и $f(x)$ недифференцируема в точке a.

Если функция $f(x)$ не определена в некоторой окрестности точки a слева от точки, то $f'_-(a)$ не имеет смысла. В этом случае, если существует $f'_+(a)$, то существует $f'(a)$, и имеет место равенство $f'_+(a)=f'(a)$.

Если функция $f(x)$ рассматривается на некотором сегменте $[a, b]$, то значения аргумента, лежащие вне данного сегмента, не



Черт. 218.



Черт. 219.

принимаются во внимание; в соответствии с этим под значениями производной в концах a и b подразумеваются соответствующие односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

Геометрическая интерпретация. Точка $M(a, f(a))$ (в общем случае) делит график на две части: правую, соответствующую значениям $x\geqslant a$, и левую, соответствующую значениям $x\leqslant a$. Предельное положение секущей $M\overline{M}$ в точке M, где $\overline{M}$ — точка правой (левой) части графика, есть правая (левая) касательная в точке M. Правая (левая) производная есть угловой коэффициент правой (левой) касательной в точке M (черт. 218).

Если в точке a функция $f(x)$ имеет различные правую и левую производные, то точка $M(a, f(a))$ есть угловая точка графика (см., например, черт. 219).

Примеры.

1. Функция $f(x)=|x|$ в точке 0 не имеет производной, но имеет правую и левую производные. В самом деле, при $a=0$, $f(a)=0$, откуда

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=\lim 1=1.$$

Значит, $f'_+(0)=1$; аналогично покажем, что $f'_-(0)=-1$. Точка $O(0, 0)$ есть угловая точка. Односторонними касательными являются прямые $y=x$ и $y=-x$.

2. Положим $y=x\operatorname{arc tg}\frac{1}{x}$. Имеем в точке 0:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x\operatorname{arc tg}\frac{1}{x}}{x}=\lim\operatorname{arc tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Аналогично найдем:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x\operatorname{arc tg}\frac{1}{x}}{x}=\lim\operatorname{arc tg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$f'_+(0)=\frac{\pi}{2};\quad f'_-(0)=-\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, *начало координат* есть угловая точка. Односторонние касательные суть $y=\frac{\pi}{2}x$ и $y=-\frac{\pi}{2}x$ (черт. 219).

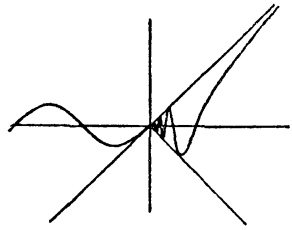
3. Функция $y=x\cos\frac{1}{x}$ в точке 0 не имеет односторонних производных, так как отношение

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\cos\frac{1}{x}$$

не имеет в точке 0 односторонних пределов.

4. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\leqslant 0)\\ x\cos\frac{1}{x} & (x>0)\end{cases}$$



Черт. 220.

в точке 0 имеет левую производную и не имеет правой производной [$f'_-(0)=1$, а $f'_+(0)$ не существует]. График имеет в точке 0 левую касательную и не имеет правой касательной (черт. 220).

§ 71. Бесконечные производные

Определение. *Непрерывная в точке a функция $f(x)$ имеет бесконечную производную в точке a, равную $+\infty$ (или $-\infty$), если*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty\ (\text{или}\ -\infty).$$

Аналогично определяются бесконечные односторонние производные.

Если производная $f'(a)$ бесконечна, то функция недифференцируема в точке a. В самом деле, если бы $f(x)$ была дифференцируемой, то имело бы место равенство

$$f(x)-f(a)=A(x-a)+\omega(x)(x-a)$$

и, вопреки условию, производная $f'(a)$ была бы конечной и равной A.

Геометрическая интерпретация. Если $f'(a) = +\infty$ (или $-\infty$), то предел углового коэффициента секущей $\operatorname{tg}\bar{\alpha}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ в точке a равен $+\infty$ (или $-\infty$). Следовательно,

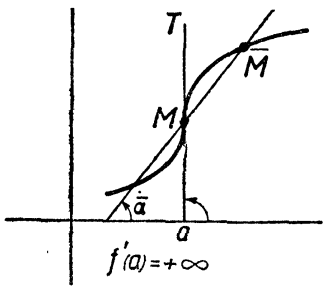
$$\lim_{x\to a}\bar{\alpha}(x) = \lim \operatorname{arc\,tg}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\pi}{2}\ \left(\text{или } -\frac{\pi}{2}\right).$$

Значит, касательная образует с осью абсцисс угол

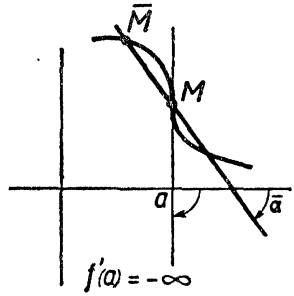
$$\alpha = \lim_{x\to a}\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2}\ \left(\text{или } -\frac{\pi}{2}\right).$$

Итак, *если* $f'(a) = \pm\infty$, *то касательная к графику* $f(x)$ *в точке* $M(a, f(a))$ *перпендикулярна оси абсцисс.*

Если $f'_-(a) = +\infty$, то секущая $M\overline{M}$ для любой точки $\overline{M}$ графика $f(x)$ из достаточно малой окрестности точки M образует с



Черт. 221.



Черт. 222.

осью абсцисс положительный угол $\bar{\alpha}$ $\left(\text{близкий к } \frac{\pi}{2}\right)$; как расположена точка $\overline{M}$, справа или слева от точки M, — безразлично (черт. 221). Аналогично, если $f'(a) = -\infty$, то секущая $M\overline{M}$ образует с осью абсцисс отрицательный угол $\bar{\alpha}$ $\left(\text{близкий к } -\frac{\pi}{2}, \text{ черт. 222}\right)$.

Рассмотрим случай, когда в точке a существуют односторонние бесконечные производные разных знаков. Пусть, например, $f'_+(a) = +\infty$ и $f'_-(a) = -\infty$. Производная $f'(a)$ не существует (ни конечная, ни бесконечная). Правая и левая касательные в точке $M(a, f(a))$ перпендикулярны оси OX и, следовательно, совпадают. Поэтому в точке M график имеет вертикальную касательную.

В достаточно малой окрестности точки M секущая $M\overline{M}$ образует с осью абсцисс положительный угол $\bar{\alpha}$, если точка $\overline{M}$ лежит справа от M, и отрицательный угол $\bar{\alpha}$, если точка $\overline{M}$ лежит слева

от M (черт. 223). Случай $f'_+ = -\infty$ и $f'_- = +\infty$ изображен на чертеже 224.

Точки графика, в которых существуют бесконечные односторонние производные разных знаков, называются точками возврата.

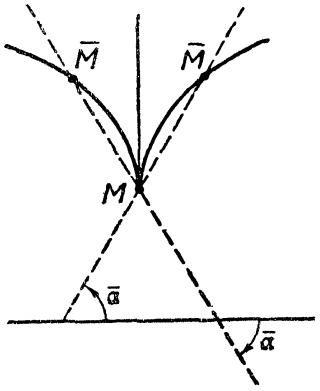
Примеры.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

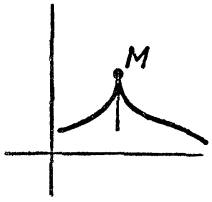
Вычислим производную в точке $0\,(a=0,\ f(a)=0)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

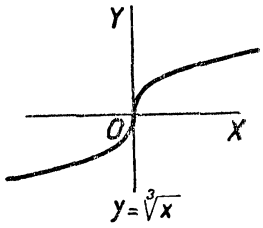
(черт. 225).



Черт. 223.



Черт. 224.



Черт. 225.

2. $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$. Вычислим производную в точке $\frac{\pi}{2}$ $\left(a=\frac{\pi}{2},\ f(a)=0\right)$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\frac{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{x-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim -\frac{\sqrt[3]{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{x-\frac{\pi}{2}} = -\lim\frac{\sqrt[3]{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)E}}{x-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\lim\frac{\sqrt[3]{E}}{\sqrt[3]{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} = -\infty.$$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Вычислим правую производную в точке 0 $(a=0,\ f(a)=0)$:

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

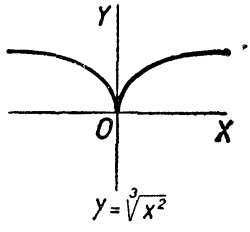
Вычислим левую производную:

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

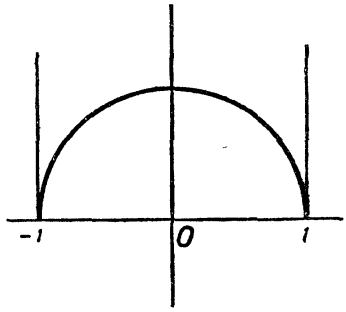
Начало координат есть точка возврата полукубической параболы $y^3 = x^2$ (черт. 226).

4. Положим $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Область определения сегмент $[-1, 1]$. В точке -1 имеем:

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty.$$



Черт. 226.



Черт. 227.

Производная $f'_-(-1)$ не имеет смысла; следовательно,

$$f'(-1) = f'_+(-1) = +\infty.$$

Аналогично $f'_+(1)$ не имеет смысла, а

$$f'(1) = f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim \left(-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) = -\infty \quad \text{(черт. 227)}.$$

5. $$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 1); \\ \sqrt{x-1} & (x > 1). \end{cases}$$

Имеем:

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty;$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{0}{x-1} = \lim 0 = 0.$$

§ 72. Примеры функций, имеющих разрывную производную

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка $\langle a, b \rangle$, то производная функция $f'(x)$ может быть как непрерывной, так и разрывной, в зависимости от вида данной функции.

Примеры.

1. $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$. Функция $\sin x$ дифференцируема в интервале $(-\infty, +\infty)$; ее производная непрерывна в том же интервале.

2. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(-\infty, +\infty)$. Если $x \neq 0$, $f'(x)$ вычисляется по формуле производной произведения; в точке 0 имеем $f'(0) = 0$ (аналогичный пример см. на стр. 259).

Итак,

$$f(x)=\begin{cases} -\cos\dfrac{1}{x}+2x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

Производная $f'(x)$ разрывна в точке 0, так как $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ не существует. В любой точке $x\neq 0$ производная непрерывна.

3. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точке 0 имеет бесконечную производную, равную $+\infty$; точка 0 есть точка разрыва производной. Всякая точка, в которой производная бесконечна, есть точка разрыва производной.

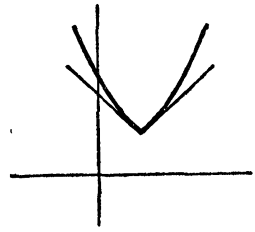
4. $f(x)=|x|$. Имеем:

$$f'(x)=\frac{|x|}{x}.$$

Функция $f'(x)$ не определена в точке 0 и имеет в этой точке разрыв первого рода.

5. Рассмотрим функцию $e^{|x-1|}$:

$$e^{|x-1|}=\begin{cases} e^{x-1} & (\text{если } x\geqslant 1)\\ e^{1-x} & (\text{если } x\leqslant 1)\end{cases}$$ (черт. 228).



Черт. 228.

В любой точке $x\neq 1$ получим:

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (\text{если } x>1);\\ -e^{1-x} & (\text{если } x<1).\end{cases}$$

Так как

$$\lim_{x\to 1+} f'(x)=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1-} f'(x)=-1,$$

то производная разрывна в точке 1. Но отсюда нельзя сделать никаких выводов о существовании производной в точке 1; для решения этого вопроса следует рассмотреть отношение

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{e^{|x-1|}-1}{x-1}=\frac{|x-1|E}{x-1} \quad (\text{где } \lim_{x\to 1} E=1).$$

Правый предел рассматриваемого отношения равен 1, а левый -1, поэтому данная функция в точке 1 недифференцируема. Точка $M(1, 1)$ является угловой точкой.

6. Построим пример дифференцируемой функции, производная которой неограничена в окрестности точки разрыва. Положим $\varphi(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$.

Так же как и для функции $x^2\cos\dfrac{1}{x}$, убедимся, что $\varphi(x)$ дифференцируема в точке 0 и $\varphi'(0)=0$, ибо

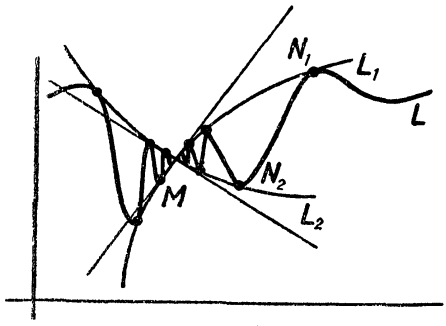
$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim x\sin\frac{1}{x^2}=0.$$

Если $x\neq 0$, то $\varphi'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$. Следовательно, $\varphi'(x)$ неограничена в окрестности точки 0.

Примечание. В приведенных примерах мы видели, что функция дифференцируемая в каждой точке промежутка, может иметь раз-

рывную производную. В настоящем курсе мы не можем входить в рассмотрение вопроса о возможной структуре множества точек разрыва производной. Заметим, что производная не может быть разрывной в каждой точке промежутка.

Остановимся на геометрическом построении таких линий, которые являются графиками непрерывных функций или не имеющих производной в данной точке, или имеющих разрывную производную.



Черт. 229.

Предположим, что через некоторую данную точку M с абсциссой $x=a$ проходят две линии L_1 и L_2, имеющие различные касательные в точке M. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную линию L, проходящую через точку M и обладающую следующим свойством: в любой окрестности точки M линия L имеет общие точки и с линией L_1, и с линией L_2 (черт. 229). Линия L не имеет касательной в точке M. В самом деле, в любой окрестности точки M линии L и L_1 имеют в общих точках общие секущие, предельное положение этих секущих есть касательная к линии L_1 в точке M. По той же причине в любой окрестности точки M найдутся такие точки, что линии L и L_2 имеют общие секущие, предельное положение которых есть касательная в точке M к линии L_2. Так как линии L_1 и L_2 в точке M имеют различные касательные, то предельного положения секущей для линии L не существует. Функция, графиком которой является линия L, не имеет производной в точке a.

Примеры.

1. В примере функции

$$f(x)=x\cos\frac{1}{x}$$

имеет место такое построение. Здесь линиями L_1 и L_2 являются прямые — биссектрисы координатных углов $y=x$, $y=-x$. В любой окрестности точки 0 существует бесконечное множество точек, в которых значения функции равны x $\left(\text{в точках } x=\frac{1}{2\pi k}, \text{ где } k\text{—целое число, не равное нулю}\right)$, а также бесконечное множество точек, в которых значение функции равно $-x$ $\left(\text{в точках } x=\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)$.

2. Примеры графиков функций, недифференцируемых в некоторой данной точке M, изображены на чертеже 230.

3. На чертеже 231 построен график функции

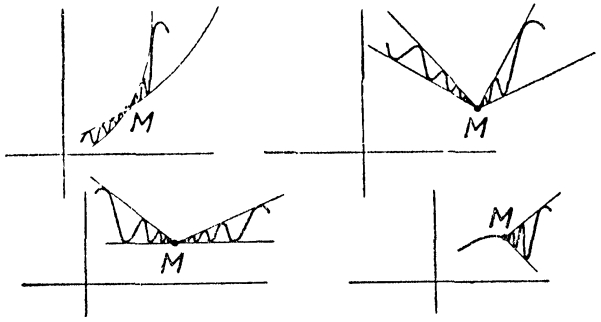
$$y=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x} & (x>0);\\ 0 & (x=0);\\ \sqrt{-x}\sin\dfrac{1}{x} & (x<0).\end{cases}$$

Этот пример показывает, что секущая ON в любой окрестности точки O может совпадать с произвольной прямой пучка с центром в точке O, за

исключением оси OY. Угловой коэффициент секущей, равный

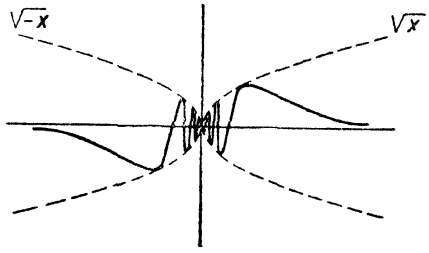
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}$$

(полагаем для определенности $x>0$), в любой окрестности точки 0 может иметь произвольные действительные значения, ибо первый множитель $\frac{1}{\sqrt{x}}$ имеет бесконечный предел, равный $+\infty$, а второй $\sin\frac{1}{x}$ может иметь любое значение между -1 и $+1$.

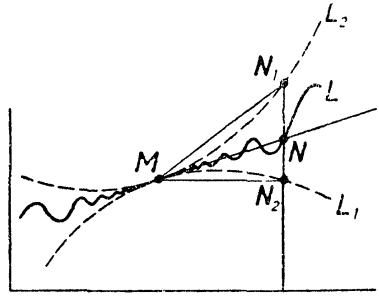


Черт. 230.

Перейдем к построению графиков функций, дифференцируемых в данной точке и имеющих в ней разрывную производную. Предположим, что в некоторой данной точке M касаются две линии L_1 и L_2, не имеющие других общих точек, кроме M, и что ординаты линии L_1 меньше ординат линии L_2. Всякая линия L, не выходящая за пределы части плоскости, ограниченной снизу линией L_1 и сверху линией L_2, и проходящая через точку M, имеет в точке M



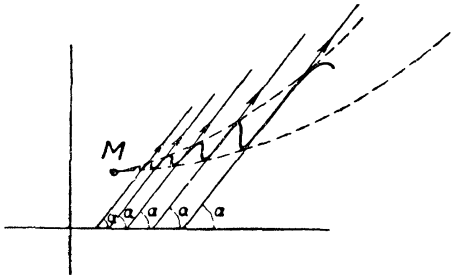
Черт. 231.



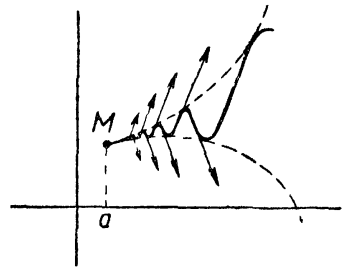
Черт. 232.

касательную (черт. 232). В самом деле, секущая MN не выходит за пределы угла, образованного секущими MN_1 и MN_2 к линиям L_1 и L_2, где N_1 и N_2 — точки пересечения L_1 и L_2 с перпендикуляром к оси абсцисс, проходящим через точку N. Но поскольку секущие MN_1 и MN_2 имеют общее предельное положение, то секущая MN имеет то же самое предельное положение, т. е. линия L в точке M имеет касательную. Соответствующая функция дифференцируема в точке a (где a — абсцисса точки M), если общая касательная к линиям L_1 и L_2 не перпендикулярна к оси абсцисс. Линию L всегда можно выбрать так, чтобы она лежала в части плоскости, ограниченной линиями L_1 и L_2 и чтобы в любой окрестности точки M существовали точки, в которых

касательная образует произвольный заданный угол $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ с осью абсцисс (черт. 233). Пусть $\varphi(x)$ есть угол, образованный касательной к линии L в точке N с абсциссой x с осью абсцисс, а α и β — два какие-либо различные действительные числа. Если линия L проведена между линиями L_1



Черт. 233.



Черт. 234.

и L_2 так, что в любой окрестности точки M существуют такие точки, в которых $\varphi(x)=\alpha$, и такие, в которых $\varphi(x)=\beta$, то $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ не существует. Если $y=f(x)$ есть уравнение линии L, то $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}[\varphi(x)]$ не существует; следовательно, производная разрывна в точке a (черт. 234).

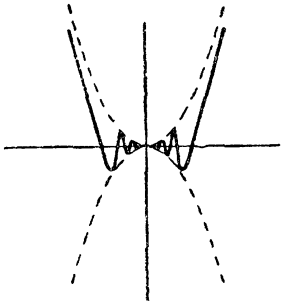
Пример.

Такого рода линия есть график функции $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$.

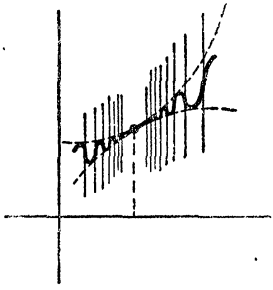
График этой функции заключен между параболами $y=x^2$ и $y=-x^2$, так как при любом x имеют место неравенства:

$$-x^2\leqslant x^2\cos\frac{1}{x}\leqslant x^2.$$

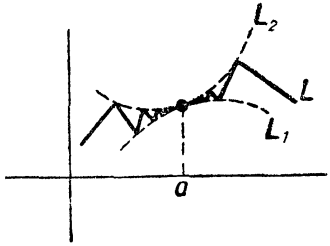
Следовательно, здесь линии L_1 и L_2 соответственно суть параболы $y=-x^2$



Черт. 235.



Чер. 236.



Черт. 237.

и $y=x^2$; общая касательная к этим параболам есть ось абсцисс, поэтому $f(0)=0$. Угловой коэффициент касательной в точке $x\neq 0$

$$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела в точке 0 (черт. 235).

На чертеже 236 изображен график такой дифференцируемой в точке a функции, что в любой окрестности точки a существуют точки, в которых

производная бесконечна: $f'(x)=+\infty$, а также $f'(x)=-\infty$. Легко построить график непрерывной функции $f(x)$, дифференцируемой в данной точке a, и такой, что в любой окрестности точки a существует бесконечное множество точек, в которых $f(a)$ недифференцируема. Для этого достаточно в качестве линии L взять линию, составленную из бесконечного множества прямолинейных отрезков (черт. 237).

§ 73. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную в промежутке $<a, b>$ параметрически посредством системы непрерывных функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, определенных в соответствующем промежутке $<\alpha, \beta>$, где $x(t)$ – строго монотонная функция.

Теорема. *Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке $t\in<\alpha, \beta>$ и $x'(t)\neq 0$, то функция $f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x\in<a, b>$; производная $f'(x)$ вычисляется по формуле:*

$$f'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Доказательство. Взаимно обратные функции $x=x(t)$ и $t=\bar{x}(x)$ взаимно однозначно и непрерывно отображают друг на друга промежутки $<\alpha, \beta>$ и $<a, b>$. Точке $X\neq x$ соответствует точка $T=\bar{x}(X)\neq t$. Представим отношение $\frac{f(X)-f(x)}{X-x}$ в параметрической форме:

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\frac{y(T)-y(t)}{x(T)-x(t)}$$

и преобразуем его так:

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\frac{\frac{y(T)-y(t)}{T-t}}{\frac{x(T)-x(t)}{T-t}}. \qquad (1)$$

По теореме о пределе сложной функции, предел левой части в точке x равен пределу правой части в точке t. Но последний предел равен отношению производных:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Следовательно

$$f'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}, \qquad (2)$$

ч. т. д.

В обозначении Лейбница формула запишется так:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Система функций

$$x = x(t),\ y' = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

дает параметрическое представление производной $f'(x)$.

Рассматривая равенство (1), можно сделать следующие дополнения к доказанной теореме.

1° Если производная $y'(t)$ (конечная или бесконечная) отлична от нуля, а $x'(t) = 0$, то производная $f'(x)$ бесконечна.

Пусть, например, $x(t)$ возрастает, тогда

$$x(T) - x(t) \begin{cases} > 0 \text{ (если } T > t) \\ < 0 \text{ (если } T < t). \end{cases}$$

Знаменатель правой части (1) положителен и имеет предел, равный нулю. Следовательно, предел правой части (т. е. $f'(x)$) равен $+\infty$, если $y'(t) > 0$, и $-\infty$, если $y'(t) < 0$.

2° Если производная $y'(t)$ конечна, а $x'(t)$ бесконечна, то правая часть (1) имеет предел, равный нулю, т. е. $f'(x) = 0$.

3° Если обе производные $x'(t)$ и $y'(t)$ равны 0 или бесконечны, то о существовании и значении производной $f'(x)$ в общем случае нельзя сделать никаких заключений.

Примечание. Формулу дифференцирования функции, заданной параметрически, можно вывести и иначе. В самом деле, при соблюдении условий теоремы $f(x) = y(\overline{x}(x))$, а $t = \overline{x}(x)$ — функция, обратная по отношению $x(t)$. Применяя теоремы о производной сложной и обратной функции, получим:

$$f'(x) = y'(t)\,\overline{x}'(x) = y'(t)\,\frac{1}{x'(t)}.$$

Примеры.

1. Система $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant \pi$, определяет функцию $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ на сегменте $[-a, a]$. График ее есть верхняя половина эллипса. В любой точке $x \neq \pm a$, где $t \neq 0$ и π, получим:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

В точке $x = a$ имеем $t = 0$, $y' = b$, $x' = 0$; в достаточно малой окрестности справа от точки $t = 0$ имеем $x' < 0$, а $y' > 0$, поэтому $f'(a) = -\infty$. В точке $x = -a$ имеем $f'(a) = +\infty$.

2. Астроида. Рассмотрим линию, заданную уравнениями:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \text{ где } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

На сегменте $[0, \pi]$ функция $x = a\cos^3 t$ убывает и отображает этот сегмент на сегмент $-a \leqslant x \leqslant a$; кроме того, $y > 0$, и мы получим верхнюю половину линии. Вычислив производные, получим:

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t,\ y' = 3a\sin^2 t \cos t,$$

откуда в любой точке сегмента $-a \leqslant x \leqslant a$, отличной от $-a$, 0 и a $\left(t \neq \pi, \frac{\pi}{2} \text{ и } \pi\right)$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\operatorname{tg} t.$$

В точке $t=0$ имеем $x=a$, $y=0$, $x'=0$, $y'=0$ и

$$f'(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{t \to 0+} \frac{a \sin^3 t}{a(\cos^3 t - 1)} = \lim \frac{E^3 t^3}{\left(1-\frac{1}{2}E_1 t^2\right)^3 - 1} = 0.$$

Значит, в точке $(a, 0)$ линия касается оси абсцисс. Аналогично в точке $x=-a$, соответствующей значению параметра $t=\pi$, функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(-a)=0$. В точке $t=\frac{\pi}{2}$ имеем $x=0$, $y=a$, $x'=0$, $y'=0$ и

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{a \sin^3 t - a}{a \cos^3 t} = \frac{\sin^3 t - 1}{\cos^3 t} = \frac{(\sin t - 1)(\sin^2 t + \sin t + 1)}{\cos^3 t}.$$

Как легко видеть,

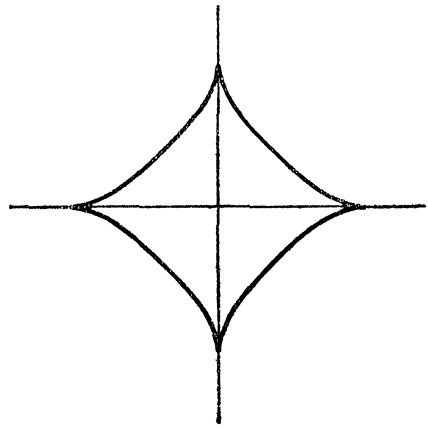
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \sin t + 1) = 3 \text{ и } \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin t - 1}{\cos^3 t} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) - 1}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)} =$$

$$= \lim \frac{\cos \tau - 1}{\sin^3 \tau} = -\infty;$$

аналогично

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}+} \frac{\sin t - 1}{\cos^3 t} = +\infty.$$



Черт. 238.

Следовательно, $f'_+(0) = -\infty$ и $f'_-(0) = +\infty$, а значит, линия в точке $(0, a)$ имеет точку возврата; касательной является ось ординат. Мы исследовали ту часть линии, на которую отображается сегмент $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Сегмент $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ отображается на нижнюю часть линии. Как легко видеть, линия замкнута [ибо точки $t=0$ и $t=2\pi$ отображаются в одну и ту же точку $(a, 0)$] и симметрична относительно осей координат (черт. 238).

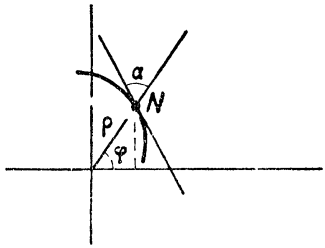
Исключая из уравнений $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ параметр, получим уравнение астроиды в декартовых координатах:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

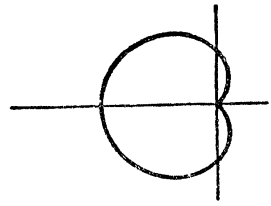
§ 74. Угол касательной с радиусом-вектором точки касания

Дано уравнение линии $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах; определим угол (острый) между касательной в точке $N(\varphi, \rho)$ и радиусом-вектором точки касания ($\rho \neq 0$) (черт. 239).

Пусть x и y — декартовы координаты точки N. Уравнения $x=f(\varphi)\cos\varphi$, $y=f(\varphi)\sin\varphi$ можно рассматривать как параметрические уравнения данной



Черт. 239.



Черт. 240.

линии. Угловой коэффициент радиуса-вектора равен $k=\frac{y}{x}$, угловой коэффициент касательной равен $k_1=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}$. Тангенс искомого угла найдется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k-k_1}{1+kk_1}\right|=\left|\frac{\frac{y}{x}-\frac{y'}{x'}}{1+\frac{y}{x}\frac{y'}{x'}}\right|=\left|\frac{yx'-y'x}{xx'+yy'}\right|;$$

но

$$x'=f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi;\quad y'=f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi.$$

После подстановки и упрощений получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)}\right|=\left|\frac{\varrho}{\varrho'}\right|.$$

Если касательная и радиус-вектор перпендикулярны, то $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha$ не существует. Последнее будет иметь место, если $\varrho'=0$. Следовательно, $f'(\varphi)=0$ есть условие перпендикулярности касательной и радиуса-вектора.

Пример.

Рассмотрим уравнение кардиоиды $\varrho=a(1-\cos\varphi)$; находим $\varrho'=a\sin\varphi$;

$$\frac{\varrho}{\varrho'}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\quad\text{и}\quad\operatorname{tg}\alpha=\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Если $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, то $\alpha=\frac{\varphi}{2}$; если $\pi<\varphi\leqslant 2\pi$, то $\alpha=\pi-\frac{\varphi}{2}$.

При $\varphi=\pi$ касательная перпендикулярна радиусу-вектору (черт. 240).

§ 75. Производные высших порядков

Рассмотрим производную $f'(x)$ данной функции $f(x)$; предположим, что $f'(x)$ есть функция, имеющая производную (конечную или бесконечную) в каждой точке x некоторого множества $\mathfrak{M}$.

Производная функции $f'(x)$ называется второй производной, или производной второго порядка данной функции $f(x)$, и обозначается символом $f''(x)$. Таким образом, по определению:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Если функция $f''(x)$ имеет производную в каждой точке x некоторого множества, то производная функции $f''(x)$ называется третьей производной, или производной третьего порядка от данной функции $f(x)$, и обозначается символом $f'''(x)$. Таким образом, по определению: 17

$$f'''(x) = [f''(x)]'.$$

Аналогично определяется четвертая производная данной функции и т. д.

Определение *n-й производной от функции $f(x)$, или производной n-го порядка, называется производная от $(n-1)$-й производной функции $f(x)$.*

Для обозначения производных второго, третьего и т. д. порядков функции $y = f(x)$ употребляются следующие обозначения:

$$y'',\ y''',\ y^{IV},\ y^{V},\ \ldots,\ y^{(n)}$$

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x),$$

а также обозначения Лейбница:

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots \text{ и } \frac{d^2f(x)}{dx^2},\ \frac{d^3f(x)}{dx^3}\ \ldots$$

Если говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема n раз в некотором промежутке $<a, b>$, то это значит, что существует конечная производная $f^{(n)}(x)$ в каждой точке данного промежутка. Но тогда производная $f^{(n-1)}(x)$ дифференцируема, а следовательно, и непрерывна в промежутке $<a, b>$. Итак, *из существования конечной n-й производной в каждой точке промежутка $<a, b>$ вытекает дифференцируемость (и стало быть непрерывность) во всем промежутке любой производной более низкого порядка, чем n, и самой функции.*

Теорема. *Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ имеют производные порядка k, то их линейная комбинация*

$$F(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)$$

также имеет производную порядка k, равную

$$F^{(k)}(x) = c_1f_1^{(k)}(x) + c_2f_2^{(k)}(x) + \ldots + c_nf_n^{(k)}(x). \qquad (1)$$

Доказательство. Предположим, что формула (1) верна для $F^{(k)}(x)$; тогда

$$F^{(k)}(x) = c_1f_1^{(k)}(x) + c_2f_2^{(k)}(x) + \ldots + c_nf_n^{(k)}(x).$$

Докажем, что тогда формула (1) справедлива для $F^{(k+1)}(x)$. В самом деле,

$$F^{(k+1)}(x) = [F^{(k)}(x)]' = c_1[f_1^{(k)}(x)]' + c_2[f_2^{(k)}(x)]' + \ldots +$$
$$+ c_n[f_n^{(k)}(x)]' = c_1 f_1^{(k+1)}(x) + c_2 f_2^{(k+1)}(x) + \ldots + c_n f_n^{(k+1)}(x).$$

Таким образом, формула (1) верна для порядка $k+1$, в предположении, что она верна для k. Но для $k=1$ она верна, значит, она верна для любого k.

Найдем производные высших порядков от простейших элементарных функций:

1) $f(x) = x^k$, где k — любое действительное число, а $x \neq 0$ — любая точка, в которой x^k имеет смысл.

Имеем

$$f'(x) = kx^{k-1};\ f''(x) = k(k-1)x^{k-2};\ f'''(x) = k(k-1)(k-2)x^{k-3}.$$

Докажем, что

$$(x^k)^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}. \qquad (2)$$

Предположим, что формула (2) верна для $n=m$. Значит,

$$(x^k)^{(m)} = k(k-1)\ldots(k-m+1)x^{k-m},$$

тогда

$$(x^k)^{(m+1)} = [(x^k)^{(m)}]' = k(k-1)\ldots(k-m+1)(k-m)x^{k-m-1}.$$

Но формула верна для $n=1$; значит, она верна для любого натурального n.

В частности, если k — натуральное число, то

$$x^k)^{(k)} = k!\ \text{и}\ (x^k)^{(k+1)} = (x^k)^{(k+2)} = \ldots = 0.$$

Заметим, что при натуральном k все рассуждения имеют силу и в точке $x=0$.

Если $f(x)$ есть многочлен степени k:

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k,$$

то

$$f^{(k)}(x) = a_0k!\ \text{и}\ f^{(n)}(x) = 0\ \text{при}\ n > k.$$

Если k — целое отрицательное число, то формула (2) справедлива при *любом* $x \neq 0$. Если k — положительно рациональное число $\frac{p}{q}$, причем $[k] = l$, то формула (2) справедлива в точке $x=0$, если $n \leqslant l$.

Пример.

$$(x^{\frac{1}{2}})^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^{\frac{1}{2}-n}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

Как легко видеть, $f'(0)=+\infty$, а $f''(0)$, $f'''(0)$ и т. д. не существуют.

Для функции $f(x)=x^{\frac{8}{3}}$ имеем: $f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$, $f'(0)=0$;

$$f''(x)=\frac{40}{9}x^3,\ f''(0)=0;\ f''_+(0)=+\infty;\ f''_-(0)=-\infty$$

$f'''(0)$ не существует.

2) $f(x)=a^x$; имеем: $f'(x)=a^x\ln a$;

$$f''(x)=a^x\ln^2 a.$$

Как легко показать методом полной индукции,

$$f^{(n)}(x)=a^x\ln^n a.$$

В частности,

$$\frac{d^n e^x}{dx^n}=e^x.$$

3) $f(x)=\ln(x-a)$; имеем: $f'(x)=\frac{1}{x-a}$. Теперь задача сводится к дифференцированию степенной функции $(x-a)^{-1}$. Согласно предыдущему, будем иметь:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-a)^n}.$$

Как легко показать,

$$[\ln(a-x)]^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{(a-x)^n}.$$

4) $f(x)=\sin x$; $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

$$(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Докажем, что

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Допустим, что формула (3) верна для производной n-го порядка. Докажем, что в этом предположении она будет справедлива и для производной $n+1$-го порядка.

Дифференцируя, получим:

$$(\sin x)^{(n+1)} = \cos\left[x + n\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Но формула (3) верна для $n = 1$. Значит, она верна для любого n.

5) Предоставляем читателю доказать, что

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

6) $f(x) = e^{2x}\sin^2 x$. Имеем:

$$f(x) = e^{2x}\frac{(1-\cos 2x)}{2} = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{2x}\cos 2x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[2e^{2x} - \left(2e^{2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \left[e^{2x} - e^{2x}\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Подобным же образом найдем:

$$f''(x) = 2\left[e^{2x} - 2e^{2x}\cos\left(2x + 2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Предоставляем читателю методом полной индукции доказать, что

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}e^{2x}\left[1 - 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

§ 76. Производные высших порядков от сложных функций

Теорема. *Если функции $f(u)$ и $\varphi(x) = u$, при соблюдении условий теоремы о производной сложной функции, имеют конечные производные второго порядка, то сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ имеет производную второго порядка, равную*

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{df}{du}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Доказательство. Имеем:

$$F'(x) = f'(u)\varphi'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Первый сомножитель $f'(u)$ — дифференцируемая функция аргумента u, но $u = \varphi(x)$, а $\varphi(x)$ — тоже дифференцируемая функция, поэтому $f'(u) = f'[\varphi(x)]$ является также дифференцируемой функцией аргумента x. По теореме о производной сложной функции,

$$\frac{df'(u)}{dx} = f''(u)\varphi'(x).$$

Второй сомножитель $\varphi'(x)$ — по предположению дифференцируемая функция. Отсюда следует, что $F'(x)$ является дифферен-

цируемой функцией, т. е. что $F(x)$ дважды дифференцируема. Выполнив дифференцирование, получим:

$$F''(x) = f''(u)\,\varphi'^2(x) + f'(u)\,\varphi''(x),$$

или:

$$F''(x) = f''(\varphi(x))\,\varphi'^2(x) + f'(\varphi(x))\cdot\varphi''(x), \quad \text{ч. т. д.}$$

Предлагаем учащимся доказать, что если функции $f(u)$ и $\varphi(x)$ трижды дифференцируемы, то сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ также является трижды дифференцируемой и

$$\frac{d^3F}{dx^3} = \frac{d^3f}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 2\,\frac{d^2f}{du^2}\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2f}{du^2}\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{df}{du}\,\frac{d^3u}{dx^3} =$$

$$= \frac{d^3f}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3\,\frac{d^2f}{du^2}\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{df}{du}\,\frac{d^3u}{dx^3}.$$

Путем последовательного дифференцирования можно вывести формулы для производных любого порядка от сложной функции, в предположении, что $f(u)$ и $\varphi(x)$ имеют соответствующие производные.

§ 77. Формула Лейбница

Формула Лейбница позволяет находить производные порядка n от произведения нескольких функций, если каждая из них имеет производную порядка n.

Остановимся на произведении двух сомножителей:

$$F(x) = f(x)\,\varphi(x).$$

Как известно, $F' = f'\varphi + f\varphi'$. Дифференцируя еще раз, получим:

$$F'' = f''\varphi + 2f'\varphi' + f\varphi''$$

и

$$F''' = f'''\varphi + 3f''\varphi' + 3f'\varphi'' + f\varphi'''.$$

Найденные выражения по внешнему виду напоминают формулу бинома Ньютона для $n = 2$ и $n = 3$.

Методом математической индукции покажем, что

$$F^{(n)} = f^{(n)}\varphi + C_n^1 f^{(n-1)}\varphi' + \ldots + C_n^k f^{(n-k)}\varphi^{(k)} + \ldots + f\varphi^{(n)}.$$

Допустим, что формула верна для $F^{(n)}$; найдем $F^{(n+1)}$. Дифференцируем $F^{(n)}$; легко видеть, что коэффициентом при $f^{(n-k)}\,\varphi^{(k+1)}$ будет

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1},$$

следовательно,

$$F^{(n+1)} = f^{(n+1)}\varphi + C_{n+1}^1 f^{(n)}\varphi' + \ldots + C_{n+1}^{k+1} f^{(n-k)}\varphi^{(k+1)} + \ldots + f\varphi^{(n+1)}.$$

Так как формула верна при $n=1$, то она верна при любом n, ч. т. д.

Примеры.

1. Найти $f^{(n)}(x)$ от $f(x)=x^2e^{kx}$. Имеем:

$$f^{(n)}(x)=x^2(e^{kx})^{(n)}+n\cdot 2x(e^{kx})^{(n-1)}+(e^{kx})^{(n-2)}\cdot n(n-1)=$$
$$=(x^2k^n+2nxk^{n-1}+n(n-1)k^{n-2})e^{kx}.$$

2. $f(x)=\operatorname{arc\,tg}x$, найти $f^{(n)}(0)$. Положим $y=\operatorname{arc\,tg}x$; имеем: $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, откуда $y'(1+x^2)=1$. Дифференцируя $n-1$ раз, получим:

$$y^{(n)}(1+x^2)+2(n-1)y^{(n-1)}x+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

Положим $x=0$; имеем:

$$f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0.$$

Мы получили рекуррентную формулу, позволяющую вычислить любую производную $f^{(n)}(0)$. Зная, что $f'(0)=1$ и $f''(0)=0$, пользуясь рекуррентной формулой, найдем:

$$f^{IV}(0)=f^{VI}(0)=\ldots=f^{(2k)}(0)=0.$$

Положив $n=2k+1$, получим:

$$f^{(2k+1)}(0)=-2k(2k-1)f^{(2k-1)}(0);$$

положив $k=1$, получим $f^{(3)}(0)=-2!$; при $k=2$, $f^{V}(0)=4!$ Предлагаем читателю убедиться методом индукции, что

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

3. Производная n-го порядка от функции e^{-x^2} имеет вид $e^{-x^2}H_n(x)$, где $H_n(x)$ есть многочлен степени n; этот многочлен носит название полинома Эрмита.

В самом деле, $(e^{-x^2})'=-2xe^{-x^2}$ имеет вид $e^{-x^2}H_1(x)$, где $H_1(x)=-2x$. Допустим, что производная $n-1$-го порядка имеет вид:

$$(e^{-x^2})^{(n-1)}=e^{-x^2}\cdot H_{n-1}(x),$$

где $H_{n-1}(x)$ есть многочлен $n-1$-й степени. Дифференцируя еще раз, получим:

$$(e^{-x^2})^{(n)}=e^{-x^2}H'_{n-1}(x)-e^{-x^2}\cdot 2xH_{n-1}(x)=e^{-x^2}H_n(x),$$

где $H_n(x)$ есть многочлен степени n. Значит, производная любого порядка n имеет вид $e^{-x^2}H_n(x)$. Выведем рекуррентную формулу, связывающую полиномы Эрмита.

Имеем:

$$e^{-x^2}H_{n+1}(x)=(e^{-x^2})^{(n+1)}=(-2xe^{-x^2})^{(n)};$$

применив формулу Лейбница, получим:

$$(-2xe^{-x^2})^{(n)}=-2x(e^{-x^2})^{(n)}-n\cdot 2(e^{-x^2})^{(n-1)}=$$
$$=-2xe^{-x^2}H_n(x)-2nH_{n-1}(x)e^{-x^2},$$

отсюда

$$e^{-x^2}H_{n+1}(x)=-2xe^{-x^2}H_n(x)-2nH_{n-1}(x)e^{-x^2}.$$

Сократив на e^{-x^2}, получим рекуррентную формулу

$$H_{n+1}(x)+2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0.$$

Непосредственным вычислением находим $H_1(x)=-2x$; $H_2(x)=4x^2-2$; далее мы можем, пользуясь рекуррентной формулой, последовательно вычислить $H_3(x)$, $H_4(x)$ и так далее. Дифференцируя равенство

$$(e^{-x^2})^{(n)}=e^{-x^2}H_n(x),$$

получим:

$$(e^{-x^2})^{(n+1)}=-2xe^{-x^2}H_n(x)+e^{-x^2}H_n'(x).$$

Заменив $(e^{-x^2})^{(n+1)}$ на $e^{-x^2}H_{n+1}(x)$, получим формулу для вычисления производной многочлена Эрмита:

$$H_n'(x)=H_{n+1}(x)+2xH_n(x).$$

Заменяя $H_{n+1}(x)$, получим:

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x).$$

4. Вычислить сумму квадратов биномиальных коэффициентов:

$$1+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=(1-x)^n x^n$ и вычислим $f^{(n)}(x)$ по формуле Лейбница. Приняв во внимание, что

$$(x^n)^{(m)}=n(n-1)\ldots(n-m+1)\,x^{n-m}=\frac{n!}{(n-m)!}\,x^{n-m}$$

получим:

$$f^{(n)}(x)=n!\,(1-x)^n-C_n^1\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right)\frac{n!}{1!}\,x\,(1-x)^{n-1}+$$

$$+C_n^2\frac{n!}{(n-2)!}\,\frac{n!}{2!}\,x^2(1-x)^{n-2}-\ldots=$$

$$=n!\,[(1-x)^n-(C_n^1)^2\,x\,(1-x)^{n-1}+(C_n^2)^2\,x^2(1-x)^{n-2}-\ldots].$$

С другой стороны, мы можем вычислить $f^{(n)}(x)$ непосредственно, возведя $1-x$ в степень n.

Имеем:

$$f(x)=(-1)^n x^{2n}+\ldots,$$

откуда

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\,2n(2n-1)\ldots(n+1)\,x^n+\ldots$$

Приравняв коэффициенты при x^n в обоих выражениях для $f^{(n)}(x)$, получим:

$$(-1)^n\cdot n!\,[1+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2]=(-1)^n\cdot 2n(2n-1)\ldots(n+1),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n}(C_n^i)^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,.$$

§ 78. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Теорема. *Если при соблюдении условий теоремы о производной функции, заданной параметрически* (§ 73), *функции*

$$x=x(t)\ \text{и}\ y=y(t) \qquad (1)$$

имеют конечные производные второго порядка, то функция $f(x)$, *определяемая системой* (1), *имеет вторую производную, равную*

$$f''(x)=\frac{y''x'-y'x''}{x'^3}.$$

Доказательство. Параметрические уравнения первой производной $f'(x)$ суть:

$$x=x(t) \quad \text{и} \quad y'_x=\frac{y'}{x'};$$

y'_x есть дифференцируемая функция t, ибо y' и x' дифференцируемы по предположению (x и y дважды дифференцируемы), а y'_x есть частное дифференцируемых функций, причем $x'\neq 0$ (по условию); следовательно, $f'(x)$ есть дифференцируемая функция x и ее производная может быть выражена через параметр t следующим образом:

$$f''(x)=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)}{x'}=\frac{x'y''-x''y'}{x'^3}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Параметрические уравнения $f''(x)$ суть:

$$x=x(t), \quad y''_x=\frac{x'y''-x''y'}{x'^3}.$$

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные третьего порядка при соблюдении всех прочих условий, то

$$f'''(x)=\frac{\frac{dy''_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(x')^3(x'y'''-y'x''')-3(x'y''-x''y')(x')^2x''}{(x')^7}=$$

$$=\frac{(x')^2y'''-x'y'x'''-3x'x''y''+3(x'')^2y'}{(x')^5}.$$

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные четвертого и т. д. порядков, то путем последовательного дифференцирования можно получить соответствующие выражения через параметр для $f^{IV}(x)$ и т. д.

Пример.

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически:

$$x=a\cos t; \quad y=b\sin t,$$

где $0<t<\pi$.

Для первой производной находим: $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}$.

Вторую производную можно найти непосредственно:

$$y''_x = \frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t},$$

или можно воспользоваться выведенной формулой:

$$y''_x = \frac{y''x' - y'x''}{x'^3} = \frac{ab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{-a^3\sin^3 t} = \frac{-b}{a^2\sin^3 t}.$$

§ 79. Производные высших порядков от обратной функции

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ в некотором промежутке строго монотонна, имеет конечную вторую производную и $f'(x) \neq 0$, то обратная функция $x = \bar{f}(y)$ в соответствующем промежутке имеет вторую производную, равную*

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$$

Доказательство. В самом деле, $\bar{f}'(y)$ можно представить как сложную функцию y с промежуточным аргументом x.

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{где} \quad x = \bar{f}(y).$$

В силу теоремы о производной сложной функции, $\bar{f}'(y)$ есть дифференцируемая функция y, производная которой вычисляется по формуле:

$$\frac{d\bar{f}'(y)}{dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)}\frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Если $f(x)$ трижды дифференцируема, то аналогичным образом получим:

$$\bar{f}'''(y) = -\frac{f'''(x)f'(x) - 3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}.$$

§ 80. Преобразование дифференциальных выражений

Допустим, что дано некоторое выражение, содержащее x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$, где y есть некоторая функция x. Обозначим это выражение символом

$$V\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right).$$

При изучении такого рода выражений, называемых дифференциальными, приходится иметь дело с их преобразованиями.

1. Замена аргумента. Положим, $x=\varphi(t)$. Таким образом, y есть сложная функция t:

$$y=f(x),\quad x=\varphi(t).$$

Выражение V после подстановки $x=\varphi(t)$ не будет содержать аргумента x, который является теперь промежуточным. Требуется производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... выразить через $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ... Так как $x=\varphi(t)$ есть данная функция t, то $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... известны. В результате замены $x=\varphi(t)$ выражение V перейдет в другое:

$$W\left(t,\ y,\ \frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dt^n}\right),$$

которое может оказаться более удобным для исследования, чем первоначальное.

Для решения поставленной задачи дифференцируем последовательно сложную функцию

$$y=f(x),\quad x=\varphi(t);$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}\quad \text{и т. д.}$$

Из этих соотношений находим последовательно:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy^2}{dt^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, производную $\frac{d^ky}{dx^k}$ можно выразить через

$$\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \ldots,\ \frac{d^ky}{dt^k}.$$

Эти результаты можно получить и другим способом. В самом деле, можно считать

$$x=\varphi(t),\quad y=f(\varphi(t))$$

параметрическим представлением, y как функции аргумента x, откуда можем получить выражение для $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д.

Пример.

Рассмотрим выражение:

$$(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y. \tag{1}$$

Положим $x=\operatorname{tg} t$; дифференцируя, находим:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{1}{\cos^2 t}\,;\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{dy}{dx}\frac{2\sin t}{\cos^3 t}\,,$$

откуда, решая относительно $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cos^2 t \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\cos^3 t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cos t-2\sin t\frac{dy}{dt}\right).$$

Подставив $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в выражение (1), получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y.$$

II. Замена функции. Пусть $y=f(x)$ — данная функция и $y=\varphi(z)$ — другая функция, удовлетворяющая следующим условиям.

1°. Множество значений функции $\varphi(z)$ содержит множество значений функции $f(x)$ (в частности, совпадает с ним).

2°. Функция $\varphi(z)$ имеет обратную функцию $z=\bar{\varphi}(y)$.

3°. Функция $\varphi(z)$ дифференцируема нужное число раз.

В силу условий 1° и 2°, можно z рассматривать как функцию аргумента x:

$$z=\bar{\varphi}(f(x)).$$

Найдем выражение производных $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. через z и производные $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ и т. д.

На основании формулы дифференцирования сложной функции находим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}\,,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(z)\frac{dz}{dx}\,.$$

Подобным же образом найдем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}=\varphi''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\varphi'(z)\frac{d^2z}{dx^2}\,.$$

Таким же способом можно найти выражения и для производных более высоких порядков.

Функцию $\varphi(z)$, а также ее производные следует считать известными. Заменяя в дифференциальном выражении

$$V(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots)$$

функцию y и ее производные через функцию z и ее производные, получим новое выражение:

$$W(x,\ z,\ z',\ z'',\ \ldots).$$

В преобразованном выражении аргументом является x, а функцией z.

Пример.

Преобразовать выражение

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}-1\right)(1+y^2)-2(1+y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

где $y=\operatorname{tg} z, \left(-\frac{\pi}{2}<z<+\frac{\pi}{2}\right)$, рассматривая z как функцию аргумента x. Имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 z}\frac{dz}{dx};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\sin z}{\cos^3 z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{1}{\cos^2 z}\frac{d^2z}{dx^2},$$

откуда

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}-1\right)(1+y^2)-2(1+y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=$$

$$=\left[\frac{2\sin z}{\cos^3 z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{1}{\cos^2 z}\frac{d^2z}{dx^2}-1\right](1+\operatorname{tg}^2 z)-$$

$$-2(1+\operatorname{tg} z)\frac{1}{\cos^4 z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{1}{\cos^4 z}\left[\frac{d^2z}{dx^2}-2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-\cos^2 z\right].$$

III. Одновременная замена аргумента и функции. Пусть $y=f(x)$; положим $x=\varphi(t)$, $y=\psi(z)$, где $\varphi'(t)\neq 0$, а функция $\psi(z)$ удовлетворяет условиям, перечисленным в предыдущем случае (замена функции). На основании изложенного выше, мы можем рассматривать z как функцию аргумента x. Так как $x=\varphi(t)$, то z есть сложная функция t, заданная посредством промежуточного аргумента x. Задача заключается в выражении производных от y по x через производные от z по t.

На соотношении $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(z)$ можно смотреть как на параметризацию функции $y=f(x)$, если под z подразумевать функцию t

Следовательно:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(z)\dfrac{dz}{dt}}{\varphi'(t)}.$$

Далее,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}(y'_x)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(z)\dfrac{dz}{dt}}{\varphi'(t)}\right)=$$

$$=\frac{\varphi'(t)\left[\psi''(z)\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2+\psi'(z)\dfrac{d^2z}{dt^2}\right]-\psi'(z)\varphi''(t)\dfrac{dz}{dt}}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Подобным же образом находятся выражения для производных высших порядков.

Примеры.

1. Преобразовать выражение

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^3,$$

полагая $x=e^t$, $y=e^z$ (здесь $\varphi(t)=e^t$, $\psi(z)=e^z$):

имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^z\dfrac{dz}{dt}}{e^t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^t\left[e^z\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2+e^z\dfrac{d^2z}{dt^2}\right]-e^ze^t\dfrac{dz}{dt}}{e^{3t}}=$$

$$=\frac{e^z\left[\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2+\dfrac{d^2z}{dt^2}-\dfrac{dz}{dt}\right]}{e^{2t}}.$$

Произведя подстановку, получим:

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^3=\frac{e^{2z}}{e^t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}+e^{z+t}\right).$$

2 Преобразовать дифференциальное выражение

$$\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

полагая

$$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi$$

и принимая φ за аргумент, ϱ — за функцию аргумента φ. Формулы перехода от x и y к ϱ и φ суть формулы, связывающие декартовы координаты с полярными, а потому замена при помощи этих формул носит название преобразования к полярным координатам. Считая ϱ функцией φ, будем рассматривать соотношения $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ как параметрические уравнения данной функции, где параметром является φ; имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}.$$

Выполняя дифференцирование, находим:

$$x'_\varphi=\frac{d\varrho}{d\varphi}\cos\varphi-\varrho\sin\varphi;\quad y'_\varphi=\frac{d\varrho}{d\varphi}\sin\varphi+\varrho\cos\varphi,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{d\varrho}{d\varphi}\sin\varphi+\varrho\cos\varphi}{\dfrac{d\varrho}{d\varphi}\cos\varphi-\varrho\sin\varphi}.$$

Для вычисления $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ воспользуемся формулой:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_\varphi x'_\varphi-y'_\varphi x''_\varphi}{(x'_\varphi)^3}.$$

Выполняя повторное дифференцирование, получаем:

$$x''_\varphi=\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\cos\varphi-2\sin\varphi\frac{d\varrho}{d\varphi}-\varrho\cos\varphi;$$

$$y''_\varphi=\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\sin\varphi+2\cos\varphi\frac{d\varrho}{d\varphi}-\varrho\sin\varphi.$$

Как легко видеть,

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{[(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}{y''_\varphi x'_\varphi-y'_\varphi x''_\varphi};$$

заменяя производные x'_φ, y'_φ, x''_φ, y''_φ найденными выражениями, после элементарных преобразований получим:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left[\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2+2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2-\varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}.$$

IV. Переход к обратной функции. Иногда приходится переходить от данных функций к обратным в выражениях, содержащих производные от y по x. Очевидно, нужно в таком случае эти производные выразить через производные от x по y. Эта задача была решена в § 79, но там мы выразили производные от x по y через производные от y по x. Искомый результат мы получим, переменив в формулах § 79 местами x и y.

Пример.

Преобразовать выражение $\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$, считая, что x есть функция y.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Значит,

$$\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|=\left|\frac{\left[1+\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}}\right|=\left|\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}\right|.$$

ГЛАВА VI

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 81. Основные леммы

Лемма I. *Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечную, отличную от нуля, или бесконечную производную $f'(a)$, то в достаточно малой окрестности точки a приращение функции в точке a*

$$\Delta y=f(x)-f(a)$$

и приращение аргумента $\Delta x = x - a$ *(где* $x \neq a$*) имеют один и тот же знак, если* $f'(a) > 0$*, эти приращения имеют противоположные знаки, если* $f'(a) < 0$.

Доказательство. Допустим для определенности, что $f'(a) > 0$, так как

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

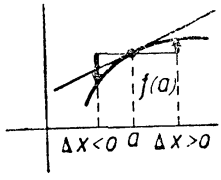
то в достаточно малой окрестности точки a будем иметь $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Следовательно,

$$f(x) - f(a) < 0, \text{ если } x - a < 0,$$

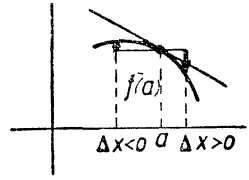
и

$$f(x) - f(a) > 0, \text{ если } x - a > 0.$$

На чертеже 241 дано геометрическое пояснение доказанного.



Черт. 241.



Черт. 242.

Аналогично для случая $f'(a) < 0$ получим:

$$f(x) - f(a) < 0, \quad \text{если} \quad x - a > 0,$$

и

$$f(x) - f(a) > 0, \text{ если } x - a < 0 \quad \text{(черт. 242), ч. т. д.}$$

Примечание. Если рассматривать односторонние производные в точке a, то придем к следующим соотношениям, имеющим место в достаточно малой окрестности точки a.

1°. Если $f'_+(a) \neq 0$, то при $x > a$ имеем:

$$f(x) - f(a) > 0, \text{ если } f'_+(a) > 0 \quad \text{(черт. 243a)},$$

и

$$f(x) - f(a) < 0, \text{ если } f'_+(a) < 0 \quad \text{(черт. 243b)}.$$

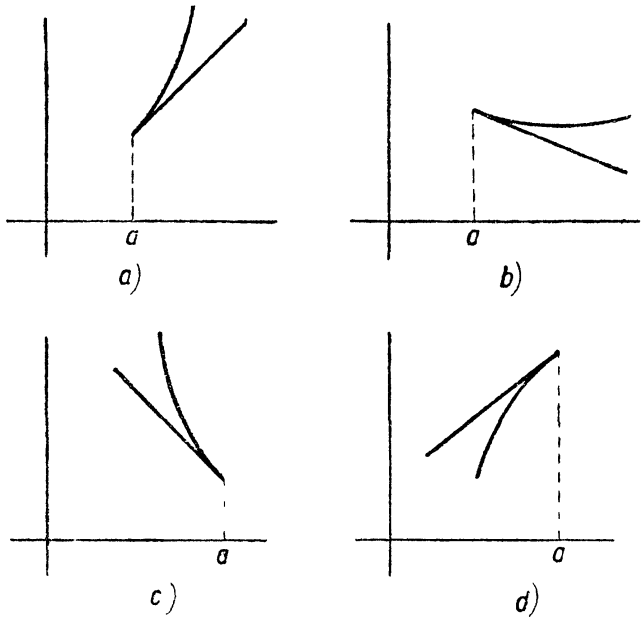
2°. Если $f'_-(a) \neq 0$, то при $x < a$ имеем:

$$f(x) - f(a) > 0, \text{ если } f'_-(a) < 0 \text{ (черт. 243c)},$$

$$f(x) - f(a) < 0, \text{ если } f'_-(a) > 0 \text{ (черт. 243d)}.$$

Лемма II. *Если функция* $f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* a *и* $f'(a) \neq 0$*, то в любой достаточно малой окрестности точки* a *существуют точки, в которых* $f(x) > f(a)$*, а также точки, в которых* $f(x) < f(a)$.

Доказательство. Положим для определенности, что $f'(a)>0$, тогда (в силу леммы I) в достаточно малой окрестности точки a имеем $f(x)>f(a)$, если $x>a$, и $f(x)<f(a)$, если $x<a$, ч. т. д.



Черт. 243.

Примечание. Если $f'(a)=0$, то о знаке приращения функции в общем случае нельзя сделать никаких заключений.

Примеры.

1. $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$; имеем: $f'(0)=0$.

В любой δ-окрестности точки 0 существуют как положительные, так и отрицательные и равные нулю значения $f(x)$ (см. черт. 235).

2. $f(x)=x^2$; $f'(x)=2x$. В любой окрестности точки 0 имеем $f(x)>0$.

3. $f(x)=-x^2$, $f'(x)=-2x$; $f'(0)=0$. В любой окрестности точки 0 значения функции отрицательны.

§ 82. Теорема Ролля

Теорема Ролля. *Если функция* $f(x)$:

1° *непрерывна на сегменте* $[a, b]$,

2° *в каждой точке интервала* $[a, b]$ *имеет конечную или бесконечную производную;*

3° *в концах сегмента равна нулю*:

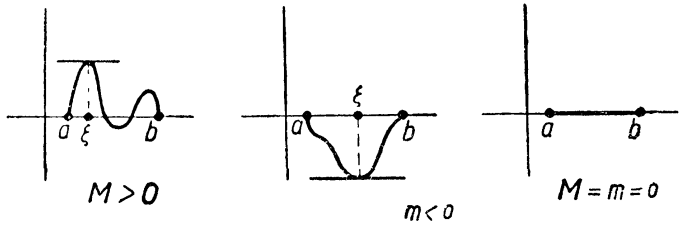
$$f(a)=f(b)=0,$$

то в интервале (a, b) *существует по крайней мере одна точка* ξ, *в которой производная равна нулю:*

$$f'(\xi)=0,\ a<\xi<b.$$

Доказательство. На сегменте $[a, b]$ существует хотя бы одна пара точек, в которых непрерывная функция $f(x)$ имеет наибольшее значение M и наименьшее значение m. Возможен один из следующих двух случаев:

1°. Хотя бы одно из значений M или m (может быть оба) функция (x) имеет в точке ξ, лежащей внутри $[a, b]$. Докажем, что $f'(\xi)=0$. Положим для определенности, что $f(\xi)=M$. Если



Черт. 244

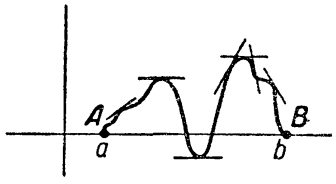
$f'(\xi)\neq 0$, то, в силу леммы II, в любой окрестности точки ξ существуют значения функции как бо́льшие, так и меньшие M, а потому M (вопреки предположению) не может быть наибольшим значением; следовательно, $f'(\xi)=0$. Аналогично рассматривается случай $f(\xi)=m$ (черт. 244).

2°. Оба значения M и m функция $f(x)$ имеет в концах сегмента. В этом случае

$$M=m=f(a)=f(b)=0,$$

что возможно лишь при условии $f(x)=\text{const}=0$ на $[a, b]$. Но тогда в любой точке $\xi\in(a, b)$ имеем $f'(\xi)=0$, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Если простая дуга $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, концы которой лежат на оси абсцисс, в каждой внутренней точке имеет касательную и не имеет точек возврата, то существует хотя бы одна внутренняя точка дуги $M(\xi, f(\xi))$, в которой касательная параллельна стягивающей хорде (т. е. оси абсцисс, черт. 245).



Черт. 245.

Примечания.

I. Теорема Ролля доказывает существование хотя бы одной точки ξ — такой, в которой производная равна нулю. Может случиться, что таких точек существует не одна, а несколько или бесконечное множество.

II. Условие, что функция имеет производную в каждой точке интервала (a, b), существенно. Если при выполнении всех прочих условий теоремы Ролля функция $f(x)$ не имеет конечной или бесконечной производной хотя бы в одной внутренней точке сегмента $[a, b]$, то теорема Ролля может оказаться не справедливой. В самом деле, точка, в которой $f(x)$ имеет наибольшее или наименьшее значение, может оказаться той точкой, в которой производная не существует.

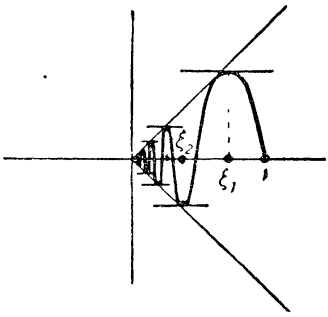
III. Теорема Ролля утверждает существование числа ξ, при котором $f'(\xi)=0$, но каково это число, указаний не дает.

Примеры.

1. Функция $f(x)=1-x^2$ на сегменте $[-1,1]$ дифференцируема и равна нулю в концах сегмента. Производная $f'(x)=-2x$ равна нулю в точке $\xi=0$, лежащей внутри сегмента $[-1, +1]$.

2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$ на сегменте $[0,2\pi]$, $f(0)=f(2\pi)=0$, $f'(x)=\cos x$. На сегменте $[0,2\pi]$ производная равна нулю в двух точках:

$$\xi_1=\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \xi_2=\frac{3}{2}\pi.$$



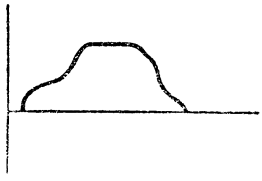
Черт. 246.

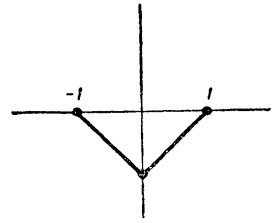
3. Рассмотрим функцию $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ на сегменте $[0,1]$; имеем: $f(0)=f(1)=0$. Функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(0,1)$ и непрерывна в точках 0 и 1. Значит, она удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Разобьем сегмент $[0,1]$ на бесконечное множество сегментов:

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \ldots \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \ldots$$

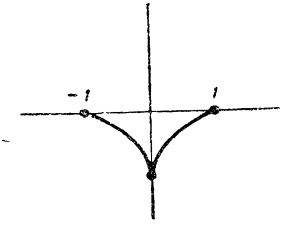
На каждом из этих сегментов $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, поэтому на сегменте $[0,1]$ существует бесконечное множество точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, в которых производная равна нулю (черт. 246).

4. Если на сегменте $[a, b]$ данная функция имеет промежуток постоянства, то производная равна нулю в любой точке этого промежутка (черт. 247).


Черт. 247.



Черт. 248.



Черт. 249.

5. Рассмотрим функцию $f(x)=|x|-1$ на сегменте $[-1, 1]$; имеем: $f(-1)=f(1)=0$.

Наименьшее значение функция имеет в точке 0, которая является угловой и в которой, следовательно, производная не существует (черт. 248).

6. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ на сегменте $[-1, 1]$; $f(-1)=f(1)=0$. Наименьшее значение функция имеет в точке 0, являющейся точ-

кой возврата, в которой не существует ни конечная, ни бесконечная производная (черт. 249).

В обоих последних примерах производная существует в любой точке, отличной от нуля, причем $f'(x) \neq 0$; таким образом, не существует такой точки, в которой $f'(\xi) = 0$.

Следствия теоремы Ролля. I. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *в интервале* (a, b) *имеет конечную или бесконечную производную, в концах сегмента значения* $f(x)$ *равны, то существует хотя бы одна внутренняя точка сегмента* $[a, b]$, *в которой производная* $f'(x)$ *равна нулю.*

Пусть $f(a) = f(b) = C$. Функция $\varphi(x) = f(x) - C$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на сегменте $[a, b]$. В самом деле, функция $\varphi(x)$ имеет конечную или бесконечную производную на сегменте $[a, b]$, равную $f'(x)$:

$$\varphi(a) = f(a) - C = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(b) = f(b) - C = 0.$$

Значит в некоторой внутренней точке $\xi \in (a, b)$ имеем $\varphi'(\xi) = 0$, но $\varphi'(\xi) = f'(\xi)$; следовательно, $f'(\xi) = 0$, ч. т. д.

II. *Если функция* $f(x)$:

1° *непрерывна на сегменте* $[a, b]$,

2° *имеет в интервале* (a, b) *конечную или бесконечную производную* n-го *порядка*,

3° *существует* $n - 1$ *точек* $t_1, t_2 \ldots, t_{n-1}$ — таких, что $a < t_1 < t_2 \ldots < t_{n-1} < b$ и

$$f(a) = f(t_1) = f(t_2) = \ldots = f(b) = 0,$$

то по крайней мере в одной точке $\xi \in (a, b)$ *имеет место равенство* $f^{(n)}(\xi) = 0$.

В самом деле, на каждом из сегментов $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\ldots$, $[t_{n-1}, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а потому существуют n точек $t_1' < t_2' < \ldots < t_n'$ — таких, что

$$f'(t_1') = f'(t_2') = \ldots = f'(t_n') = 0.$$

На каждом из сегментов $[t_1', t_2']$, $[t_2', t_3']$, $\ldots$, $[t_{n-1}', t_n']$ функция $f'(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а потому

$$f''(t_1'') = f''(t_2'') = \ldots = f''(t_{n-1}'') = 0,$$

где

$$t_1'' < t_2'' < \ldots < t_{n-1}''.$$

Теперь рассмотрим функцию $f'(x)$ на сегментах

$$[t_1'', t_2''], [t_2'', t_3''], \ldots, [t_{n-2}'', t_{n-1}'']$$

и снова применим теорему Ролля. Продолжая описанный процесс, после $n - 1$-й операции получим один сегмент $[t_1^{(n-1)}, t_2^{(n-1)}]$, на котором функция $f^{(n-1)}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля;

она дифференцируема и

$$f^{(n-1)}(t_1^{(n-1)}) = f^{(n-1)}(t_2^{(n-1)}) = 0.$$

Применяя теоремму Ролля, получим: $f^{(n)}(\xi) = 0$, где $t_1^{(n-1)} < \xi < t_2^{(n-1)}$. Так как

$$[t_1^{(n-1)},\ t_2^{(n-1)}] \subset [a, b], \text{ то } a < \xi < b.$$

Пример.

Рассмотрим выражение $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Под знаком производной находится многочлен степени $2n$; после n-кратного дифференцирования получится многочлен степени n; этот многочлен называется полиномом Лежандра и обозначается символом $P_n(x)$. Докажем, что полином Лежандра степени n имеет n простых действительных корней в интервале $(-1, 1)$.

Для многочлена $Q(x) = (x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$ каждое из чисел 1 и -1 является n-кратным корнем; этот многочлен никаких других корней не имеет. Для многочлена $Q'(x)$ каждое из чисел 1 и -1 является корнем кратности $n-1$*. Так как $Q(-1) = Q(1) = 0$, то по теореме Ролля $Q'(\xi) = 0$, где $-1 < \xi' < 1$ (легко видеть, что $\xi' = 0$). Итак, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность, то можно сказать, что известны $2(n-1)+1$ корней многочлена $Q'(x)$ степени $2n-1$. Кроме этих корней, $Q'(x)$ никаких других корней не имеет. Вторая производная $Q''(x)$ есть многочлен степени $2n-2$, имеющий в каждой из точек 1 и -1 корень кратности $n-2$. Так как $Q'(-1) = Q'(\xi') = Q'(1)$, то по теореме Ролля каждый из интервалов $(-1, \xi')$ и $(\xi', 1)$ содержит корни $Q''(x)$; обозначим их через ξ_1'' и ξ''. Так как многочлен $Q''(x)$ имеет степень $2n-2$, то он не имеет никаких других корней. Продолжая эти рассуждения, увидим, что $Q'''(x)$ в интервале $(-1, 1)$ имеет три корня и, наконец, что $Q^{(n)}(x) = P_n(x)$ внутри интервала $(-1, 1)$ имеет n различных действительных корней

§ 83. Теорема Лагранжа

Теорема. *Если функция* $f(x)$:

1° *непрерывна на сегменте* $[a, b]$,

2° *в каждой точке интервала* (a, b) *имеет конечную или бесконечную производную,*

то в интервале (a, b) *существует по крайней мере одна точка* ξ, *в которой имеет место равенство:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \quad \text{где } a < \xi < b.$$

Доказательство. Построим линейную функцию $l(x)$, значения которой в концах сегмента равны соответствующим значениям $f(x)$:

$$l(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

---

* Здесь мы пользуемся теоремой высшей алгебры о том, что если многочлен $P(x)$ в точке a имеет корень кратности $n > 1$, то производная $P'(x)$ в точке a имеет корень кратности $n-1$.

Имеем:

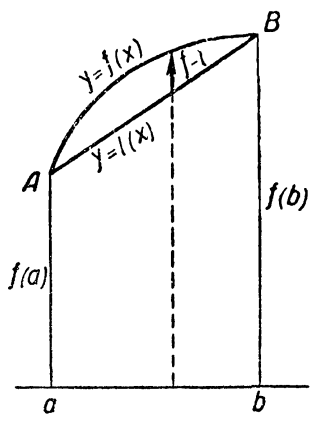
$$l(a)=f(a) \quad \text{и} \quad l(b)=f(b).$$

Функция $l(x)$ имеет конечную производную, равную

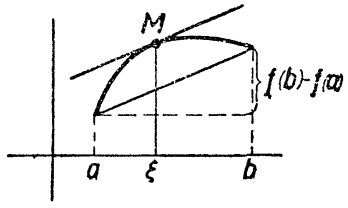
$$l'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}=\text{const}.$$

Разность $f(x)-l(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: непрерывна на $[a, b]$, обращается в нуль в точках a и b и имеет в (a, b) конечную или бесконечную производную. Значит, хотя бы в одной точке $\xi \in (a, b)$ производная $(f(x)-l(x))'$ обращается в нуль: $f'(\xi)-l'(\xi)=0$, откуда $l'(\xi)=f'(\xi)$ или

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \quad \text{ч. т. д.}$$



Черт. 250.



Черт. 251.

Геометрическая интерпретация. Уравнение $y=l(x)$ есть уравнение прямой, проходящей через концы $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ данной дуги (черт. 250). Число $f'(\xi)$ есть угловой коэффициент касательной в некоторой внутренней точке $M(\xi, f(\xi))$ дуги, число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды AB; равенство этих чисел означает, что касательная к данной дуге в точке M параллельна хорде AB.

Итак, теорема Лагранжа утверждает, что на дуге графика $y=f(x)$, имеющей в каждой точке касательную и не имеющей точек возврата, существует по крайней мере одна такая точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей дугу (черт. 251).

§ 84. Формула Лагранжа

Если функция $f(x)$ имеет в каждой точке промежутка $<A, B>$ конечную или бесконечную производную, то при любых различ-*

* Заметим, что непрерывность $f(x)$ следует из существования конечной или бесконечной производной $f'(x)$. В самом деле, $f(x)$ непрерывна во всех точках, в которых $f'(x)$ конечна, если же $f'(x)$ бесконечна, то, согласно определению (см. § 71), бесконечные производные рассматриваются лишь для непрерывных функций.

ных значениях аргумента x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, имеет место равенство:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

где ξ — число, промежуточное между x_1 и x_2.

1° Пусть $x_1<x_2$, на сегменте $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, а потому (полагаем $a=x_1$ и $b=x_2$)

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi), \text{ где } x_1<\xi<x_2.$$

2° Пусть $x_1>x_2$. Рассмотрим сегмент $[x_2, x_1]$. Применив теорему Лагранжа, получим:

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(\xi), \quad \text{где } x_2<\xi<x_1,$$

или, что то же,

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

где ξ — число, промежуточное между x_1 и x_2.

В обоих случаях 1° и 2° разности $\xi-x_1$ и x_2-x_1 либо обе положительны, либо обе отрицательны, а так как $|\xi-x_1|<|x_2-x_1|$, то отношение $\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}$ есть положительное число, меньшее 1. Обозначив $\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}=\theta$, получим:

$$\xi=x_1+\theta(x_2-x_1), \quad \text{где } 0<\theta<1.$$

Итак, формула Лагранжа может быть записана в виде

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(x_1+\theta(x_2-x_1)).$$

Если положить $x_2-x_1=h$ и $x_1=x$, получим:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h), \quad \text{где } 0<\theta<1.$$

§ 85. Следствия теоремы Лагранжа

Теорема о функции, производная которой равна нулю. Если в промежутке $<a, b>$ функция $f(x)$ постоянна, то известно, что ее производная равна нулю в каждой точке этого промежутка (см. § 65); теорема Лагранжа позволяет доказать обратную теорему.

Теорема. *Если в каждой точке промежутка $<a, b>$ производная функции $f(x)$ равна нулю, то $f(x)=\text{const}$ в этом промежутке.*

Доказательство. Пусть c — какая-нибудь точка промежутка $<a, b>$. Рассмотрим любую точку $x\in<a, b>$. По формуле Лагранжа имеем:

$$f(x)-f(c)=f'(\xi)(x-c)=0$$

(ибо $f'(\xi)=0$). Следовательно, при всех значениях $x\in\langle a, b\rangle$ имеем $f(x)=f(c)=\text{const}$, ч. т. д.

Определение. *Функция $\Phi(x)$, производная которой равна $f(x)$, называется примитивной по отношению к $f(x)$.*

Например, функция $\sin x$ примитивная по отношению к $\cos x$, функция $\frac{x^3}{3}+1$ примитивная по отношению к x^2. Очевидно, если $\Phi(x)$ примитивная по отношению к $f(x)$, т. е. если $\Phi'(x)=f(x)$, то функция $\Phi(x)+C$, где C — любое действительное число, также примитивная, потому, что

$$[\Phi(x)+C]'=\Phi'(x)=f(x).$$

Теорема. *Если $\Phi(x)$ есть примитивная по отношению к функции $f(x)$, определенной в каждой точке некоторого промежутка, то всякая другая примитивная по отношению к той же функции $f(x)$, равна $\Phi(x)+C$, где C — некоторое число.*

Доказательство. В самом деле, пусть две различные функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ являются примитивными по отношению к $f(x)$. Значит, $\Phi'(x)=f(x)$ и $F'(x)=f(x)$. Таким образом, функция $F(x)-\Phi(x)$ имеет производную $F'(x)-\Phi'(x)$, равную нулю. В силу доказанной теоремы, эта функция есть константа: итак,

$$F(x)-\Phi(x)=C, \quad \text{откуда } F(x)=\Phi(x)+C, \quad \text{ч. т. д.}$$

Часто эта теорема формулируется так: *функции, имеющие равные производные, либо равны, либо отличаются на константу.* Следует иметь в виду, что идет речь лишь о функциях, имеющих конечные производные. Если конечные или бесконечные производные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ во всех точках некоторого промежутка одинаковы, то из приведенных рассуждений не следует, что данные функции отличаются на константу (в доказательстве производные $F'(x)$ и $\Phi'(x)$ конечны: $F'(x)=\Phi'(x)=f(x)$).

Можно построить пример функций, имеющих одинаковые конечные или бесконечные производные во всем промежутке, но не отличающихся на константу (построение примера выходит за рамки данного курса).

Примеры.

1. $\frac{d(\arcsin x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\frac{d(\arccos x)}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Следовательно, в интервале $(-1, 1)$ функции $\arcsin x$ и $-\arccos x$ являются примитивными относительно одной и той же функции: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Поэтому в интервале $(-1, 1)$ имеем:

$$\arcsin x+\arccos x=C.$$

Чтобы определить C, достаточно вычислить значение левой части при одном каком-нибудь значении аргумента. Так, полагая $x=0$, получим $\frac{\pi}{2}=C$. Мы получили известное из элементарной математики тождество:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

2. Функции $\sin^2 x$ и $\frac{-\cos 2x}{2}$ являются примитивными по отношению к функции $2\sin x\cos x=\sin 2x$. Следовательно, $\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=C$; полагая $x=0$, получим $C=\frac{1}{2}$. Таким образом, мы получаем формулу $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

3. Рассмотрим функцию $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. Функция $f(x)$ определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, ибо $|2x|\leqslant 1+x^2$ при любом действительном значении x. Вычислив производную, получим:

$$f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2(1+x^2)}}.$$

Преобразуем полученное выражение для $f'(x)$:

$$\sqrt{(1-x^2)^2}=|1-x^2|=\begin{cases} 1-x^2 & (\text{если } |x|<1)\\ -(1-x^2) & (\text{если } |x|>1),\end{cases}$$

откуда

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & (\text{если } |x|<1);\\ -\dfrac{2}{1+x^2} & (\text{если } |x|>1).\end{cases}$$

Мы видим, что $f'(x)$ совпадает в интервале $(1, +\infty)$ с производной от функции $-2\operatorname{arctg} x$, в интервале $(-1, 1)$ — с производной от $2\operatorname{arctg} x$ и в интервале $(-\infty, -1)$ — с производной от $-2\operatorname{arctg} x$. Следовательно,

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x=C_1 \quad \text{в интервале } (1, +\infty),$$

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-2\operatorname{arctg} x=C_2 \quad \text{в интервале } (-1, 1),$$

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x=C_3 \quad \text{в интервале } (-\infty, -1).$$

Полагая $x=\sqrt{3}$, получим $C_1=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$; полагая $x=0$, получим $C_2=0$, полагая $x=-\sqrt{3}$, получим $C_3=-\pi$.

Следовательно,

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases} \pi-2\operatorname{arctg} x & (\text{если } x\geqslant 1)\\ 2\operatorname{arctg} x & (\text{если } -1\leqslant x\leqslant 1)\\ -\pi-2\operatorname{arctg} x & (\text{если } -1\geqslant x)\end{cases}$$ (черт. 252).

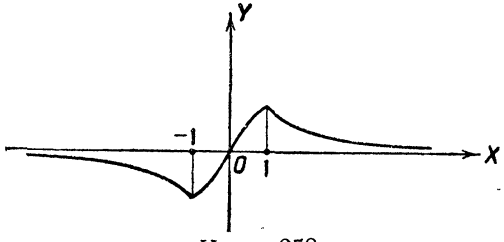
О функциях, имеющих ограниченную производную. Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема на сег-

менте $[a, b]$ и $f'(x)$ ограничена на этом сегменте; обозначим через N верхнюю грань абсолютной величины $f'(x)$; тогда $|f'(x)| \leqslant N$ при любом $x \in [a, b]$. Пусть x_1 и x_2 — любые две точки, расположенные на $[a, b]$. Имеем:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)|\,|x_2 - x_1|,$$

откуда

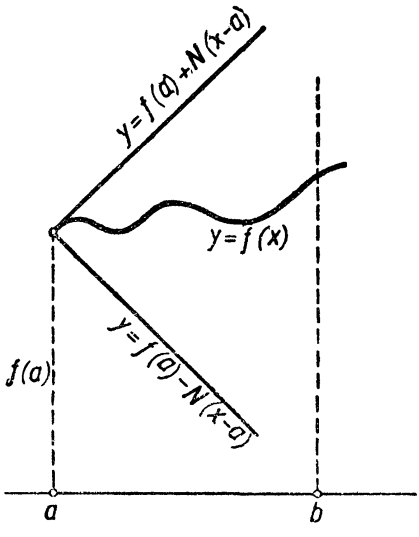
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant N\,|x_2 - x_1|. \quad (1)$$



Черт. 252.

Как бы ни была расположена на сегменте $[a, b]$ пара точек x_2 и x_1, если только $|x_2 - x_1| < \frac{\varepsilon}{N}$, то $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Теорема о равномерной непрерывности утверждает выполнение неравенства (1) при условии $|x_2 - x_1| < \delta$, однако она не указывает, как мало должно быть положительное число δ. Для функции с ограниченной производной в качестве δ может быть взято любое число, меньшее $\frac{\varepsilon}{N}$.



Черт. 253.

Пример.

$f(x) = \ln x$. Эта функция дифференцируема на любом сегменте $[a, b]$, где $a > 0$ и $f'(x) = \frac{1}{x}$. По формуле Лагранжа имеем:

$$\ln x_2 - \ln x_1 = (x_2 - x_1)\frac{1}{\xi}.$$

Значит,

$$|\ln x_2 - \ln x_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{\xi}, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

есть убывающая функция на сегменте $[a, b]$, а потому $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$. Итак,

$$|\ln x_2 - \ln x_1| < \frac{|x_2 - x_1|}{a}.$$

Значит, при любых x_1 и x_2 на $[a, b]$ имеем $|\ln x_2 - \ln x_1| < \varepsilon$, если только $|x_2 - x_1| < a\varepsilon$. Можно положить $\delta = a\varepsilon$.

Положим в неравенстве (1) $x_1 = a$ и $x_2 = x$, тогда получим:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant N(x - a)$$

или

$$f(a) - N(x - a) \leqslant f(x) \leqslant f(a) + N(x - a).$$

Следовательно, график функции $y = f(x)$ всюду на $[a, b]$ расположен внутри угла, образованного прямыми

$$y = f(a) \pm N(x - a) \quad \text{(черт. 253)}.$$

О производной неограниченной функции.

Теорема. *Если функция имеет конечную или бесконечную производную и неограничена в конечном интервале (a, b), то $f'(x)$ неограничена в этом интервале.*

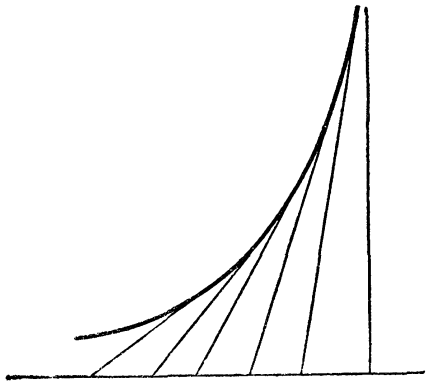
Доказательство. Будучи непрерывной, но неограниченной в интервале (a, b), функция $f(x)$ неограничена в окрестности хотя бы одного из его концов. Допустим, вопреки утверждению, что производная ограничена $|f'(x)|<N$. Пусть c — любая точка в (a, b). По формуле Лагранжа, имеем:

$$|f(x)-f(c)|=|f'(\xi)|\,|x-c|<N|b-a|.$$

Следовательно, вопреки условию, $f(x)$ ограничена на (a, b):

$$|f(x)|<|f(c)|+N|b-a|, \quad \text{ч. т. д.}$$

Геометрическая интерпретация. Касательная к графику функции, неограниченной в конечном интервале, может составлять с осью абсцисс угол, как угодно близкий к прямому (т. е. к $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$, черт. 254).



Черт. 254.

Примеры.

1. $f(x)=\frac{1}{(x-2)^3}$; функция не ограничена в интервале (1, 2);

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=-\infty;\quad f'(x)=-\frac{3}{(x-2)^4}.$$

Функция $f'(x)$ неограничена в окрестности точки 2 (так как $\lim\limits_{x\to 2-} f'(x)=-\infty$). Аналогично, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=+\infty$, и $\lim\limits_{x\to 2+} f'(x)=-\infty$.

2. $$f(x)=\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x};\quad \lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty;$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}=-\frac{2}{x^2}\sin^2\frac{1}{2x}.$$

Функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ неограничены в интервале (0, 1), но $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ не существует.

3. Производная функции, не ограниченной в бесконечном промежутке, может быть ограниченной. Примером может служить $f'(x)=\ln x$ на полусегменте $[1, +\infty)$.

Основное свойство промежуточного значения. Допустим, что $f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную в δ-окрестности U_a точки a. Пусть $x\in U_a$. По формуле Лагранжа,

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi).$$

Так как $f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную в точке a, то

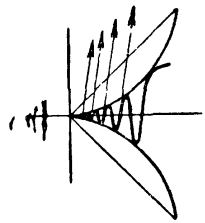
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

откуда и получаем основное свойство промежуточного значения, выражаемое равенством:

$$\lim_{x\to a} f'(\xi)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a). \qquad (1)$$

Геометрический смысл равенства (1) очевиден: значение $f'(\xi)$ совпадает с угловым коэффициентом секущей графика $y=f(x)$, проходящей через точку $M(a, f(a))$, а предел углового коэффициента секущей в точке $x=a$ есть угловой коэффициент касательной в точке M, т. е. $f'(a)$.

Неправильное толкование соотношения (1) может привести к грубой ошибке. Будем рассуждать так: перепишем (заменив ξ на x) равенство (1) в виде $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=f'(a)$; таким образом, производная $f'(x)$ есть непрерывная функция в точке a; итак, получилось противоречие с подтвержденным на ряде примеров положением, что производная функция может быть разрывной (см. § 72). Причина этого противоречия следующая: из равенства $\lim\limits_{x\to a} f'(\xi)=f'(a)$ не следует, что $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=f'(a)$. В самом деле, пусть для определенности $x>a$. В таком случае, в силу формулы Лагранжа, для каждого $x>a$ из δ-окрестности точки a существует хотя бы одно число ξ, удовлетворяющее равенству:



Черт. 255.

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi). \qquad (2)$$

Рассмотрим множество всех интервалов (a, x), где $a<x<a+\delta$. Так как каждому интервалу (a, x) соответствует хотя бы одно число ξ, удовлетворяющее равенству (2), то существует бесконечное множество чисел ξ, промежуточных между a и $a+\delta$,— таких, что равенство (2) будет иметь место. Однако отсюда не следует, что множество $\mathfrak{M}$ чисел ξ заполняет какой-либо интервал $(a, a+h)$ с концом в точке a. Поэтому предел производной $f'(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$:

$$\lim_{\xi\to a+} f'(\xi)=\lim_{x\to a+} f'(x) \quad (x\in\mathfrak{M}),$$

может существовать, тогда как $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ не существует.

Пример.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$ на сегменте $[0, 1]$.

В точке 0 эта функция имеет правую производную, равную нулю. В окрестности точки 0 производная неограничена. Секущие, соединяющие точку 0 с точками $x=1$, $y=\pm 1$ парабол $y=\pm x^2$ (между которыми заключена линия), имеют угловые коэффициенты, равные ± 1. Пусть x—любое число $(0<x\leqslant 1)$; обозначим через M соответствующую точку на линии. Угловой коэффициет k любой хорды OM не превосходит по абсолютной величине числа 1. Так как $f'(x)$ неограничена в окрестности точки 0, то в любой окрестности точки 0 найдутся такие точки, в которых значения производной по абсолютной величине больше 1. Ни одна такая точка не может войти в множество чисел ξ. В нашем случае $\lim\limits_{x\to 0+} f'(\xi)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ не существует (черт. 255).

§ 86. Теорема Коши

Теорема. *Если функции* $f(x)$ и $\varphi(x)$:

1° *непрерывны на сегменте* $[a, b]$,

2° *в интервале* (a, b) *имеют конечные или бесконечные производные,*

3° *во всякой точке* x *интервала* (a, b) *хоть одна из производных* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *отлична от нуля и конечна,*

4° $$\varphi(a) \neq \varphi(b),$$

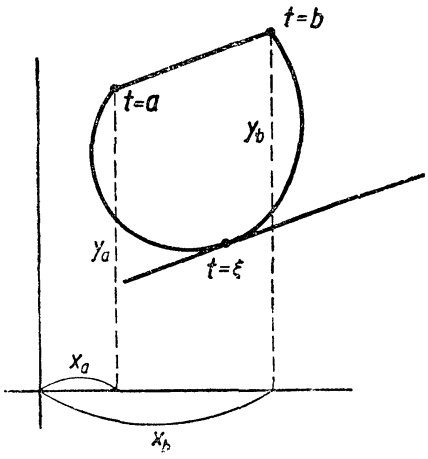
то существует хотя бы одна точка ξ, *лежащая внутри сегмента* $[a, b]$,— *такая, что имеет место равенство*:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = [f(b) - f(a)]\,[\varphi(x) - \varphi(a)] - [f(x) - f(a)]\,[\varphi(b) - \varphi(a)].$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой имеет место равенство $F'(\xi) = 0$, откуда



Черт. 256.

$$f'(\xi)\,[\varphi(b) - \varphi(a)] = \varphi'(\xi)\,[f(b) - f(a)].$$

Докажем, что $\varphi'(\xi) \neq 0$. В самом деле, если бы производная $\varphi'(x)$ в точке ξ равнялась нулю, то так как $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, в той же точке равнялась бы нулю и производная $f'(\xi)$, откуда $f'(\xi) = \varphi'(\xi) = 0$, что противоречит условию 3°. Следовательно, $\varphi'(\xi) \neq 0$, а потому

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}, \text{ ч. т. д.} \qquad (1)$$

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. В самом деле, положим $\varphi(x) = x$, тогда будем иметь: $\varphi'(\xi) = 1$ и $\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$, и равенство (1) принимает вид:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Геометрическая интерпретация. Будем толковать уравнения

$$y = f(t),\ x = \varphi(t);\ a \leqslant t \leqslant b$$

как параметрические уравнения дуги. В силу условия 3°, дуга не имеет особых точек*.

---

* Точки, в которых обе производные $x'(t)$ и $y'(t)$ равны нулю или бесконечны, рассматриваются как особые.

Число

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$$

есть угловой коэффициент хорды, соединяющей концы дуги. Число $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\frac{y'(\xi)}{x'(\xi)}$ есть угловой коэффициент касательной в некоторой точке дуги. Теорема Коши утверждает, что по крайней мере в одной точке дуги касательная параллельна хорде (черт. 256).

§ 87. Теорема о промежуточном значении производной

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную на сегменте $[a, b]$, то каково бы ни было число μ, заключенное между значениями $f'(a)$ и $f'(b)$, в интервале (a, b) существует хотя бы одна точка ξ, в которой $f'(\xi)=\mu$.*

Теорема утверждает, что производная $f'(x)$ в интервале (a, b) хотя бы в одной точке имеет значение, равное любому числу, промежуточному между значениями $f'(x)$ в точках a и b.

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда значения $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков; пусть, например, $f'(a)>0$, а $f'(b)<0$. Докажем, что существует хотя бы одна точка $\xi\in(a, b)$, в которой $f'(\xi)=0$. Функция $f(x)$, будучи непрерывной, имеет по крайней мере в одной точке $\xi\in[a, b]$ наибольшее и наименьшее значения. Так как $f'(a)>0$, то $f(x)>f(a)$ при $x>a$ (в достаточно малой окрестности точки a). Так как $f'(b)<0$, то $f(x)>f(b)$ при $x<b$ (в окрестности точки b). Следовательно, наибольшее значение не может иметь места в точках a и b, а имеет место в некоторой точке ξ внутри $[a, b]$. В этой точке имеем $f'(\xi)=0$ (см. доказательство теоремы Ролля).

Теперь допустим, что значения $f'(a)$ и $f'(b)$ произвольны, а μ — данное число, заключенное между этими значениями.

Функция

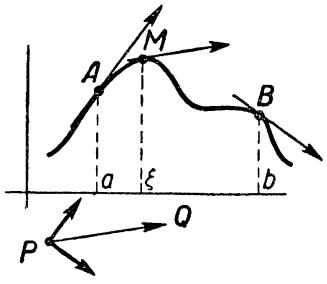
$$\varphi(x)=f(x)-\mu x$$

имеет на $[a, b]$ конечную или бесконечную производную, причем значения $\varphi'(a)=f'(a)-\mu$ и $\varphi'(b)=f'(b)-\mu$ разных знаков. Следовательно, хотя бы в одной точке $\xi\in(a, b)$ имеем

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\mu=0, \text{ т. е. } f'(\xi)=\mu, \text{ ч. т. д.}$$

Геометрическая интерпретация. Через произвольную точку P плоскости проведем лучи, параллельные касательным в концах дуги $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ и образующие с OX углы в пределах $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть PQ — какой-нибудь луч, лежащий внутри угла (черт. 257), образованного проведенными лучами. Согласно теореме на линии найдется хотя бы одна точка,

в которой касательная параллельна прямой PQ. В самом деле, пусть μ — угловой коэффициент прямой PQ. Число μ заключено между $f'(a)$ и $f'(b)$, поэтому $f'(\xi)=\mu$, где $\xi\in(a, b)$, т. е. прямые PQ и касательная в точке $M(\xi, f(\xi))$ параллельны.



Черт. 257.

Следствие. *Если в промежутке* $<a, b>$ *производная* $f'(x)$ *отлична от нуля, то во всех точках данного промежутка либо* $f'(x)>0$, *либо* $f'(x)<0$. В самом деле, если бы в $<a, b>$ среди значений $f'(x)$ были как положительные, так и отрицательные, то хотя бы в одной точке ξ производная $f'(\xi)$ была бы равна нулю. Следовательно, значения $f'(x)$ имеют один и тот же знак во всем промежутке.

§ 88. Точки разрыва производной

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *имеет в окрестности точки* a *при* $x>a$ (*при* $x<a$) *конечную или бесконечную производную и существует правый* (*левый*) *конечный или бесконечный предел производной*:

$$\lim_{x\to a+} f'(x) \quad (\text{или } \lim_{x\to a-} f'(x)),$$

то в точке a *существует правая* (*левая*) *производная, равная этому пределу.*

Доказательство. По теореме Лагранжа имеем:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi).$$

Так как точка ξ содержится в той же окрестности точки a, что и точка x, и так как существует предел $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$, то

$$\lim_{x\to a+} f'(\xi)=\lim_{x\to a+} f'(x);$$

следовательно,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)$$

также существует и равен $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$. Аналогичный результат имеет место и в случае существования левого предела $\lim\limits_{x\to a-} f'(x)$, ч. т. д.

Допустим, что существуют различные конечные или бесконечные односторонние пределы

$$\lim_{x\to a+} f'(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a-} f'(x),$$

тогда $f'_+(a)\neq f'_-(a)$; это значит, что в точке a не существует ни конечной, ни бесконечной производной $f'(a)$.

Следствие I. *Если в каждой точке интервала* (c, d) *существует производная, то она не может иметь точек разрыва первого рода.*

В самом деле, из неравенства пределов

$$\lim_{x\to a+} f'(x) \neq \lim_{x\to a-} f'(x) \quad \text{следует} \quad f'_+(a) \neq f'_-(a),$$

что несовместимо с существованием $f'(a)$.

Если известно, что точка a является точкой разрыва первого рода для $f'(x)$, то $f'(a)$ не существует.

Следствие II. *Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$, *то в точке* a *существует конечная или бесконечная производная, равная этому пределу*:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

Отсюда следует, что производная не может иметь точек устранимого разрыва, так как она непрерывна во всех тех точках, в которых она имеет конечный предел.

Если конечная или бесконечная производная существует в каждой точке некоторого промежутка, то точками разрыва $f'(x)$ могут быть точки, в которых $f'(x) = \pm\infty$, и точки разрыва второго рода.

Примеры.

1. Производная функция $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ в точке 0 имеет точку разрыва второго рода:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

2. В примере 6 § 65, стр. 258, мы нашли, что для функции

$$f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & (\text{если } x > 0) \\ \frac{2}{1+x^2} & (\text{если } x < 0). \end{cases}$$

В точке 0 производная не существует. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim\left(\frac{-2}{1+x^2}\right) = -2;$$

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim\left(\frac{2}{1+x^2}\right) = 2.$$

3. Функция

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x>0);\\ 0 & (x=0);\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

не может иметь примитивную в интервале $(-\infty, +\infty)$. Если $F'(x)=f(x)$, то точка $x=0$ есть точка разрыва первого рода для $F'(x)$, что невозможно

§ 89. Правило Лопиталя

Теорема. *Если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1° $$\lim_{x\to a} f(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

или

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty \text{ и } \lim_{x\to a}|\varphi(x)|=+\infty;$$

2° *функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в некоторой окрестности точки a при $x\neq a$ имеют конечные или бесконечные производные;*

3° *в окрестности точки a при любом $x\neq a$ хотя бы одна из значений $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ конечно и не равно нулю;*

4° *существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *и равен* A:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A.*$$

Доказательство. Докажем теорему для различных возможных случаев.

1) $$a\neq\pm\infty \text{ и } \lim_{x\to a}f(x)=\lim\varphi(x)=0,$$

при этом безразлично, о каком пределе идет речь: двустороннем или одностороннем. Рассмотрим функции $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$, равные соответственно $f(x)$ и $\varphi(x)$ при всех значениях $x\neq a$ и определенные в самой точке a условием $f_1(a)=\varphi_1(a)=0$ [если $f(a)=0$, то функция $f_1(x)$ тождественна $f(x)$]. Функции $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши: на любом достаточно малом сегменте $[a, x]$, если только $\varphi_1(x)=\varphi(x)\neq 0$, следовательно:

$$\frac{f_1(x)-f_1(a)}{\varphi_1(x)-\varphi_1(a)}=\frac{f_1'(\xi)}{\varphi_1'(\xi)}, \qquad (1)$$

* Для односторонних пределов условия теоремы должны выполняться в некотором промежутке справа или слева от точки a и с концом в точке a.

где $x \neq a$, $\varphi(x) \neq 0$ и ξ — промежуточное значение: $\xi = a + \theta(x-a)$. Так как $f_1(x) = f(x)$; $\varphi_1(x) = \varphi(x)$; $f_1(a) = \varphi_1(a) = 0$; $f_1'(\xi) = f'(\xi)$ и $\varphi_1'(\xi) = \varphi'(\xi)$, то равенство (1) перепишется так:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{2}$$

В силу условия теоремы, существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

поэтому предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(x)}$ также существует и равен A, ибо множество значений ξ составляет часть той окрестности точки a, в которой мы рассматриваем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Отсюда и следует, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A.$$

2) Если $a = +\infty$, то, отобразив окрестность точки $+\infty$ при помощи подстановки $x = \frac{1}{y}$ в правую часть ($y > 0$) окрестности точки 0, будем иметь:

$$\frac{d}{dy}\left[f\left(\frac{1}{y}\right)\right] = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)$$

и

$$\frac{d}{dy}\left[\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right] = -\frac{1}{y^2} \varphi'\left(\frac{1}{y}\right).$$

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{y \to 0+} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} \varphi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

то существует предел

$$\lim_{y \to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

и имеет место равенство:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Аналогично доказывается теорема для случая предела в точке $a = -\infty$.

3) Пусть в точке a имеем $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \lim\limits_{x \to a} |\varphi(x)| = +\infty$.

Рассмотрим две точки x и c по одну сторону от точки a, лежащие в той окрестности точки a, в которой выполнены условия $1°-4°$ теоремы. Из условий 2° и 3° и из условия $\lim\limits_{x\to a}|\varphi(x)|=+\infty$ следует, что в некоторой окрестности точки a на любом сегменте, ограниченном точками x и c, для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняются условия теоремы Коши*. Имеем:

$$\frac{f(x)-f(c)}{\varphi(x)-\varphi(c)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},\quad \text{где } \xi=c+\theta(x-c).$$

Преобразуем левую часть написанного равенства следующим образом:

$$\frac{f(x)-f(c)}{\varphi(x)-\varphi(c)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(c)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(c)}{\varphi(x)}},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(c)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(c)}{f(x)}}. \tag{3}$$

Рассмотрим следующие два возможные случая. Первый случай, когда предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ конечен, т. е. A есть некоторое действительное число, и второй случай, когда этот предел бесконечен. В первом случае выберем точку c в такой окрестности U_1 точки a, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-A\right|<\varepsilon'$$

при всех значениях аргумента, принадлежащих этой окрестности (где $\varepsilon'>0$ — произвольно заданное число). Если $c\in U_1$ и $x\in U_1$, то и $\xi\in U_1$, и мы получим $\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=A+\alpha$, где $|\alpha|<\varepsilon'$. Выбрав точку c, как указано, будем считать ее в последующих рассуждениях фиксированной; тогда имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{\varphi(c)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(c)}{f(x)}}=1,\quad \text{ибо } \lim_{x\to a}|\varphi(x)|=\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty.$$

---

* $\varphi(x)\neq\varphi(c)$ при x, содержащемся в некоторой окрестности точки a, так как $\lim\limits_{x\to a}|\varphi(x)|=+\infty$, а потому $|\varphi(x)|>|\varphi(c)|$.

Возьмем окрестность U_2 точки a, лежащую в U_1, $U_2 \subset U_1$ и такую, чтобы при $x \in U_2$ имело место неравенство:

$$\left| \frac{1-\frac{\varphi(c)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(c)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon'; \text{ тогда } \frac{1-\frac{\varphi(c)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(c)}{f(x)}} = 1+\beta, \text{ где } |\beta| < \varepsilon'.$$

Равенство (3) может быть переписано так:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = (A+\alpha)(1+\beta),$$

откуда

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - A \right| \leqslant |A||\beta| + |\alpha| + |\alpha||\beta| < |A|\varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon'^2.$$

Будем считать $\varepsilon' < 1$; тогда $\varepsilon'^2 < \varepsilon'$ и

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - A \right| < (|A|+2)\varepsilon'.$$

Взяв $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|A|+2}$, получим $\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - A \right| < \varepsilon$ при $x \in U_2$. Следовательно,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A.$$

Теперь рассмотрим случай, когда

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = +\infty.$$

Пусть $N > 0$ — любое заданное число. Оставляя прежние обозначения, возьмем окрестность U_1 — такую, чтобы имело место неравенство $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > 2N$. Окрестность U_2 ($U_2 \subset U_1$) выберем так, чтобы при $x \in U_2$

$$\frac{1}{2} < \frac{1-\frac{\varphi(c)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(c)}{f(x)}}.$$

Если $x \in U_2$, то $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > N$ (равенство (3)), т. е. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$.

Предоставляем читателю доказать справедливость теоремы для случая $A = -\infty$.

Итак, теорема доказана для всех случаев. Эта теорема и носит название правила Лопиталя.

Может оказаться, что обнаружить существование предела $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ и вычислить его значение легче, чем решить те же

вопросы по отношению к пределу функции $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если доказано существование предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то тем самым доказано и существование предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; если известно значение первого предела, то такое же значение имеет и второй предел (в предположении, что выполнены условия теоремы Лопиталя). Следует, однако, иметь в виду, что путем применения правила Лопиталя не всегда удается добиться упрощения.

Заметим, что если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, то отсюда не следует, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не существует (см. ниже пример 8). В самом деле, для доказательства мы применили теорему Коши, при этом множество промежуточных значений ξ может не совпадать с множеством значений аргумента x (см. стр. 305), поэтому $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, а следовательно, и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ могут существовать, а $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ может не существовать.

Если для функции $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке a

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim \varphi'(x)=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a}|f'(x)|=\lim|\varphi'(x)|=+\infty,$$

то можно исследовать отношение $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ в предположении, что $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя: тогда, если существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \quad \text{то} \quad \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

В случае необходимости можем взять отношение третьих производных и т. д.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. Применение правила Лопиталя дает:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\frac{\frac{1}{2}x^2E}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$. Применение правила Лопиталя дает:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}[(1+x)\ln(1+x)-x]}{x^2(1+x)}=$$

$$=\lim\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1+x}\lim\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=e\lim\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=$$

$$=e\lim\frac{\ln(1+x)}{2x}=\frac{e}{2}\ *.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim\dfrac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}=\dfrac{1}{3}$.

4. Пусть n — натуральное число. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{kx}}{x^n}$ (где $k>0$) может быть легко вычислен путем n-кратного применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}}{x^n}=\lim\frac{ke^{kx}}{nx^{n-1}}=\lim\frac{k^2e^{kx}}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim\frac{k^ne^{kx}}{n!}=+\infty.$$

5. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\ln^k x$ (где $\alpha>0$, а k — натуральное число); имеем: $x^\alpha\ln^k x=\dfrac{\ln^k x}{x^{-\alpha}}$. Применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x\to 0}x^\alpha\ln^k x=\lim\frac{k\ln^{k-1}x}{-\alpha\cdot x^{-\alpha}}=\lim\frac{k(k-1)\ln^{k-2}x}{(-\alpha)^2x^{-\alpha}}=\lim\frac{k!}{(-\alpha)^kx^{-\alpha}}=0$$

6. Применяя правило Лопиталя три раза, найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{1-\cos x}=\lim\frac{e^x-e^{\sin x}\cos^2 x+e^{\sin x}\sin x}{\sin x}=$$

$$=\lim\frac{e^x-e^{\sin x}\cos^3 x+e^{\sin x}2\sin x\cos x+e^{\sin x}\cos x\sin x+e^{\sin x}\cos x}{\cos x}=1.$$

Легко видеть, что на самом деле правило Лопиталя не внесло упрощения; наоборот, непосредственное вычисление предела в данном случае легче:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim e^{\sin x}\frac{(x-\sin x)E}{x-\sin x}=1.$$

7. Применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

однако мы не получаем никакого упрощения.

Непосредственным вычислением находим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

---

* Дважды применяем правило Лопиталя.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0$; составляя отношение производных, получим функцию $\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$, не имеющую предела в точке 0.

Подобным же образом $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$, а отношение производных $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ не имеет предела в точке $+\infty$. В этих случаях правило Лопиталя неприменимо.

9. Рассмотрим функцию $\dfrac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)\,e^{\sin x}}$, не имеющую предела в точке $+\infty$. Составив отношение производных, получим:

$$\frac{2+2\cos 2x}{(2+2\cos 2x)\,e^{\sin x}+(2x+\sin 2x)\,e^{\sin x}\cos x}=$$

$$=\frac{4\cos^2 x}{e^{\sin x}\,[2x+\sin 2x+4\cos x]\cos x}.$$

Предел последнего выражения в точке $+\infty$ равен нулю. Таким образом, правило Лопиталя неприменимо: в данном случае функции не удовлетворяют условиям теоремы Коши, ибо в любой окрестности точки $+\infty$ существуют такие точки $\left(x=\dfrac{2k+1}{2}\pi\right)$, в которых производные числителя и знаменателя обращаются в нуль.

ГЛАВА VIII

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 90. Монотонные функции

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную в промежутке $<a,\ b>$ то, для того чтобы она являлась неубывающей (невозрастающей) в промежутке $<a,\ b>$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была неотрицательна (неположительна) в этом промежутке: $f'(x)\geqslant 0$ (или $\leqslant 0$).*

Доказательство. 1° Условие необходимо. Допустим для определенности, что $f(x)$ не убывает; докажем, что в каждой точке $x\in<a,\ b>$ производная $f'(x)$ неотрицательна. В самом деле, для значений аргумента и соответствующих значений функции имеем неравенства одинакового смысла:

$$f(X)\leqslant f(x) \text{ при } X<x \text{ и } f(X)\geqslant f(x) \text{ при } X>x,$$

но тогда $\frac{f(X)-f(x)}{X-x} \geqslant 0$, а потому

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}\geqslant 0, \quad \text{ч. т. д.}$$

Для невозрастающей функции рассуждения аналогичны.

2° Условие достаточно. Допустим, что в каждой точке $x \in <a, b>$ имеет место неравенство $f'(x)\geqslant 0$; докажем, что $f(x)$ не убывает. В самом деле, рассмотрим две какие-либо точки x_1 и x_2, лежащие в промежутке $<a, b>$ и связанные неравенством $x_1 < x_2$. По формуле Лагранжа:

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(\xi)(x_2-x_1), \text{ где } x_1<\xi<x_2,$$

потому $\xi \in <a, b>$. Так как $f'(\xi)\geqslant 0$, то $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$, потому $f(x_2)\geqslant f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ не убывает, ч. т. д.

Теорема. *Чтобы функция $f(x)$, имеющая конечную или бесконечную производную, была возрастающей (убывающей) в промежутке $<a, b>$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке промежутка $<a, b>$ выполнялось неравенство $f'(x)\geqslant 0$ (или $\leqslant 0$), при этом равенство $f'(x)=0$ не может выполняться ни в каком промежутке, лежащем в $<a, b>$.*

Теорема выражает необходимое и достаточное условие строгой монотонности функции, имеющей производную в промежутке.

Доказательство. 1° Условие необходимо. Допустим, что $f(x)$ строго монотонна, значит, $f(x)$ не может иметь промежутков постоянства. По предыдущей теореме имеем (в частности):

$$f'(x)\begin{cases}\geqslant 0, & \text{если } f(x) \text{ возрастает;}\\ \leqslant 0, & \text{если } f(x) \text{ убывает.}\end{cases}$$

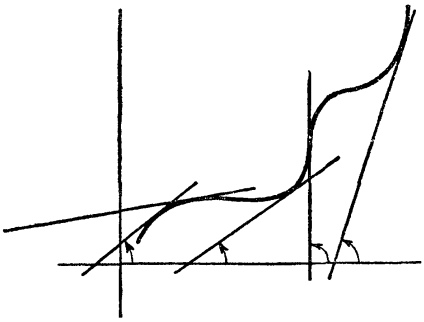
Равенство $f(x)=0$ не может иметь места ни в каком промежутке $<c, d>\subset <a, b>$, так как в противном случае $<c, d>$ был бы промежутком постоянства (см. стр. 300), ч. т. д.

2° Условие достаточно. Пусть $f'(x)\geqslant 0$ или $(f'(x)\leqslant 0)$, но равенство $f'(x)=0$ не имеет места ни в каком промежутке. В силу предыдущей теоремы, $f(x)$ не убывает (не возрастает). При этом $f(x)$ не может иметь промежутков постоянства, так как в противном случае $f'(x)=0$ в любом таком промежутке, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $f(x)$ — монотонная функция, не имеющая промежутков постоянства, а потому она является строго монотонной, ч. т. д.

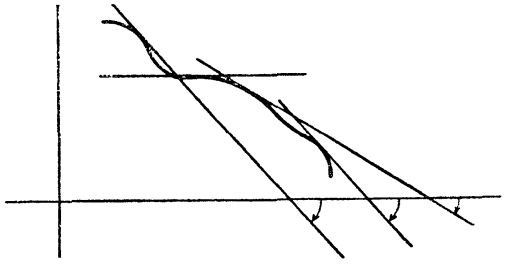
Из доказанной теоремы вытекает нижеследующее достаточное условие строгой монотонности:

Если в промежутке $<a, b>$ производная (конечная или бесконечная) положительна, $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает в $<a, b>$. Если $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ убывает.

Производная строго монотонной функции в некоторых точках может обращаться в нуль. Это видно хотя бы из примера функции $f(x)=x^3$ в промежутке $(-\infty,+\infty)$. Данная функция возрастает и $f'(0)=0$.

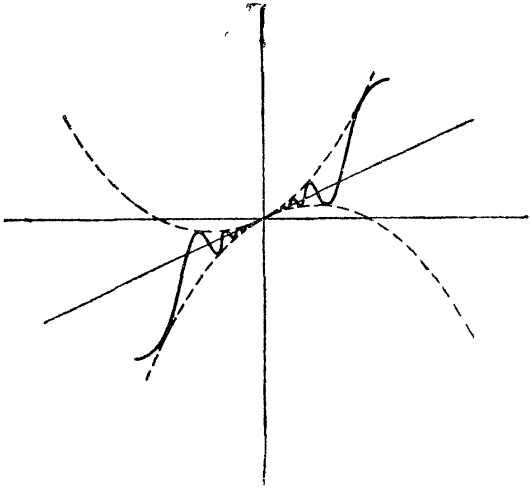


Черт 258.



Черт 259.

Геометрическая интерпретация. Касательная в каждой точке к графику неубывающей функции (имеющей конечную или бесконечную производную) или образует с осью абсцисс положительный угол, не больший $\frac{\pi}{2}$, или параллельна оси абсцисс. В самом деле, угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)\geqslant 0$, значит, $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ (черт. 258). Аналогично, касательная к графику невозрастающей функции образует с осью абсцисс или отрицательный угол, не меньший $-\frac{\pi}{2}$, или параллельна оси абсцисс (черт. 259).



Черт. 260.

Примечание. Если известно, что $f'(a)>0$, то отсюда нельзя заключить, что $f(x)$ возрастает в достаточно малой окрестности точки a. На чертеже 260 изображен график функции, имеющей в точке $M[a, f(a)]$ положительную производную, но не монотонной в окрестности точки a (на чертеже 260 $M=O(0, 0)$).

Если $f'(a)>0$ (или $f'(a)<0$) и производная $f'(x)$ непрерывна в точке a, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в достаточно малой окрестности точки a. В самом деле, в силу непрерывности $f'(x)$,

неравенство $f'(x)>0$ (или <0) имеет место в достаточно малой окрестности точки a, но тогда $f(x)$ возрастает (убывает) в этой окрестности.

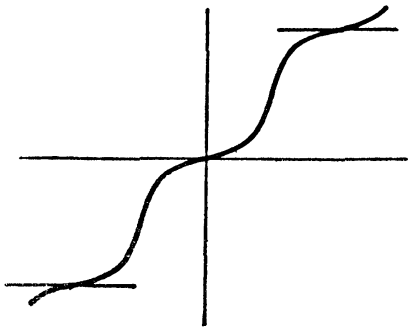
Примеры.

1. $f(x)=\ln x$ возрастает в интервале $(0, +\infty)$; имеем $f'(x)=\frac{1}{x}>0$ в этом интервале.

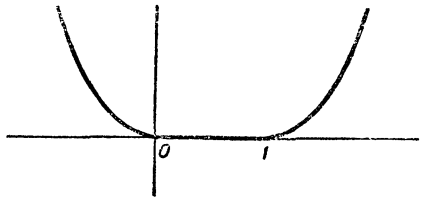
2. $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$; имеем $f'(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}>0$ в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Значит, $f(x)$ возрастает в этих интервалах.

3. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; имеем $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}<0$ в интервале $(0, +\infty)$ и $f'(x)>0$ в интервале $(-\infty, 0)$. Значит, $f(x)$ возрастает в интервале $(-\infty, 0)$ и убывает в интервале $(0, +\infty)$.

4. $f(x)=x-\sin x$; имеем $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$, причем $f'(x)=0$ в точках $2k\pi$; значит, $f(x)$ возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как множество



Черт. 261.



Черт. 262.

точек $2k\pi$ не содержит промежутка. В точках $2k\pi$ касательная к графику параллельна оси OX (черт. 261).

5. Положим

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ 0 & (0\leqslant x<1) \\ (x-1)^2 & (x\geqslant 1); \end{cases}$$

эта функция — неубывающая в промежутке $0\leqslant x\leqslant +\infty$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 0 & (0\leqslant x<1) \\ 2(x-1) & (x\geqslant 1) \end{cases}$$ (черт. 262);

$f'(x)\geqslant 0$ на полусегменте $[0, +\infty)$. Промежутком постоянства является сегмент $[0, 1]$.

6. Положим $f(x)=\frac{x}{2}=x^2\sin\frac{1}{x}$. В точке 0 оба слагаемые $\frac{x}{2}$ и $x^2\sin\frac{1}{x}$ дифференцируемы, и $f'(0)=\frac{1}{2}$. Если $x\neq 0$, то

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}\right)+2x\sin\frac{1}{x}.$$

Значение первого слагаемого $\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}$ в точках $\frac{1}{2k\pi}$ отрицательно: $\frac{1}{2}-\cos 2k\pi=-\frac{1}{2}$, а так как $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}=0$, то при достаточно больших значениях k знак $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right)$ определяется первым слагаемым, т. е. $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right)<0$. Производная $f'(x)$ непрерывна в любой точке $x\neq 0$; следовательно, $f(x)$ убывает в достаточно малой окрестности каждой из точек $\frac{1}{2k\pi}$. В точках $\frac{1}{(2k+1)\pi}$ значение $f'(x)$ положительно, так как значение первого слагаемого $\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}$ равно $\frac{3}{2}$, а второе слагаемое имеет пределом 0. В силу непрерывности $f'(x)$, функция $f(x)$ возрастает в достаточно малой окрестности каждой из точек $\frac{1}{(2k+1)\pi}$.

Итак, $f'(0)=\frac{1}{2}>0$, но в любой окрестности точки имеются такие промежутки, в которых $f(x)$ возрастает, и такие, в которых $f(x)$ убывает. График функции $f(x)$ и изображен на чертеже 260. При построении графика полезно заметить, что в силу неравенства $\frac{x}{2}-x^2\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{2}+x^2$ линия заключена между параболами $y=\frac{x}{2}-x^2$ и $y=\frac{x}{2}+x^2$.

§ 91. Теорема о неравенствах

Теорема. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$:*

1° *имеют конечные или бесконечные производные на сегменте $[a, b]$;*

2° *$f'(x)\geqslant\varphi'(x)$, причем равенство не имеет места ни в каком промежутке;*

3° $$f(a)=\varphi(a),$$

то $f(x)>\varphi(x)$ в полуинтервале $(a, b]$.

Доказательство. Положим $F(x)=f(x)-\varphi(x)$; тогда

$$F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)\geqslant 0.$$

Итак, $F(x)\geqslant 0$ на сегменте $[a, b]$, причем равенство нулю не имеет места ни в каком промежутке; таким образом, $F(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$; а так как $F(a)=0$, то $F(x)>0$ при $a<x\leqslant b$, т. е. $f(x)>\varphi(x)$ в полуинтервале $(a, b]$, ч. т. д.

Если условие 3° заменить таким: $f(b)=\varphi(b)$, то $f(x)<\varphi(x)$ на полусегменте $[a, b)$. Действительно, в этом случае $F(b)=0$, а так как $F(x)$ возрастает, то $F(x)<0$ при $a\leqslant x<b$.

Примеры.

1. $$f(x)=x,\quad f'(x)=1;$$

$$\varphi(x)=\ln(1+x),\quad \varphi'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

При $x>0$ имеем $f'(x)>\varphi'(x)$, при $x=0$ имеем $f(0)=\varphi(0)$. Значит, $\ln(1+x)<x$ в интервале $(0, +\infty)$.

2. $$f(x)=\ln(1+x),\quad f'(x)=\frac{1}{1+x};$$

$$\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2},\quad \varphi'(x)=1-x.$$

При $x>0$ имеем $1-x^2<1$, откуда $1-x<\frac{1}{1+x}$. Значит, $f'(x)>\varphi'(x)$ при $x>0$ и $f(0)=\varphi(0)$. Следовательно, $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$.

Итак, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ в интервале $(0, +\infty)$.

3. $$f(x)=\operatorname{tg}x,\qquad \varphi(x)=x+\frac{x^3}{3};$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad \varphi'(x)=1+x^2;$$

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\qquad \varphi''(x)=2x;$$

$$f'''(x)=2(1+3\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x),\qquad \varphi'''(x)=2.$$

При $0<x<\frac{\pi}{2}$ имеем $f'''(x)>\varphi'''(x)$; при $x=0$ $f''(0)=\varphi''(0)$.

Значит, $f''(x)>\varphi''(x)$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

При $x=0$ имеем $f'(0)=\varphi'(0)$; следовательно, $f'(x)>\varphi'(x)$, но $f(0)=\varphi(0)$. Значит, $\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 92. Наибольшее и наименьшее значения функции

В качестве синонимов терминов «наибольшее значение» и «наименьшее значение» употребляются термины «максимум» и «минимум», именно:

1° *Число M называется максимумом функции $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$, если M есть ее наибольшее значение на множестве $\mathfrak{M}$.*

2° *Число m называется минимумом функции $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$, если m есть наименьшее значение на множестве $\mathfrak{M}$.*

3° *Значения аргумента x, при которых $f(x)=M$, называются точками максимума, значения x, при которых $f(x)=m$, называются точками минимума.*

Таким образом, в силу определения для любого значения $x\in\mathfrak{M}$ имеем:

$$f(x)\leqslant M \quad \text{и} \quad m\leqslant f(x).$$

Максимум (минимум) называется строгим, если функция имеет на данном множестве единственную точку максимума (минимума). В противном случае максимум (минимум) называется нестрогим. Следовательно, если a есть точка строгого макси-

мума или минимума, то

$$f(x) < f(a) \quad \text{в случае максимума}$$

и

$$f(x) > f(a) \quad \text{в случае минимума,}$$

где $x \in \mathfrak{M}$ и $x \neq a$.

Для краткости термины «минимум» и «максимум» объединяются одним общим термином «экстремум». Точки, в которых функция имеет экстремум, называются точками экстремума.

Максимум и минимум на множестве $\mathfrak{M}$ обозначаются соответственно символами:

$$M = \max f(x) \quad (x \in \mathfrak{M}) \quad \text{и} \quad m = \min f(x) \quad (x \in \mathfrak{M}).$$

Примеры.

1. Пусть: a) $f(x) = \sin x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$; $\max f(x) = 1$, $\min f(x) = -1$.

Максимум нестрогий, точки максимума суть: $\xi = (4k+1)\frac{\pi}{2}$.

Минимум также нестрогий, точки минимума суть $\eta = (4k-1)\frac{\pi}{2}$.

b) $f(x) = \sin x$ на сегменте $[0, 2\pi]$; $\max f(x) = 1$, $\min f(x) = -1$.

Максимум строгий: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; минимум строгий: $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$, так как $f(x) \neq 1$, если $x \neq \frac{\pi}{2}$, и $f(x) \neq -1$, если $x \neq \frac{3}{2}\pi$.

c) $f(x) = \sin x$ в интервале $(0, \pi)$;

$\max f(x) = 1$ (строгий); $\min f(x)$ не существует.

d) $f(x) = \sin x$ на полусегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$;

$\max f(x)$ не существует; $\min f(x) = 0$ (строгий).

e) $f(x) = \sin x$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Экстремумов нет.

2. $f(x) = x^2$. В интервале $(-\infty, +\infty)$;

$\max f(x)$ не существует, $\min f(x) = 0$ (строгий).

3. $f(x) = \text{const} = C$;

$\max f(x) = C$ (нестрогий); $\min f(x) = C$ (нестрогий).

Итак, если $f(x) = \text{const} = C$, то $\max f(x) = \min f(x) = C$.

4. Для функции Дирихле $y = \chi(x)$;

$\max \chi(x) = 1$ (нестрогий); $\min \chi(x) = 0$ (нестрогий).

Таким образом, функция Дирихле в каждой точке имеет либо нестрогий максимум (при x рациональном), либо нестрогий минимум (при x иррациональном).

5. $y = \{x\}$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ в каждой точке $x = n$ (n — целое число) имеет нестрогий минимум $\min \{x\} = 0$, $\max \{x\}$ не существует.

6. Положим

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{(если } x\text{ — рациональное число);} \\ -x^2 & \text{(если } x\text{ — иррациональное число)} \end{cases}$$

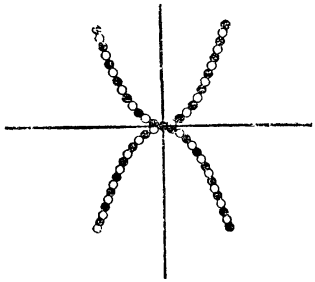
на множестве R рациональных чисел точка $x=0$ есть точка минимума:

$$f(0)=\min f(x)=0 \quad (x\in R).$$

На множестве R_1, состоящем из всех иррациональных чисел и числа 0, точка $x=0$ есть точка максимума:

$$f(0)=\max f(x)=0 \quad (x\in R_1).$$

В интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $f(x)$ не имеет экстремумов (черт. 263).



Черт. 263

§ 93. Локальные экстремумы

Определение. *Функция $f(x)$ на множестве $\mathfrak{M}$ имеет в точке a (где $a\in\mathfrak{M}$) локальный максимум (минимум), равный $f(a)$, если существует такая окрестность U_a точки a, что при любом значении аргумента $x\in\mathfrak{M}$ в окрестности U_a имеет место неравенство*

$$f(x)\leqslant f(a) \quad (\text{или } f(x)\geqslant f(a)).$$

Число a называется точкой локального максимума (минимума).

Если существует такая окрестность U_a, что при всех значениях $x\in\mathfrak{M}$, отличных от a, в окрестности U_a имеет место строгое неравенство

$$f(x)<f(a) \quad (\text{или } f(x)>f(a)),$$

то локальный максимум (минимум) называется строгим.

В случае нестрогого локального экстремума в любой окрестности точки a существуют такие точки x, отличные от a, в которых $f(x)=f(a)$.

Итак, локальный экстремум является экстремумом функции на множестве значений аргумента, лежащих в некоторой окрестности данной точки. В отличие от локальных экстремумов, экстремумы функции, рассматриваемой на всем данном множестве $\mathfrak{M}$, будем называть тотальными (на множестве $\mathfrak{M}$).

Всякий тотальный экстремум на данном множестве является в то же время и локальным, но не наоборот: локальный экстремум может не быть тотальным. На чертеже 264 изображен график функции, имеющей в точке a локальный максимум, но этот максимум не является тотальным по отношению ко всему множеству значений аргумента.

Символами $\max f(x)$ и $\min f(x)$ будем в дальнейшем обозначать тотальные экстремумы.

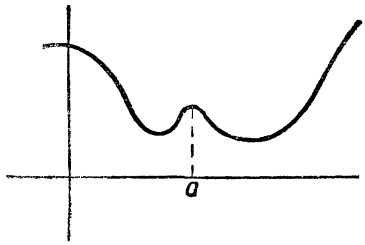
Примеры.

1. Функция $f(x)=x^2$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет минимум в точке $x=0$; этот минимум тотальный, а потому он же является и локальным: $\min x^2=0$. Максимума функция x^2 не имеет.

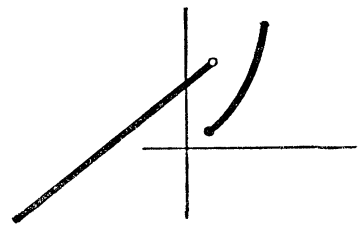
2. Функция

$$f(x)=\begin{cases} 5+x & (x<1) \\ x^2+1 & (x\geqslant 1) \end{cases}$$ (черт. 265)

имеет локальный минимум в точке 1, равный 2, так как в достаточно малой окрестности точки 1 имеем $f(x)>2$. Данная функция не имеет тотальных



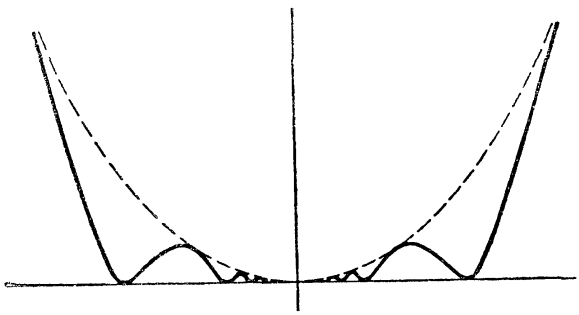
Черт. 264.



Черт. 265.

экстремумов. В самом деле, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

3. Если точка a является внутренней точкой промежутка постоянства, то ее можно рассматривать и как точку локального минимума (нестрогого), и как точку локального максимума (нестрогого).



Черт. 266.

4. $f(x)=[x]$ в интервале $(-\infty, +\infty)$; $\max[x]$ и $\min[x]$ не существуют, ибо $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}[x]=-\infty$. Каждая точка $x=n$, где n — целое число, является точкой нестрогого локального максимума (см. черт. 28).

5. Положим $f(x)=x^2\cos^2\frac{1}{x}$ (черт. 266). Имеем: $f(x)\geqslant 0$, поэтому в точке 0 имеется минимум. Этот экстремум, рассматриваемый как локальный, является нестрогим, ибо в любой окрестности точки 0 имеются точки $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$, в которых $f(x)=0$.

Как легко видеть, $\max f(x)$ не существует, ибо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, но в любой окрестности точки 0 существует бесконечное множество локальных максимумов. В самом деле, пусть α и β — две соседние точки, в которых $f(\alpha)=f(\beta)=0$. На сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывная функция $f(x)\geqslant 0$ и не есть константа, поэтому внутри каждого сегмента имеется положительный локальный максимум.

§ 94. Признаки существования локальных экстремумов

Теорема I (необходимый признак). *Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки a, имеет (конечную или бесконечную) производную в этой точке и точка a есть точка локального экстремума, то $f'(a)=0$.*

Доказательство (методом от противного). Допустим, что $f'(a)\neq 0$; согласно лемме II § 81, в достаточно малой окрестности точки a существуют значения аргумента, при которых $f(x)>f(a)$, и значения аргумента, при которых $f(x)<f(a)$. Следовательно, при наличии экстремума в точке a значение производной $f'(a)$ не может быть (вопреки предположению) отличным от нуля, а потому $f'(a)=0$, ч. т. д.

Определение. *Значения аргумента, при которых производная данной функции равна нулю, называются стационарными точками этой функции.*

Если a есть стационарная точка функции $f(x)$, т. е. если $f'(a)=0$, то касательная к графику функции $f(x)$ в точке $M(a, f(a))$ параллельна оси OX.

В силу доказанной теоремы, *точка локального экстремума дифференцируемой функции есть стационарная точка.*

Обратное утверждение неверно, так как не всякая стационарная точка является точкой локального экстремума. Так, например, строго монотонная в интервале функция не имеет локальных экстремумов, но может иметь стационарные точки. Различные виды стационарных точек представлены на чертеже 267.

Примеры.

1. Функция $f(x)=\cos x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет в точках $2k\pi$ локальный максимум и в точках $(2k+1)\pi$ — локальный минимум. Эти точки являются стационарными, так как производная $f'(x)=\sin x$ в этих точках равна нулю.

2. $f(x)=x^3$. Имеем: $f'(x)=3x^2$. Точка 0 есть стационарная точка: $f'(0)=0$, но в ней экстремума нет, ибо $f(x)$ есть возрастающая функция.

3. $f(x)=\sin x-x$. Имеем: $f'(x)=\cos x-1$.

Найдем стационарные точки: $f'(x)=0$, откуда $x=2k\pi$. В этих точках нет локального экстремума, ибо $f'(x)\leqslant 0$, т. е. $f(x)$ — убывающая функция в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Теорема II (достаточный признак). *Если функция $f(x)$,*

1° *непрерывна в окрестности U_a точки a;*

2° *слева от точки a не убывает (не возрастает), справа от точки a не возрастает (не убывает),*

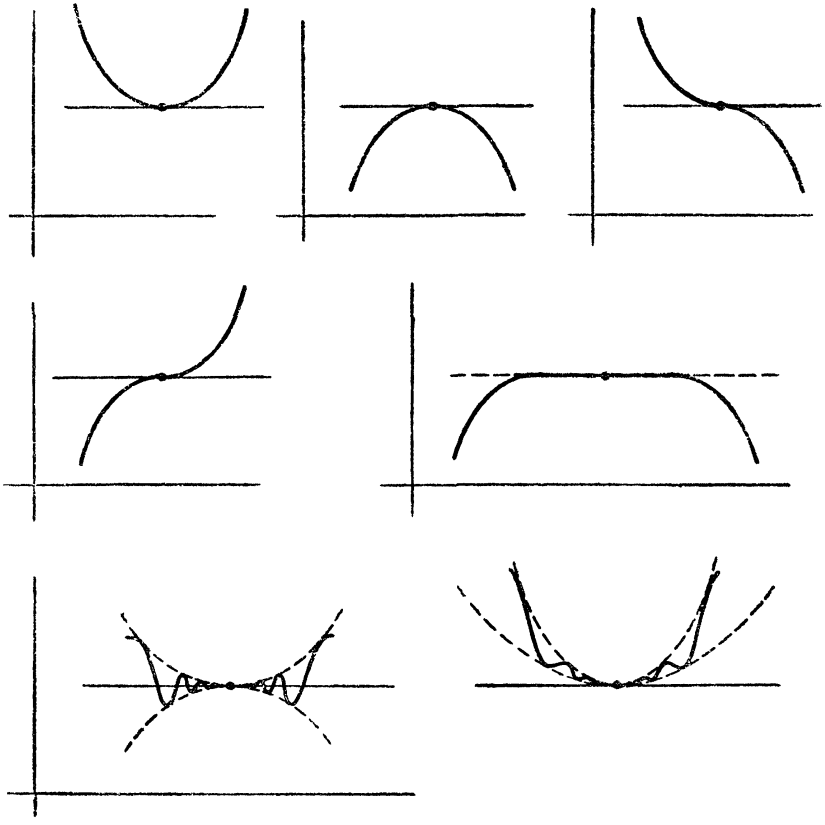
то a есть точка локального максимума (минимума).

Доказательство. Если $f(x)$ не убывает в окрестности точки U_a при $x<a$, то (в силу монотонности) существует левый предел $f(a-0)$, причем $f(x)\leqslant f(a-0)$ при $x\in U_a$ и $x<a$. В силу непрерывности $f(x)$ в точке a имеем $f(a-0)=f(a)$. Следовательно,

$f(x) \leqslant f(a)$ при $x \in U_a$ и $x < a$. Аналогично докажем, что если $f(x)$ справа от точки a не возрастает, то $f(a) \geqslant f(x)$ при $x \in U_a$ справа от точки a. Значит, в окрестности U_a

$$f(x) \leqslant f(a),$$

а потому a есть точка локального максимума (черт. 268), ч. т. д.

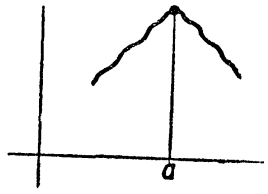


Черт. 267. Примеры стационарных точек.

Если в окрестности точки a слева от точки a непрерывная функция $f(x)$ возрастает (убывает), а справа убывает (возрастает), то a есть точка строгого локального максимума (минимума). В этом случае слева от точки a имеет место строгое неравенство $f(x) < f(a-0) = f(a)$ и справа от точки a — строгое неравенство $f(x) < f(a+0) = f(a)$. Следовательно, экстремум является строгим.

Полученное условие существования экстремума является достаточным, но не необходимым. На чертеже 269 изображен график функции, имеющей в точке 0 минимум, но не монотонной ни справа, ни слева от точки 0.

Если функция $f(x)$ в окрестности точки a имеет производную (конечную или бесконечную), то, как известно, о монотонности можно судить по знаку производной; в этом случае достаточный признак существования экстремума может быть сформулирован в следующем виде:

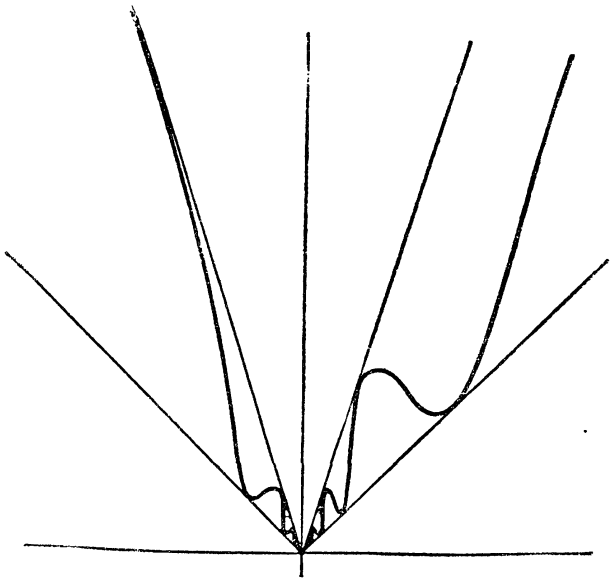


Черт. 268.

Если в окрестности точки a слева от этой точки производная неотрицательна (неположительна) $f'(x) \geqslant 0$ (или $f'(x) \leqslant 0$), а справа от точки a неположительна $f'(x) \leqslant 0$ (или $f'(x) \geqslant 0$), то a есть точка локального максимума (минимума).

В самом деле, при выполнении указанных условий функция $f(x)$ слева от точки a не убывает (не возрастает), а справа не возрастает (не убывает).

В частности, если слева от точки a производная положительна (отрицательна), а справа отрицательна (положительна), то экстремум функции в точке a является строгим. В этом случае слева и справа от точки a функция строго монотонна.


Черт. 269.

Нижеследующий признак, удобный в практическом применении, позволяет судить о наличии экстремума по значению второй производной в стационарной точке.

Если a есть стационарная точка и если $f''(a) < 0$, то в точке a функция $f(x)$ имеет строгий локальный максимум, если же $f''(a) > 0$, то в точке a функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум.

В самом деле, положим для определенности, что $f'(a) = 0$ и $f''(a) < 0$. Так как $f''(a)$ является производной в точке a от функции $f'(x)$, то, в силу леммы I § 81, в достаточно малой окрестности точки a имеем:

$$f'(x) > f'(a) \quad \text{слева от } a, \text{ т. е. } f'(x) > 0,$$

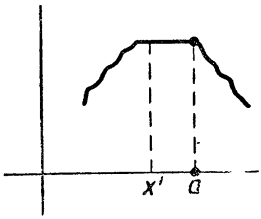
и

$$f'(x) < f'(a) \quad \text{справа от } a, \text{ т. е. } f'(x) < 0;$$

следовательно, в точке a имеет место строгий максимум. Случай $f''(a)>0$ рассматривается аналогично, ч. т. д.

Если $f'(a)=f''(a)=0$, то в общем случае вопрос о существовании экстремума остается открытым. Так, например, для функций x^3 и x^4 точка 0 является стационарной, вторые производные равны нулю, но в точке 0 первая функция не имеет экстремума, а вторая имеет минимум.

Примечание I. Если a есть внутренняя точка промежутка постоянства функции $f(x)$, то в достаточно малой окрестности точки a имеет место как условие $f(a)\geqslant f(x)$, так и условие $f(a)\leqslant f(x)$; значит, можно рассматривать точку a и как точку локального максимума и как точку локального минимума. В дальнейшем этот случай, как не представляющий интереса, мы исключаем из рассмотрения.



Черт. 270.

Примечание II. При соблюдении условий теоремы II максимум (минимум) в точке a может быть нестрогим, только когда точка a принадлежит промежутку постоянства. В самом деле, если экстремум нестрогий, то имеется точка x'—такая, что $f(x')=f(a)$. Пусть для определенности $x'<a$; тогда (в силу монотонности) $f(x)=f(a)$ на всем сегменте $[x', a]$ (черт. 270).

Примеры.

1. $f(x)=\left(2-\sin\frac{1}{x}\right)|x|$; так как $f(x)>0$ при $x\neq 0$, то в точке 0 имеет место минимум. График функции $f(x)$ заключен между графиками функций $y=3|x|$ и $y=|x|$. Производная $f'(x)=\left(2-\sin\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ (при $x>0$) непрерывна в любой точке $x>0$, неограничена и имеет в любой окрестности точки 0 как положительные, так и отрицательные значения. К аналогичному заключению придем, рассматривая $f'(x)$ при $x<0$. Отсюда заключаем, что $f(x)$ не монотонна в окрестности точки 0, график этой функции изображен на чертеже 269.

2. Существенным является условие непрерывности $f(x)$ в точке a. Так, например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 0);\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

убывает слева от точки 0 и возрастает справа от этой точки. Однако точка 0 является точкой локального максимума, но не минимума (см. черт. 139).

§ 95. Отыскание локальных экстремумов дифференцируемых функций

Если функция $f(x)$ в интервале (A, B) имеет конечную или бесконечную производную и точка a этого интервала есть стационарная точка, то вопрос о ее характере решается легко, если в некоторой окрестности точки a справа от a, а также слева

от a производная знакопостоянна. Будем говорить, что в точке a производная меняет знак, если слева от a и справа от a значения производной противоположны по знаку.

Нижеследующее правило дает возможность в наиболее часто встречающихся на практике случаях решить вопрос о нахождении локальных экстремумов.

Правило. *Для отыскания экстремумов функции $f(x)$ следует найти стационарные точки. Для этого надо решить уравнение*

$$f'(x)=0.$$

Из найденных корней (действительных) производной отобрать те, в которых производная меняет знак.

Максимум имеет место в тех точках, в которых производная меняет знак с $+$ на $-$ (считая слева направо).

Минимум имеет место в тех точках, в которых производная меняет знак с $-$ на $+$.

В тех точках, в которых производная не меняет знака, нет ни минимума, ни максимума.

Если существует вторая производная, то можно руководствоваться таким правилом.

Следует найти стационарные точки и вычислить в каждой из них значение второй производной. Максимум имеет место в точках, в которых вторая производная отрицательна, минимум — в точках, в которых вторая производная положительна.

Если вторая производная в стационарной точке равна нулю, то последнее правило неприменимо, надо непосредственно исследовать знак первой производной.

Если стационарные точки являются изолированными*, то можно отыскание точек локального экстремума проводить по следующей схеме:

Изолированные стационарные точки функции $f(x)$ разбивают интервал (A, B) на ряд интервалов. В каждом из этих интервалов функция является строго монотонной. Действительно, пусть функция $f(x)$ имеет изолированные стационарные точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$. В каждом из интервалов (A, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_k, B) значения производной $f'(x)$ не могут быть числами противоположных знаков; в противном случае, в силу теоремы о промежуточном значении производной, $f'(x)$ должна обратиться в нуль, что невозможно, так как в указанных интервалах стационарных точек функция $f(x)$ не имеет. Значит, в каждом из интервалов производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак, а потому функция $f(x)$ строго монотонна (возрастающая, если $f'(x)>0$, или убывающая, если $f'(x)<0$).

* Стационарная точка называется изолированной, если существует окрестность этой точки, не содержащая других стационарных точек.

Обозначая возрастание и убывание (соответственно) стрелками, направленными вверх и вниз, результаты исследования вносим в таблицу, из которой легко установить характер стационарных точек:

Интервал	$A, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	. . .
Знак $f'(x)$	+	−	−	. . .
Монотонность $f(x)$	↗	↘	↘	. . .

Заметим, что для установления знака $f'(x)$ в интервале (x_{i-1}, x_i) достаточно ограничиться установлением знака $f'(x)$ в какой-нибудь одной точке, так как значения $f'(x)$ имеют тот же знак в любой точке этого интервала.

Примечание. В случае наличия неизолированных стационарных точек функции $f(x)$ всякий раз требуется специальное исследование (см. ниже примеры 4, 5, 6).

Примеры.

1. $$f(x)=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Имеем: $f'(x)=\operatorname{sh} x$. Стационарная точка $x=0$: $f'(0)=0$. Если $x<0$, то $f'(x)<0$; если $x>0$, то $f'(x)>0$. Функция $\operatorname{ch} x$ в точке 0 имеет строгий минимум.

2. $f(x)=(x^2-1)^3+1$. Имеем: $f'(x)=6(x-1)^2(x+1)^2x$. Стационарные точки: $x=-1$, $x=1$, $x=0$.

Составляем таблицу.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	−	−	+	+
$f(x)$	↘	↘	↗	↗

В точках $x=1$ и $x=-1$ нет экстремума. В точке 0 минимум, равный $f(0)=0$ (черт. 271).

3. $f(x)=\sin x(1+\cos x)$. Имеем:

$$f'(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}.$$

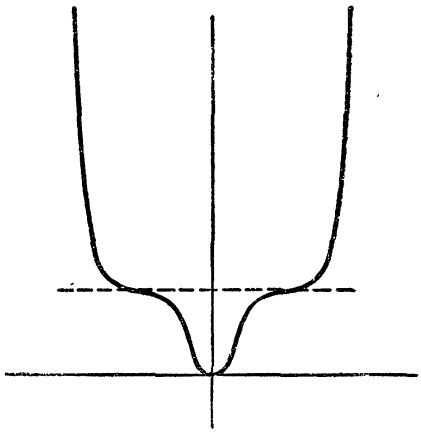
Находим стационарные точки, для чего надо решить уравнение:

$$2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}=0.$$

В силу периодичности данной функции, достаточно определить стационарные точки в промежутке, охватывающем один период. Так, в промежутке $[0, 2\pi]$ имеем три стационарные точки $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5}{3}\pi$. В данном примере легко вычислить $f''(x)=-\sin x-2\sin 2x$. Имеем:

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0;\ f''(\pi)=0,\ f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)>0.$$

Следовательно, в точке $\frac{\pi}{3}$ функция имеет максимум, равный $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$; в точке $\frac{5}{3}\pi$ функция имеет минимум, равный $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. В точке π требуется дополнительное исследование. Рассмотрим



Черт. 271.

$$f'(x)=2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}$$

в окрестности точки π, как при $x<\pi$, так и при $x>\pi$. Имеем: $f'(x)<0$. Следовательно, в точке π нет экстремума.

4.

$$f(x)=x^2\cos\frac{1}{x};\ f'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

Нуль есть стационарная точка. В любой окрестности этой точки при $x<0$ и при $x>0$ существуют значения производной, большие нуля и меньшие нуля, а значит, и равные 0 (по теореме о промежуточном значении производной). Точка 0 не является точкой экстремума, так как в любой ее окрестности существуют значения аргумента, при которых значения функции как больше нуля, так и меньше нуля и $f(0)=0$ (см. черт. 235).

5.

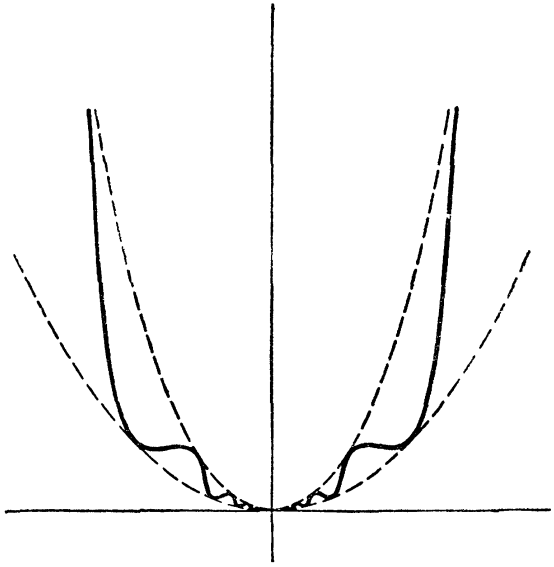
$$f(x)=x^2\cos^2\frac{1}{x};\ f'(x)=\begin{cases}2x\cos^2\frac{1}{x}+\sin\frac{2}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

Нуль есть стационарная точка. В любой окрестности этой точки при $x>0$ и при $x<0$ существуют значения производной положительные и отрицательные, а значит, и равные нулю. Точка 0 есть точка локального нестрогого минимума (см. черт. 266).

6.

$$f(x)=x^2\left(2+\cos\frac{1}{x^2}\right);\ f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}+\left(2x\cos\frac{1}{x^2}+4x\right) & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

Точка 0 есть стационарная точка. В любой окрестности этой точки и при $x<0$, и при $x>0$ существуют стационарные точки. При любом x имеем:



Черт. 272.

$x^2 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2$, т. е. график $f(x)$ заключен между параболами $y=x^2$ и $y=3x^2$ (черт. 272). Точка 0 есть точка строгого локального минимума.

§ 96. О локальных экстремумах недифференцируемых функций

Может случиться, что функция $f(x)$ имеет в точке a локальный экстремум, не будучи дифференцируемой в этой точке. Например, функция $f(x)=|x|$ имеет в точке 0 локальный минимум, но не дифференцируема в этой точке

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$:

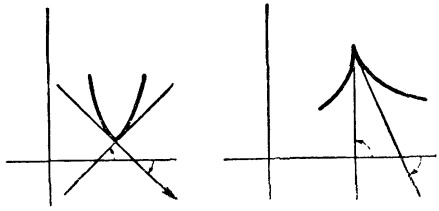
a) *в точке* a *не дифференцируема, но имеет правые и левые производные (конечные или бесконечные);*

b) *имеет в точке* a *локальный экстремум,*

то ее производные $f'_-(a)$ *и* $f'_+(a)$ *не могут быть одного знака.*

Доказательство. Предположим для определенности, что функция $f(x)$ имеет в точке a локальный минимум. Пусть $f'_+(a)>0$ и $f'_-(a)>0$, тогда в некоторой окрестности точки a имеем $f(a)>f(x)$ при $x<a$, что невозможно.

Предположим, что $f'_-(a)<0$ и $f'_+(a)<0$; тогда в некоторой окрестности точки a имеем $f(a)>f(x)$ при $x>a$, что противоречит условию, ч. т. д.



Черт. 273.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *в точке* a *не дифференцируема, но имеет правые и левые производные (конечные или бесконечные) разных знаков, то в точке* a *имеет место локальный экстремум, а именно: если* $f'_-(a)<0$, а $f'_+(a)>0$, *то в точке* a *функция* $f(x)$ *имеет локальный строгий минимум, а если* $f'_-(a)>0$ *и* $f'_+(a)<0$, *то в точке* a *функция* $f(x)$ *имеет локальный строгий максимум* (черт. 273).

Доказательство. Предположим для определенности, что $f'_-(a)>0$, а $f'_+(a)<0$. Так как $f'_-(a)>0$, то в некоторой окрестности точки a имеем $f(a)>f(x)$ при $x<a$; так как $f'_+(0)<0$, то при $x>a$ имеем $f(a)>f(x)$; таким образом, в некоторой окрестности точки имеет место неравенство: $f(a)>f(x)$, где $x\neq a$. Значит, в точке a функция $f(x)$ имеет локальный строгий максимум.

Примеры.

1. $$f(x)=\sqrt[3]{(x^4-1)^2}=(x^4-1)^{\frac{2}{3}},\quad f'(x)=\frac{8x^3}{3\sqrt[3]{x^4-1}}=$$

$$=\frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}.$$

Стационарная точка $x=0$. В точках $x=\pm 1$ функция не имеет производной

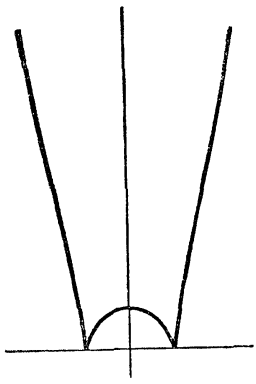
$$f'_-(-1)=f'_-(1)=-\infty \text{ и } f'_+(-1)=f'_+(1)=+\infty.$$

Имеем:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

В точке 0 имеем максимум, равный $f(0)=1$; в точках ± 1 — минимум, равный $f(\pm 1)=0$ (черт. 274).

2. В точке 0 функция $\varphi(x)=x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ имеет максимум. В самом деле,

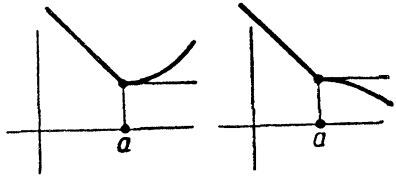


Черт. 274.

$$\varphi'_+(0)=\frac{\pi}{2}>0 \text{ и } \varphi'_-(0)=-\frac{\pi}{2}<0$$

(см. черт. 219).

Примечание. Если хотя бы одна из односторонних производных равна нулю, то о



Черт. 275.

существовании в точке a локального экстремума ничего без дополнительного исследования сказать нельзя.

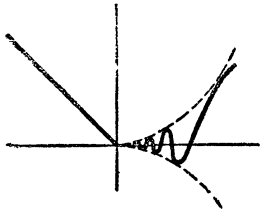
Например, функции, графики которых изображены на чертежах 275—278, имеют левые производные в точке a, равные —1, а правые — нулю, причем в точке a в одних случаях есть локальный экстремум, а в других нет.

Примеры.

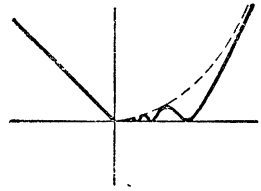
1. $$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & (x>0) \\ -x & (x\leqslant 0). \end{cases}$$

Имеем: $f'_-(0)=-1$; $f'_+(0)=0$. В точке 0 нет экстремума (черт. 276).

2. $$f(x)=\begin{cases} x^2\cos^2\dfrac{1}{x} & (x>0) \\ -x & (x\leqslant 0). \end{cases}$$



Черт. 276.



Черт. 277.

Черт. 278.

Имеем: $f'_-(0)=-1$ и $f'_+(0)=0$. В точке 0 есть локальный минимум (нестрогий) (черт. 277).

3. $$f(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right) & (x>0) \\ -x^2 & (x\leqslant 0). \end{cases}$$

$$f'_-(0)=-1,\ f'_+(0)=0.$$

В точке 0 есть строгий локальный минимум (черт. 278).

§ 97. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций на сегменте

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет на сегменте $[a, b]$ производную (конечную или бесконечную), за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f'(x)$ не существует. Непрерывная функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ наибольшее и наименьшее значения: $\max f(x)$ и $\min f(x)$. Если $f(x)$ имеет максимум (минимум) во внутренней точке p сегмента $[a, b]$, то точка p есть точка локального максимума (минимума). Локальный максимум (минимум) возможен в конце сегмента. Если $f(x)$ в отдельных точках сегмента $[a, b]$ не имеет производной, то в этих точках возможны (локальные и тотальные) экстремумы. Отсюда

правило: *для нахождения* $\max f(x)$ $(\min f(x))$ *на сегменте* $[a, b]$ *надо установить*:

1° *в каких стационарных точках функция* $f(x)$ *имеет локальный максимум* (*минимум*);

2° *в каких точках, где функция не дифференцируема, она имеет локальный максимум* (*минимум*);

3° *найти наибольшее (наименьшее) из чисел, являющихся значениями функции в точках локального максимума (минимума) и в точках a и b.*

Этот вопрос легко решается в случае, если функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ конечное число стационарных точек и точек, в которых не существует $f'(x)$, так как в этом случае вопрос сведется к выбору наибольшего (наименьшего) числа среди конечного множества значений функции $f(x)$.

Практически целесообразно выделить точки возможных локальных экстремумов (стационарные точки, а также точки, где функция не имеет производной) и по знаку производной установить, возрастает или убывает функция между этими точками. Достаточно установить знак производной в какой-нибудь одной промежуточной точке, чтобы в силу теоремы о промежуточном значении производной можно было судить о знаке производной между рассматриваемыми точками.

Второй производной целесообразно пользоваться, если она легко вычисляется.

В некоторых случаях бывает достаточно найти стационарную точку, чтобы без дополнительных исследований утверждать существование экстремума в этой точке. В самом деле, пусть заранее известно, что функция $f(x)$ в некоторой внутренней точке промежутка $<A, B>$ имеет экстремум (например, максимум); если на $<A, B>$ существует единственная стационарная точка, то именно в этой точке и имеется экстремум.

Функция, определенная и непрерывная в интервале, может не иметь тотального экстремума, так как для интервала теорема о наибольшем и наименьшем значениях не имеет места.

Примеры.

1. $f(x)=(x^2-1)^2$.

a) Найти $\min f(x)$ и $\max f(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$. Имеем: $f'(x)=4x(x^2-1)$; стационарные точки суть -1, 0, 1. Так как $f(x)\geqslant 0$ и $f(\pm 1)=0$, то без особого исследования ясно, что в точках ± 1 имеет место тотальный минимум, $\min f(x)=0$. В достаточно малой окрестности точки 0 имеем:

$$f'(x)\ \begin{cases} >0, & \text{если } x<0 \\ <0, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

В точке 0 имеем локальный максимум, равный $f(0)=1$.

Впрочем, это ясно и без исследования знака производной: так как $f(x)>0$ в интервале $(-1, 1)$ и $f(\pm 1)=0$, то в $(-1, 1)$ существует положительный максимум. Единственная стационарная точка в $(-1, 1)$ есть $x=0$; это и есть точка максимума.

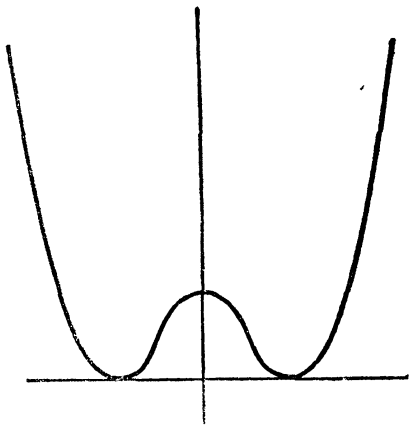
Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, то $\max f(x)$ не существует (черт. 279).

b) Найти $\max f(x)$ и $\min f(x)$ на сегменте $[0, 3]$. Внутри сегмента имеется одна стационарная точка $x=1$. Имеем: $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(3)=64$. Следовательно, $\min f(x)=0$, $\max f(x)=64$.

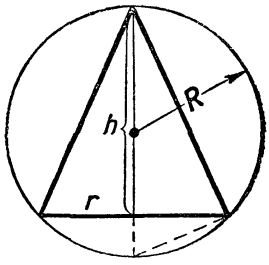
2. Найти конус наибольшего объема, вписанный в шар данного радиуса R Обозначим через r и h радиус и высоту искомого конуса. Из чертежа 280, на котором изображено сечение фигуры плоскостью, проходящей через ось конуса, находим $r^2=h(2R-h)$. Объем конуса равен:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h, \text{ откуда } V=\frac{\pi}{3}(2R-h)h^2.$$

Если принять во внимание случаи вырождения конуса в точку при $h=0$ и в отрезок прямой при $h=2R$, то можно рассматривать объем $V(h)$ как функцию, определенную на сегменте $[0, 2R]$, не отрицательную на этом сегменте и имеющую наименьшее значение в его концах: $\min V(h)=V(0)=V(2R)=0$. Существующий (по теореме о наибольшем и наименьшем значениях) $\max V(h)$ имеет место в некоторой внутренней точке сегмента $[0, 2R]$.



Черт. 279.



Черт. 280.

Находим производную:

$$V'(h)=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2),$$

откуда стационарные точки суть: $h=\frac{4}{3}R$ и $h=0$. Внутри сегмента $[0, 2R]$ содержится только одна стационарная точка $h=\frac{4}{3}R$. Это и есть точка максимума. Итак, конус наибольшего объема, вписанный в данный шар, имеет высоту $h=\frac{4}{3}R$ и радиус $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

3. Сколько действительных корней имеет уравнение $x\ln x-a=0$? Если α и β — два соседние корня уравнения $f(x)=0$ и функция $f'(x)$ непрерывна, то внутри сегмента $[\alpha, \beta]$ содержится хотя бы один локальный экстремум (см. рассуждения при доказательстве теоремы Ролля). Находим локальные экстремумы функции $f(x)=x\ln x-a$. Имеем:

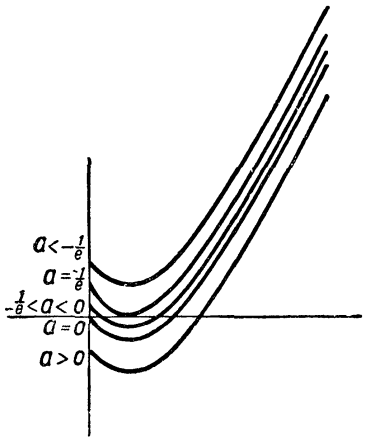
$$f'(x)=1+\ln x,$$

откуда получим стационарную точку $x=\frac{1}{e}$. Так как $f''\left(\frac{1}{e}\right)>0$, то в найденной точке имеется минимум, равный $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}-a$.

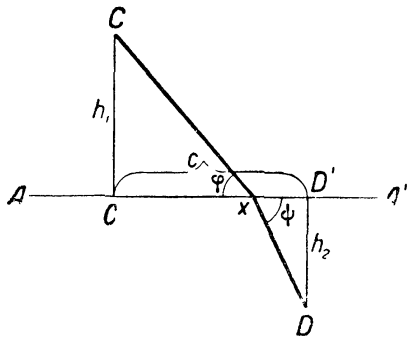
В интервале $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ функция $f(x)$ убывает [так как $f'(x)<0$], а в интервале $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ возрастает [так как $f'(x)>0$] и $f\left(\frac{1}{e}\right)$ является тотальным минимумом. Далее:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim(x\ln x-a)=-a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Если $a<-\frac{1}{e}$, то $\min f(x)>0$, и уравнение $f(x)=0$ не имеет действительных корней. Если $a=-\frac{1}{e}$, имеется один корень в точке $x=\frac{1}{e}$. Если



Черт. 281.



Черт. 282.

$-\frac{1}{e}<a<0$, то $\min f(x)<0$. Так как $\lim_{x\to 0} f(x)>0$, то в окрестности точки 0 имеем $f(x)>0$, в точке $\frac{1}{e}$ имеем $f(x)<0$, в окрестности точки $+\infty$ имеем $f(x)>0$; значит (в силу непрерывности), $f(x)$ имеет хотя бы один корень в интервале $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ и хотя бы один корень в интервале $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, но, в силу монотонности, в каждом из этих интервалов имеется лишь по одному корню; следовательно, $f(x)$ имеет два корня. Если $0<a$, то $\lim_{x\to 0} f(x)<0$, и $f(x)$ имеет один корень в интервале $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Результаты исследования представлены на чертеже 281.

4. По известному из физики закону Ферма, свет распространяется по траектории, дающей минимум времени. Пусть прямая линия AA' есть граница двух сред, в которых скорости распространения света суть v_1 и v_2. По какому пути пойдет луч света, чтобы попасть из точки C в точку D (черт. 282)? Пусть C' и D' — проекции точек C и D на прямую AA'.

Обозначим через c длину отрезка $C'D'$. Примем прямую AA' за ось абсцисс, а точку C' — за начало координат. Пусть x есть абсцисса точки встречи луча с прямой AA'. Положим $CC'=h_1$, $DD'=h_2$. Луч распространяется прямолинейно в первой и второй средах. Длина пути в первой среде

равна $\sqrt{x^2+h_1^2}$, во второй среде $\sqrt{h_2^2+(c-x)^2}$, время прохождения пути T равно:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+(c-x)^2}}{v_2}.$$

Дифференцируя $T(x)$, получим:

$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(c-x)^2}}$$

В стационарной точке имеем:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}}=\frac{c-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(c-x)^2}}.$$

Пусть φ и ψ—углы, образованные с прямой AA' путем луча в первой и второй средах. Из последнего равенства имеем:

$$\frac{\cos\varphi}{v_1}=\frac{\cos\psi}{v_2}. \qquad (1$$

Функция $T(x)$ непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} T(x)=\lim_{x\to-\infty} T(x)=+\infty.$$

Отсюда следует, что минимум $T(x)$ существует и реализуется для пути, удовлетворяющего условию (1). Легко видеть, что такой путь существует единственный. В самом деле, если $0<\varphi_1<\varphi_2<\pi$, то из условия (1) найдем $0<\psi_1<\psi_2<\pi$, откуда и видно, что если луч с углами φ_1 и ψ_1 проходит через точку D, то луч с углами φ_2 и ψ_2 не может пройти через ту же точку. Значит, минимум дает единственный луч, удовлетворяющий условию (1). Это условие выражает известный из физики закон преломления света.

5. Через точки $A(a, b)$, где $a>0$, $b>0$, проведен пучок прямых. Найти ту прямую пучка, отрезок которой, отсекаемый осями OX и OY, наименьший и лежит в первом квадранте.

Очевидно, угловой коэффициент искомой прямой отрицателен: $k<0$. Уравнение пучка $y-b=k(x-a)$. Координаты точки P пересечения прямой пучка с осью OX суть $\left(\frac{ak-b}{k}, 0\right)$, координаты точки Q пересечения прямой осью OY суть $(0, -ka+b)$. Значит,

$$PQ=\sqrt{\left(\frac{ak-b}{k}\right)^2+(ak-b)^2}=f(k).$$

Ищем минимум PQ.

Мы можем ограничиться отысканием минимума подкоренной функции, так как она положительна и большему ее значению соответствует большее значение корня, а меньшему—меньшее значение корня. Поэтому мы будем искать

$$\min f^2(k)=\min\left[\frac{(ak-b)^2}{k^2}+(ak-b)^2\right].$$

Обозначим

$$\varphi(k)=\frac{(ak-b)^2}{k^2}+(ak-b)^2=(ak-b)^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\varphi'(k)=2(ak-b)\left(a+\frac{b}{k^3}\right).$$

Внутри $(-\infty, 0)$ имеется одна стационарная точка $k=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. В интервале $\left(-\infty, -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$ имеем $\varphi'(k)<0$. В интервале $\left(-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, 0\right)$ имеем $\varphi'(k)>0$. Точка $-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ есть точка минимума.

$$\min PQ=\sqrt{\left(a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+b\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\right)}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

6. На прямой (принятой за ось абсцисс) расположены n точек A_1, A_2,..., A_n с абсциссами a_1, a_2, ..., a_n. В этих точках сосредоточены массы m_1, m_2, ..., m_n. Эти массы транспортируются к некоторой точке A прямой. Стоимость транспортировки единицы массы на единицу пути равна c. В какую точку нужно транспортировать массы, чтобы стоимость транспорта была наименьшей? Обозначим абсциссу произвольной точки A прямой через x. Тогда стоимость транспорта всех масс m_1, m_2, ..., m_n в эту точку равна:

$$cm_1|x-a_1|+cm_2|x-a_2|+\ldots+cm_n|x-a_n|.$$

Ищем минимум:

$$f(x)=cm_1|x-a_1|+cm_2|x-a_2|+\ldots+cm_n|x-a_n|.$$

В точках a_1, a_2, ..., a_n функция $f(x)$ не дифференцируема. Между ними $f(x)$ есть линейная функция. Вычисляем левые и правые производные, помня, что

$$|x-b|'=1 \text{ при } x>b \text{ и } |x-b|'=-1 \text{ при } x<b.$$

Таким образом,

$$f'_-(a_1)=c[-m_1-m_2-\ldots-m_n]; \qquad f'_+(a_1)=c[m_1-m_2-\ldots-m_n];$$
$$f'_-(a_2)=c[m_1-m_2-\ldots-m_n]; \qquad f'_+(a_2)=c[m_1+m_2-m_3-\ldots-m_n];$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f'_-(a_n)=c[m_1+m_2+\ldots-m_n]; \qquad f'_+(a_n)=c[m_1+m_2+\ldots+m_n].$$

Так как производные увеличиваются от отрицательных значений к положительным, то возможны следующие предположения:

a) $f'_-(a_l)<0$; $f'_+(a_l)>0$. В таком случае a_l есть точка минимума и притом единственная.

b) $f_-(a_l)<0$; $f'_+(a_l)=0$, но тогда $f'_-(a_{l+1})=0$ и $f'_+(a_{l+1})>0$. Но так как на сегменте $[a_l, a_{l+1}]$ функция $f(x)$ линейная, то $f'(x)$ равна нулю в любой точке интервала (a_l, a_{l+1}). Значит, $f(x)$ есть константа на сегменте $[a_l, a_{l+1}]$, убывает при $x<a_l$ и возрастает при $x>a_{l+1}$. Таким образом, любая точка сегмента $[a_l, a_{l+1}]$ есть точка минимума (нестрогого) $f(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$. В первом и втором случаях имеем:

$$m_1+m_2+\ldots+m_{l-1}-m_l-\ldots-m_n<0;$$
$$m_1+m_2+\ldots+m_{l-1}+m_l-m_{l+1}-\ldots-m_n\geqslant 0.$$

Из первого неравенства следует, что

$$2(m_1+m_2+\ldots+m_{l-1})<\sum_{i=1}^{n}m_i,$$

или

$$m_1+m_2+\ldots+m_{l-1}<\frac{1}{2}\sum m_i.$$

Из второго:

$$2(m_1+m_2+\ldots+m_l)\geqslant\sum m_i,$$

или

$$m_1+m_2+\ldots+m_l\geqslant\frac{1}{2}\sum m_i.$$

Таким образом, точка A_l обладает тем свойством, что масса точек, лежащих левее ее, меньше половины суммы масс всех точек, а масса всех точек, лежащих левее ее и самой этой точки, больше или равна половине суммы масс всех точек.

7. $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$ в интервале $(-\infty, +\infty)$. Как легко видеть, функция $f(x)$ непрерывна в любой точке: если $n<x<n+1$, где n — целое число, то $f(x)=n+\sqrt{x-n}$; отсюда видно, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(n, n+1)$. В интервале $(n-1, n)$ имеем:

$$f(x)=n-1+\sqrt{x-n+1}.$$

Так как

$$\lim_{x\to n+} f(x)=\lim_{x\to n-} f(x)=n,$$

то функция $f(x)$ непрерывна в точке n. При x целом $(x=n)$ функция $f(x)$ недифференцируема. Вычислим $f'_+(n)$; имеем:

$$f(n)=n,\quad f(x)=n+\sqrt{x-n}\quad (n<x<n+1),$$

$$\frac{f(x)-f(n)}{x-n}=\frac{\sqrt{x-n}}{x-n},$$

откуда $f'_+(n)=+\infty$. Вычислим $f'_-(n)$; имеем:

$$\frac{f(x)-f(n)}{x-n}=\frac{-1+\sqrt{x-n+1}}{x-n}=\frac{1}{1+\sqrt{x-n+1}},$$

откуда $f'_-(n)=\frac{1}{2}$.

Если x — не целое число $n<x<n+1$, то

$$f(x)=n+\sqrt{x-n}\ \text{ и }\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-n}}>0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает и не имеет ни максимума, ни минимума.

§ 98. Кривые линии, вогнутые вверх и вниз, точки перегиба

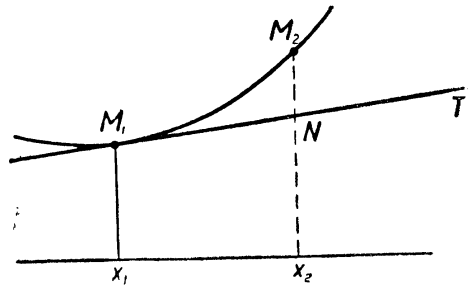
Известно, что из двух точек $M(x_1, y_1)$ и $M_1(x_1, y_2)$ с одинаковой абсциссой и с различными ординатами та считается лежащей выше (ниже), которая имеет бóльшую (меньшую) ординату.

Если в некотором промежутке $< A, B >$ имеет место неравенство

$$f_1(x) > f_2(x) \quad (\text{или } f_1(x) < f_2(x)),$$

то каждая точка линии $y = f_1(x)$ лежит выше (ниже) соответствующей точки линии $y = f_2(x)$. В этом случае говорят, что первая линия в промежутке $< A, B >$ лежит выше (ниже) второй.

Определение. *Дуга графика дифференцируемой в промежутке* $< A, B >$ *функции* $f(x)$ *называется вогнутой вверх (вниз) в этом промежутке, если она лежит выше (ниже) касательной в любой точке дуги.*



Черт. 283.

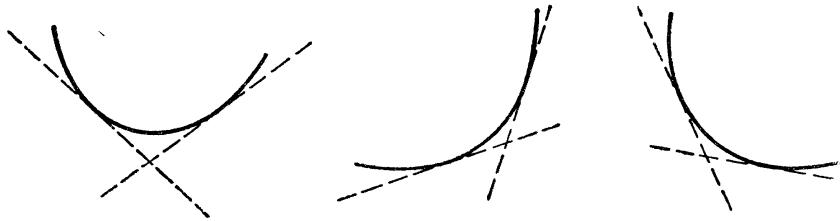
Это определение можно выразить посредством неравенств. Пусть $x_1 \in < A, B >$ — любое значение аргумента; составим уравнение касательной M_1T к графику $y = f(x)$ в точке $M_1(x_1, f(x_1))$ (черт. 283). Каково бы ни было значение $x_2 \in < A, B >$, отличное от x_1, точка графика $M_2(x_2, f(x_2))$ для вогнутой вверх дуги должна лежать выше соответствующей точки N касательной M_1T; это условие запишется так:

$$f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1). \qquad (1)$$

Аналогично условие вогнутости (вниз) выразится неравенством:

$$f(x_2) < f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1). \qquad (2)$$

Итак, аналитически вогнутость вверх и вниз характеризуется (соответственно) выполнением неравенств (1) и (2) при любых значениях аргумента $x_1 \neq x_2$ в промежутке $< A, B >$.



Черт. 284.

Дуги, изображенные на чертеже 284, являются вогнутыми вверх. Дуги, изображенные на чертеже 285, являются вогнутыми вниз.

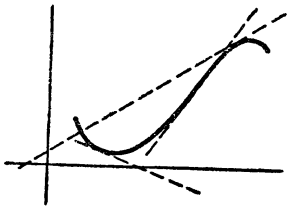
Дуга, изображенная на чертеже 286, не является вогнутой ни вверх, ни вниз.

Примечание. Если линия лежит выше касательной, в некоторой точке $x = a$, то этого еще недостаточно, чтобы утверждать

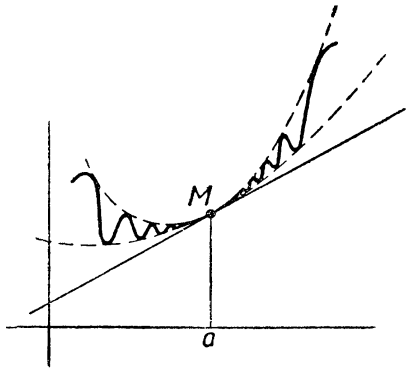
вогнутость вверх дуги даже в достаточно малой окрестности точки a. Для вогнутости надо, чтобы линия лежала выше касательной в любой точке данной дуги. На чертеже 287 изо-

Черт. 285.

бражен график функции, лежащий выше касательной в точке M, однако соответствующая линия не является вогнутой вверх ни в какой окрестности точки a.



Черт. 286.



Черт. 287.

Теорема. *Если дуга графика* $f(x)$ *вогнута вверх (вниз) в промежутке* $<A, B>$, *то производная* $f'(x)$ *возрастает (убывает) в этом промежутке* (черт. 288 и 289).

Доказательство. Пусть рассматриваемая дуга вогнута вверх. Так как неравенство

$$f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \qquad (1)$$

справедливо при любых значениях аргумента x_1 и x_2 промежутка $<A, B>$, то это неравенство сохранится, если заменить x_1 на x_2, а x_2 на x_1:

$$f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2); \qquad (1')$$

сложив (1) и (1'), получим;

$$[f'(x_2) - f'(x_1)](x_2 - x_1) > 0.$$

Следовательно,

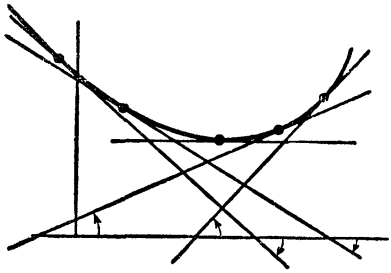
$$f'(x_2) > f'(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1$$

и

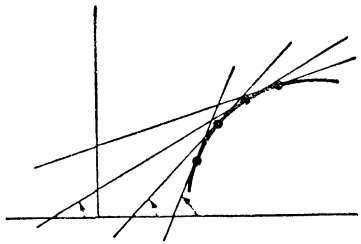
$$f'(x_2) < f'(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 < x_1,$$

т. е. $f'(x)$ возрастает, ч. т. д.

Для дуги, вогнутой вниз, доказательство аналогично.



Черт. 288.



Черт. 289.

Обратная теорема. *Если производная $f'(x)$ возрастает (убывает) в промежутке $< A, B >$, то дуга графика $f(x)$ вогнута вверх (вниз) в этом промежутке.*

Доказательство. Пусть $f'(x)$ есть возрастающая функция. Докажем, что

$$f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

где x_1 и x_2 — любые неравные значения аргумента в $< A, B >$.

Рассмотрим разность

$$\Delta = f(x_2) - [f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)] = f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

По формуле Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

откуда

$$\Delta = (x_2 - x_1)[f'(\xi) - f'(x_1)].$$

Так как числа $x_2 - x_1$ и $\xi - x_1$ — одного знака, то $f'(\xi) - f'(x_1)$ (в силу возрастания производной) имеет тот же знак.

Значит, $\Delta > 0$, т. е. $f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)$, ч. т. д. Аналогично доказывается теорема в случае дуги, вогнутой вниз.

Теорема. *Если $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция в промежутке $< A, B >$, то необходимым и достаточным условием вогнутости вверх (вниз) дуги графика $f(x)$ в этом промежутке является неравенство $f''(x) \geqslant 0$ (или $f''(x) \leqslant 0$), причем равенство нулю не имеет места ни в каком промежутке.*

Доказательство. Условие необходимо. Если дуга графика $f(x)$ вогнута вверх (вниз), то $f'(x)$ возрастает (убывает),

и в силу теоремы о производной строго монотонной функции $f''(x) \geqslant 0$ (или $f''(x) \leqslant 0$), причем равенство $f''(x) = 0$ не имеет места ни в каком промежутке.

Условие достаточно. Если $f''(x) \geqslant 0$ [или $f''(x) \leqslant 0$], причем равенство $f''(x) = 0$ не имеет места ни в каком промежутке, то $f'(x)$ возрастает (убывает), а значит дуга графика $f(x)$ вогнута вверх (вниз), ч. т. д.

Примечание. Если равенство $f''(x) = 0$ имеет место в некотором промежутке, то $f'(x) = \text{const}$ в этом промежутке, а $f(x)$ есть линейная функция; часть графика есть отрезок прямой, и нет смысла говорить о вогнутости.

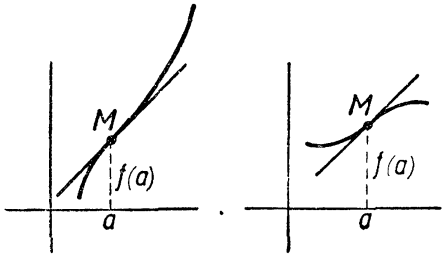
Примеры.

1. График $y = \ln x$ вогнут вниз в интервале $(0, +\infty)$. В самом деле, $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$.

2. Парабола $y = x^2$ вогнута вверх. В самом деле, при любом действительном значении x имеем $(x^2)'' = 2 > 0$.

Пусть дана дуга графика дифференцируемой в промежутке $< A, B >$ функции $f(x)$.

Определение. *Число a называется точкой перегиба, если существует такая окрестность точки a, что при $x < a$ дуга графика $f(x)$ вогнута вверх, а при $x > a$ вогнута вниз или, наоборот, при $x < a$ дуга графика $f(x)$ вогнута вниз, а при $x > a$ вогнута вверх. Тем же термином «точка перегиба» называется соответствующая точка $M(a, f(a))$ дуги графика* (черт. 290).



Черт. 290.

Точка перегиба отделяет дугу графика $f(x)$, вогнутую вверх, от дуги, вогнутой вниз.

Примеры.

1. Кубическая парабола $y = x^3$ вогнута вверх в интервале $(0, +\infty)$. В самом деле, $(x^3)'' = 6x > 0$, если $x > 0$. Парабола вогнута вниз в интервале $(-\infty, 0)$, ибо в этом интервале $(x^3)'' = 6x < 0$. Точка 0 есть точка перегиба

2. Синусоида $y = \sin x$ вогнута вниз в интервале $(0, \pi)$, ибо $f''(x) = -\sin x < 0$ в этом интервале. В интервале $(\pi, 2\pi)$ синусоида вогнута вверх. Точка π есть точка перегиба.

3. Положим

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (\text{если } x \geqslant 0) \\ -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{2} & (\text{если } x < 0). \end{cases}$$

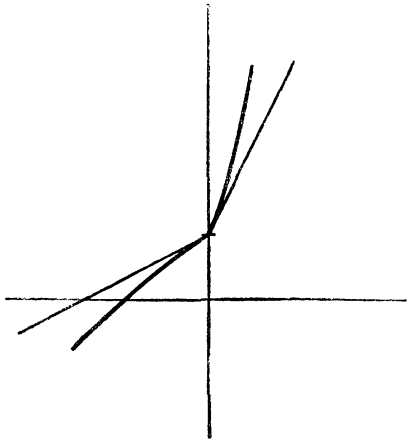
В интервале $(0, +\infty)$ линия $y = e^x$ вогнута вверх, ибо $f''(x) = e^x > 0$. В интервале $(-\infty, 0)$ линия $y = -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{2}$ вогнута вниз, ибо $f''(x) = -\frac{e^{-x}}{2} < 0$.

Однако точка 0 не есть точка перегиба, ибо $f'(0)$ не существует (ни конечная, ни бесконечная) (черт. 291).

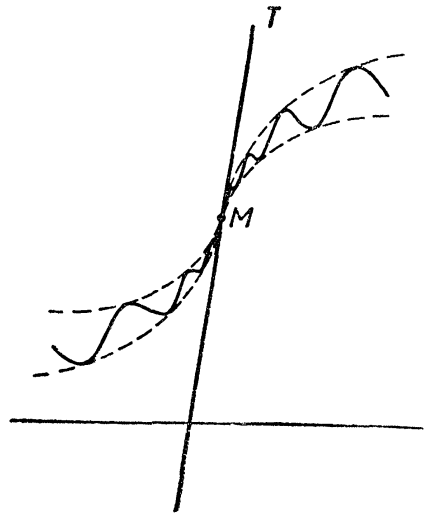
Теорема. *Если a есть точка перегиба дуги графика функции $f(x)$ и производная $f'(x)$ непрерывна в окрестности точки a, то a есть точка строго локального экстремума производной $f'(x)$.*

Доказательство. Так как a есть точка перегиба, то существует такая окрестность точки a, что при $x < a$ дуга графика $f_1(x)$ вогнута вверх (вниз) и при $x > a$ дуга вогнута вниз (вверх).

Значит, слева от точки a производная $f'(x)$ возрастает (убывает) и



Черт. 291.



Черт. 292

справа от точки a производная $f'(x)$ убывает (возрастает), а потому a есть точка строго локального максимума (минимума), ч. т. д.

Обратная теорема неверна. Если в точке a производная $f'(x)$ имеет экстремум, то это не значит, что точка a есть точка перегиба. На чертеже 292 изображена линия, касающаяся прямой MT в точке M, в любой окрестности точки M имеющая части, вогнутые как вверх, так и вниз, причем ни в какой точке (кроме M) касательная не параллельна MT:

$$f'(x) < f'(a) \text{ при } x \neq a.$$

Точка a есть точка максимума производной, но не точка перегиба.

Примечание. Если точку a, в окрестности которой $f(x)$ дифференцируема, но $f'(a) = +\infty$ (или $-\infty$), рассматривать как точку максимума (минимума) для $f'(x)$, то доказанная теорема остается в силе. В этом случае в точке перегиба касательная перпендикулярна оси абсцисс.

Таким образом, точки перегиба графика $f(x)$ возможны в точках строгого локального экстремума производной $f'(x)$.

Если $f'(x)$ — дифференцируемая функция, то точка перегиба есть стационарная точка производной $f'(x)$, т. е. корень уравнения $f''(x)=0$. Обратная теорема неверна, так как из равенства $f''(x)=0$ не следует, что a есть точка экстремума $f'(x)$, и тем более, что a есть точка перегиба дуги графика $f(x)$.

Примеры.

1. Пусть $f(x)=x^3$; $\varphi(x)=x^4$; в точке 0 имеем $f''(0)=\varphi''(0)=0$. Для графика функции $f(x)$ точка 0 есть точка перегиба, а график $\varphi(x)$ всюду вогнут вверх ($\varphi(x)=4x^3$ возрастает) и не имеет точек перегиба (точка 0 есть точка минимума).

2. $f(x)=\operatorname{arctg} x$; $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; $f''(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$; $f''(0)=0$.

В точке 0 производная $f'(x)$ имеет максимум, убывает при $x>0$ и возрастает при $x<0$; значит, точка 0 есть точка перегиба графика $f(x)$; при $x<0$ линия вогнута вверх и при $x>0$ вогнута вниз.

3. $f(x)=x-\sin x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

$f'(x)=1-\cos x$; $f''(x)=\sin x$; $f''(x)=0$ при $x=k\pi$.

Точки $x=k\pi$ суть точки экстремума функции $f'(x)$. В точках $x=k\pi$ график $f(x)$ имеет точки перегиба (черт. 261), так как справа и слева от точки $k\pi$ вторая производная имеет значения, противоположные по знаку.

Выпуклые функции. ***Определение.*** *Функция $f(x)$ в промежутке $<a, b>$ называется выпуклой снизу (сверху), если неравенство*

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{или } <0)$$

имеет место при трех произвольных значениях аргумента x_1, x_2 и x_3, содержащихся в промежутке $<a, b>$ и связанных неравенствами

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Геометрическая интерпретация. Значение детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix}$$

равно удвоенной площади треугольника, имеющего вершины в точках $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$, $M_3(x_3, f(x_3))$ графика функции $y=f(x)$. Для функции, выпуклой снизу, $\Delta>0$. Значит, треугольник $M_1M_2M_3$ имеет положительную ориентацию (противоположную направлению вращения часовой стрелки). Это будет в том и только в том случае, если точка M_2 лежит ниже хорды M_1M_3 (черт. 293). Аналогично для графика функции, выпуклой сверху, точка M_2 будет лежать выше хорды M_1M_3 (черт. 294).

Итак, *любая дуга графика функции, выпуклой снизу (сверху), лежит ниже (выше) стягивающей ее (т. е. дугу) хорды.*

Теорема. *Необходимым и достаточным условием выпуклости снизу (сверху) функции $f(x)$, дифференцируемой в промежутке $<a, b>$, является возрастание (убывание) производной $f'(x)$ в данном промежутке.*

Доказательство.

1° Условие необходимо. Пусть $f(x)$ есть функция, выпуклая снизу. Пусть $\alpha < \beta$ — произвольные значения аргумента в промежутке $<a, b>$. Если

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

то по условию:

$$\begin{vmatrix} \alpha & f(\alpha) & 1 \\ x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ \beta & f(\beta) & 1 \end{vmatrix} > 0$$

или

$$(x_1-\alpha)[f(x_2)-f(x_1)] > (x_2-x_1)[f(x_1)-f(\alpha)];$$
$$(x_2-x_1)[f(\beta)-f(x_2)] > (\beta-x_2)\,[f(x_2)-f(x_1)].$$

Значит,

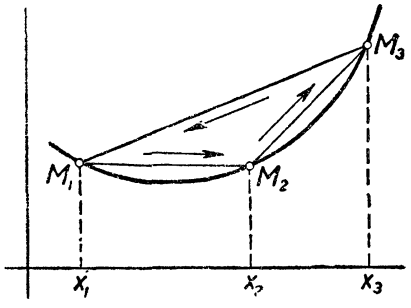
$$\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2}.$$

Следовательно,

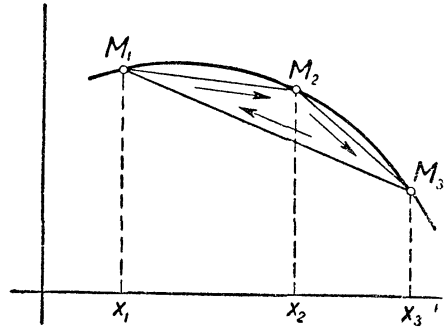
$$\lim_{x_1\to\alpha} \frac{f(x_1)-f(x)}{x-\alpha} \leqslant \lim_{x_2\to\beta} \frac{f(x_2)-f(\beta)}{x_2-\beta},$$

т. е. $f'(\alpha) \leqslant f'(\beta)$.

Следовательно, производная не убывает. Если бы для производной существовал промежуток постоянства, то функция $f(x)$ в этом промежутке



Черт. 293



Черт. 294.

являлась бы линейной. Но для линейной функции $\Delta = 0$ (так как треугольник $M_1M_2M_3$ вырождается в отрезок), что противоречит условию выпуклости снизу ($\Delta > 0$). Следовательно, производная $f'(x)$ строго возрастает.

2° Условие достаточно. Пусть $f'(x)$ есть функция, возрастающая в промежутке $<a, b>$.

Докажем, что при $x_1 < x_2 < x_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Так как

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2-x_1 & f(x_2)-f(x_1) & 0 \\ x_3-x_2 & f(x_3)-f(x_2) & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)\,[f(x_3)-f(x_2)]-(x_3-x_2)\,[f(x_2)-f(x_1)],$$

то, применив формулу Лагранжа, получим:

$$\Delta=(x_2-x_1)(x_3-x_2)f'(\xi_2)-(x_3-x_2)(x_2-x_1)f'(\xi_1)=$$
$$=(x_2-x_1)(x_3-x_2)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)],$$

где $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3$. Так как $\xi_1<\xi_2$, то $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ и $\Delta>0$.

Доказательство в случае функции, выпуклой сверху, аналогичное.

Следствие I. График выпуклой снизу (сверху) дифференцируемой функции есть линия, вогнутая вверх (вниз). Обратно, если график функции $f(x)$ есть вогнутая вверх (вниз) линия, то $f(x)$ есть выпуклая снизу (сверху) функция. В самом деле, вогнутость вверх (вниз) и выпуклость снизу (сверху) характеризуются одним и тем же условием — возрастанием (убыванием) производной. Заметим, что эта интерпретация применима лишь к дифференцируемым функциям.

Так, например, функция $f(x)=e^{|x|}$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ — выпуклая снизу, между тем к графику неприменимо понятие вогнутости вверх или вниз, так как $f'(0)$ не существует.

Следствие II. Если $f''(x)>0$ (или <0) в промежутке $\langle a, b\rangle$, то функция $f(x)$ выпукла снизу (сверху) в этом промежутке.

Примечание. Принято под выпуклой функцией, если не указано, выпукла она снизу или сверху, понимать функцию, выпуклую снизу

Пример.

Положим $x_1=a_1$, $x_2=\dfrac{a_1+a_2}{2}$, $x_3=a_3$,

тогда точка M_2 графика имеет координаты:

$$x=\frac{a_1+a_2}{2}, \quad y=f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right),$$

а соответствующая точка хорды имеет ту же абсциссу и ординату, равную $\dfrac{f(a_1)+f(a_2)}{2}$. Если функция $f(x)$ выпукла снизу, то

$$f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)<\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}.$$

Для функции, выпуклой сверху, получим неравенство противоположного смысла.

Положим, например, $f(x)=x^p$ в интервале $(0, +\infty)$, где $p>1$; так как $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$, то данная функция выпукла снизу; следовательно, имеем:

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^p<\frac{a_1^p+a_2^p}{2},$$

где a_1 и a_2 — положительные числа.

При $p<1$ функция x^p в интервале $(0, +\infty)$ выпукла сверху, а потому

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^p>\frac{a_1^p+a_2^p}{2}.$$

§ 99. Исследование функций. Построение графиков

Под выражением «исследование функций» обычно понимают следующее: *установить область определения* (для функции, заданной формулой), *если таковая не задана, найти точки разрыва, точки экстремума, промежутки возрастания и убывания, точки перегиба, промежутки вогнутости вверх и вниз.*

Исследование функции дает возможность представить себе характер ее графика и в первом приближении сделать набросок линии, иллюстрирующий возрастание, убывание и характер вогнутости. Этот набросок, несмотря на его неточность, дает наглядную иллюстрацию характерных свойств и особенностей данной функции.

Основные указания к построению графиков, сформулированные в § 58, теперь могут быть дополнены, а именно: исследование первой и второй производных дает удобный аппарат для нахождения промежутков монотонности, наибольших и наименьших значений, выпуклых вверх и вниз частей линии и точек перегиба.

Примеры.

1. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$; функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная. Находим последовательно первую и вторую производные:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\quad f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Находим стационарные точки $f(x)$, для чего решаем уравнение:

$$f'(x)=0;\quad 1-x^2=0,\quad \text{откуда } x=\pm 1.$$

Находим стационарные точки производной:

$$f''(x)=0;\quad 2x(x^2-3)=0,$$

откуда

$$x=-\sqrt{3},\quad 0,\quad \sqrt{3}.$$

Первая производная положительна в интервале $(-1, 1)$ и отрицательна в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ — это интервалы монотонности.

Вторая производная положительна в интервалах $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$, отрицательна в интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(0, \sqrt{3})$ — это интервалы вогнутости вверх и вниз. Результаты исследования удобно записать в таблицу.

В точках $\pm\infty$ имеем: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

Точка минимума:

$$x=-1;\quad \min f(x)=f(-1)=-\frac{1}{2}.$$

Точка максимума: $x=1$; $\max f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Точки перегиба: $\pm\sqrt{3}$, 0;

$$f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{4};\quad f(0)=0,\quad f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

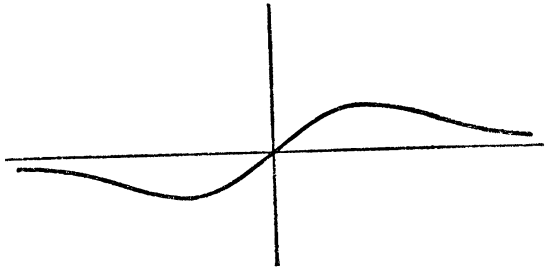
	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↘	↗	↗	↘	↘
	Вогнута вниз	Вогнута вверх	Вогнута вверх	Вогнута вниз	Вогнута вниз	Вогнута вверх

Находим угловые коэффициенты касательных в точках перегиба:

$$f'(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{8}; \quad f'(0) = 1; \quad f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8}.$$

В соответствии с этими данными график представлен на чертеже 295.

2. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x$. Область определения — интервал $(0, +\infty)$.



Черт. 295.

	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↗
	Вогнута вниз	Вогнута вверх

В этом интервале $f(x)$ возрастает, что ясно из формулы.

Находим производные:

$$f'(x) = x + \frac{1}{x}; \quad f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

В интервале $(0, +\infty)$ стационарных точек не содержится; уравнение $f''(x)$ имеет один корень $x = 1$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Точка 1 есть точка перегиба $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = 2$

График представлен на чертеже 296.

3. $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{x-1}$. Область определения $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Выделив целую часть, получим:

$$f(x)=(x-1)^2+\frac{2}{x-1}. \tag{1}$$

Находим производные:

$$f'(x)=2\frac{(x-1)^3-1}{(x-1)^2};\quad f''(x)=2\frac{(x-1)^3+2}{(x-1)^3},$$

Стационарная точка: $x=2$, стационарная точка производной:

$$x=\sqrt[3]{-2}+1.$$

	$(-\infty, \sqrt[3]{-2}+1)$	$(\sqrt[3]{-2}+1, 1)$	$(1,2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	↘	↘	↗
	Вогнута вверх	Вогнута вниз	Вогнута вверх	Вогнута вверх

Имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to 1-} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to 1+} f(x)=+\infty.$$

Точка минимума: $x=2$, $f(2)=3$. Точка перегиба: $x=\sqrt[3]{-2}+1$,

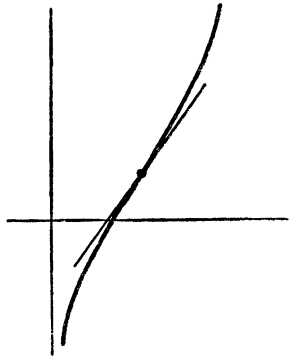
$$f(\sqrt[3]{-2}+1)=0.$$

Для построения графика полезно заметить, что при достаточно больших значениях $|x|$ линия близка к параболе $y=(x-1)^2$, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-1}=0;$$

линия лежит выше этой параболы при $x>1$ и ниже параболы при $x<1$.

В окрестности точки 1 линия близка к гиперболе $y=\dfrac{2}{x-1}$.



Черт. 297.

График представлен на чертеже 297.

4. $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$. Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$, функция четная.

Находим производные:

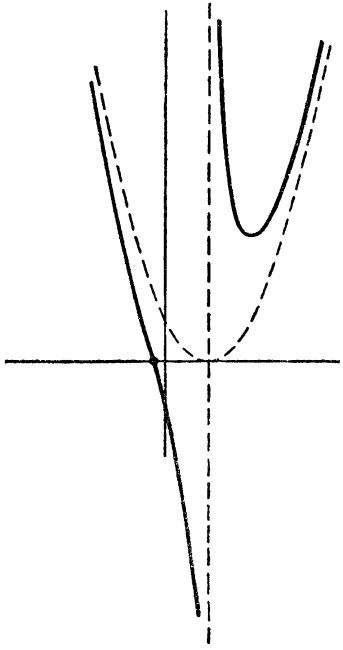
$$f'(x)=\frac{2(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1})}{3\sqrt[3]{x^2-1}};$$

$$f''(x)=\frac{-2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\right).$$

В точке 1 имеем $\lim\limits_{x\to 1+} f'(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)=-\infty$; следовательно (см. § 88), имеем:

$$f'_+(1)=+\infty,\quad f'_-(1)=-\infty.$$

Аналогично: $f'_+(-1)=+\infty$, $f'_-(-1)=-\infty$. В точках ± 1 производная не существует. Стационарная точка есть $x=0$. Вторая производная отрицательна всюду при $x\neq 1$.



Черт. 297.

Составим таблицу.

	$(-\infty,+1)$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗
	Вогнута вниз	Вогнута вниз	Вогнута вниз	Вогнута вниз

Имеем: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

Точки минимума: $x=\pm 1$; $f(\pm 1)=\sqrt[3]{4}$.

Точка максимума: $x=0$, $f(0)=2$. График представлен на чертеже 298.

5. $f(x)=x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, то (в силу продолжения по непрерывности) $f(0)=0$. Функция четная; область определения $(-\infty,\ +\infty)$; $f'(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$; $f''(x)=-\frac{2}{(x^2+1)^2}$ (при $x\neq 0$); в точке $x=0$, $f'_+(0)=\frac{\pi}{2}$, $f'_-(0)=-\frac{\pi}{2}$; стационарных точек не существует. На полусегменте $[0,\ +\infty]$ производная $f'(x)$ убывает (так как $f''(x)<0$), $f'_+(0)=\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$; следовательно, $f'(x)>0$. В силу четности $f(x)$, в полуинтервале $(-\infty,\ 0]$ также нет стационарных точек, $f'(x)<0$.

Составим таблицу:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	↗
	Вогнута вниз	Вогнута вниз

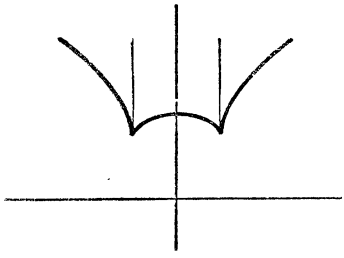
Имеем: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$. Точка минимума: $x=0$, $f(0)=0$, точка 0 есть угловая точка. График представлен на чертеже 299.

При построении графика функции $\varrho=f(\varphi)$ в полярных координатах следует установить область определения функции $f(\varphi)$ и определить промежутки возрастания и убывания.

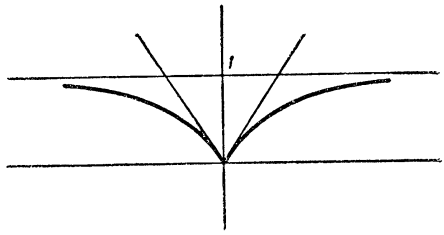
Если $f(\varphi)$ — дифференцируемая функция, то следует найти стационарные точки (в этих точках касательная к графику перпендикулярна к радиусу-вектору, см. § 78), а затем (по знаку производной) установить промежутки монотонности.

Примеры.

1. Рассмотрим пучок прямых, проходящих через точку O (в декартовых координатах), $y=kx$, где k — параметр (которому можно придавать любое действительное значение).



Черт. 298.



Черт. 299.

Будем искать линию, образующую один и тот же угол α со всеми прямыми пучка. Примем точку O за центр полярной системы координат; тогда будем иметь:

$$\frac{\varrho}{\varrho'}=\operatorname{tg}\alpha=\text{const}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\varrho'}{\varrho}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{или} \quad (\ln\varrho)'=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Из полученного соотношения находим:

$\ln\varrho=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\varphi+C$ (где C — произвольное действительное число).

Потенцируя, получим $\varrho=e^{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\varphi}\cdot e^{C}$.

Положив $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=k$, $e^{C}=c$, найдем $\varrho=ce^{k\varphi}$.

Эта линия называется логарифмической спиралью (черт. 300, $c=1$, $k=1$, значит, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$). При $c>0$ и $k>0$ функция $ce^{k\varphi}$ возрастает, $\lim\limits_{\varphi\to+\infty}\varrho=+\infty$ и $\lim\limits_{\varphi\to-\infty}\varrho=0$. Из последнего равенства следует, что спираль «совершает бесконечное множество оборотов» вокруг полюса.

2. Рассмотрим лемнискату Бернулли:

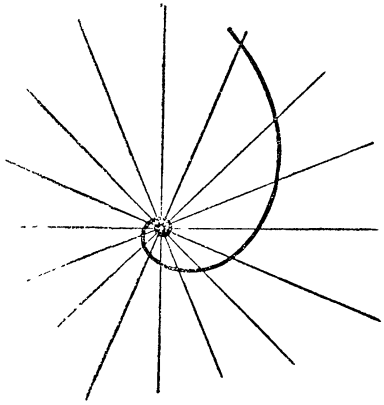
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad (\text{где } a>0).$$

Так как уравнение содержит текущие координаты в квадратах, то линия симметрична относительно обеих осей координат. Следовательно, достаточно построить график в первом квадранте.

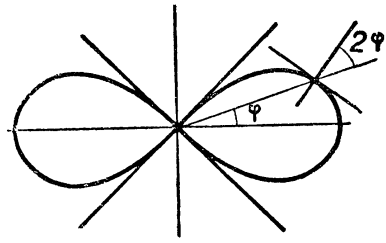
Перейдем к полярным координатам: $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, тогда получим:

$$\varrho^2=a^2\cos 2\varphi \quad \text{и} \quad \varrho=a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Будем рассматривать полярный угол φ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (первая четверть). Значения ϱ действительны на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ и мнимы в полуинтервале



Черт. 300.



Черт. 301.

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. На сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ϱ убывает от $\varrho(0)=a$ до $\varrho\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Так как $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} \varrho=0$, то рассматриваемая дуга имеет один из концов в полюсе и касается луча $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Дифференцируя, находим:

$$\varrho'=-a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Отсюда получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{\varrho}{\varrho'}\right|=|\operatorname{ctg} 2\varphi|.$$

В точке с полярными координатами $\varrho=a$, $\varphi=0$ касательная перпендикулярна к полярной оси.

Из соотношения $\operatorname{tg}\alpha=|\operatorname{ctg} 2\varphi|$ следует $\left(\text{при } 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{4}\right)$ $\alpha=\frac{\pi}{2}-2\varphi$. Следовательно, угол $\frac{\pi}{2}-\alpha$, образованный нормалью к лемнискате и радиусом-вектором соответствующей точки, равен удвоенному полярному углу (черт. 301).

Отобразив построенную дугу зеркально относительно осей координат, получим представленную на чертеже 301 линию.

Пример.

Построение линии, заданной параметрически.
Построим линию, уравнения которой суть:

$$x=\frac{t^2}{t-1},\quad y=\frac{t}{t^2-1}. \tag{1}$$

Система (1) определяет y как непрерывную функцию x в тех промежутках, где x есть монотонная функция t, а y непрерывна. Установим промежутки монотонности $x(t)$.

Имеем:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}.$$

Функция $x(t)$ непрерывна в интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ и $\frac{dx}{dt}=0$ при $t=0$ и $t=2$.

Рассмотрим интервалы $(-\infty, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$; $(2, +\infty)$. В этих интервалах (соответственно) $\frac{dx}{dt}$ имеет знаки: $+$, $-$, $-$, $+$. В точке 0 функция $x(t)$ имеет максимум, в точке 2 — минимум. В рассматриваемых интервалах x — монотонная функция t. Функция $y(t)$ определена в любой точке этих интервалов, кроме $t=-1$, а потому система (1) определяет пять функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ и $y_5(x)$, заданных параметрически в следующих интервалах:

$y_1(x)$ в интервале $-\infty<t<-1$;
$y_2(x)$ » » $-1<t<0$;
$y_3(x)$ » » $0<t<1$;
$y_4(x)$ » » $1<t<2$;
$y_5(x)$ » » $2<t<+\infty$.

Для любой из этих функций имеем в соответствующем интервале:

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2};\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{t^2+1}{(t+1)^2(t-2)t}.$$

Производная $\frac{dy}{dx}$ не обращается в нуль ни в какой точке и по знаку противоположна $\frac{dx}{dt}$.

Интервал $-\infty<t<-1$ отображается функцией $x=\frac{t^2}{t-1}$ на интервал $-\infty<x<-\frac{1}{2}$. Так как в этом интервале $\frac{dy}{dx}<0$, то $y_1(x)$ убывает от 0 до $-\infty$, ибо

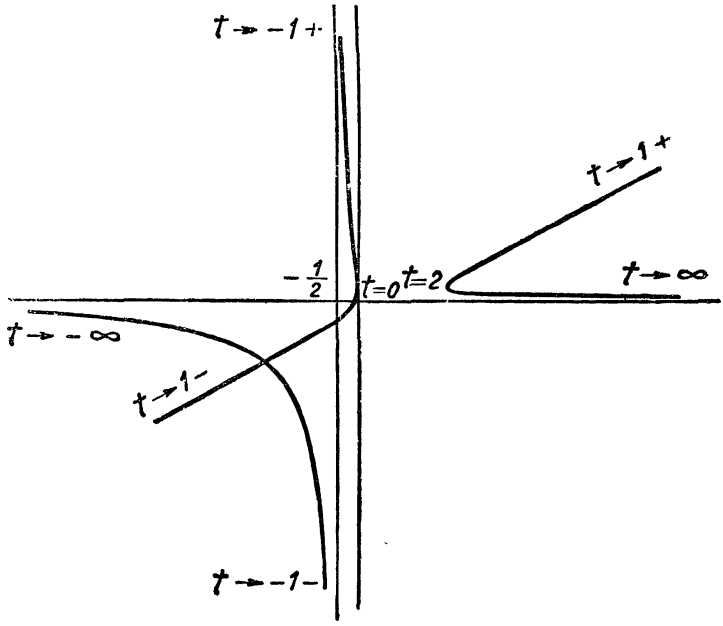
$$\lim_{t\to-\infty} y(t)=\lim\frac{t}{t^2-1}=0 \text{ и } \lim_{t\to-1-} y(t)=-\infty.$$

Аналогично интервал $-1<t<0$ отображается на интервал $-\frac{1}{2}<x<0$.

Так как $\frac{dy}{dx} < 0$ в этом интервале, то $y_2(x)$ убывает от $+\infty$ до 0, ибо

$$\lim_{t \to -1+} y(t) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{t \to 0} y(t) = 0.$$

Интервал $0 < t < 1$ отображается на интервал $-\infty < x < 0$.



Черт. 302.

Так как $\frac{dy}{dx} > 0$, то $y_3(x)$ возрастает от $-\infty$ до 0, ибо

$$\lim_{t \to 1-} y_3(x) = -\infty \text{ и } \lim_{t \to 0} y(t) = 0.$$

Интервал $1 < t < 2$ отображается на интервал $4 < x < +\infty$; $\frac{dy}{dx} > 0$, значит, $y_4(x)$ возрастает от $\frac{2}{3}$ до $+\infty$.

Интервал $2 < t < +\infty$ отображается на интервал $4 < x < +\infty$; функция $y_5(x)$ убывает от $\frac{2}{3}$ до 0.

Графики рассмотренных пяти функций и образуют линию, заданную системой (1). Эта линия изображена на чертеже 302.

ГЛАВА VIII

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

§ 100. Основная лемма

Лемма. *Если в точке a функция $F(x)$ имеет конечную или бесконечную производную n-го порядка $F^{(n)}(a)$ и*

$$F(a)=F'(a)=F''(a)=\ldots=F^{(n-1)}(a)=0,$$

то

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{(x-a)^n}=\dfrac{F^{(n)}(a)}{n!}$, *если производная $F^{(n)}(a)$ конечна, и*

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{(x-a)^n}=+\infty$ (или $-\infty$), если $F^{(n)}(a)=+\infty$ (*или* $-\infty$).

Кратко это утверждение записывается так: если $F(x)$ удовлетворяет условиям леммы, то

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n}=\frac{\mu(x)}{n!},$$

где $\lim\limits_{x\to a}\mu(x)=F^{(n)}(a)$ (где $(F^{(n)}(a)$ — конечная или бесконечная производная).

Доказательство. Воспользуемся теоремой Коши; имеем:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n}=\frac{F(x)-F(a)}{(x-a)^n}=\frac{F'(\xi_1)}{n(\xi_1-a)^{n-1}}.$$

Воспользуемся вторично теоремой Коши:

$$\frac{F'(\xi_1)}{n(\xi_1-a)^{n-1}}=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{n(\xi_1-a)^{n-1}}=\frac{F''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-a)^{n-2}}.$$

Применив теорему Коши $n-1$ раз, получим:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n}=\frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\,(\xi_{n-1}-a)}.$$

Дальше применить теорему Коши в общем случае невозможно, ибо о существовании $F^{(n)}(x)$ в окрестности точки a не сделано никаких предположений. Приняв во внимание, что $F^{(n-1)}(a)=0$, что точка ξ_{n-1} находится в той же окрестности точки a, как и точка x, и что существует конечная или бесконечная производная $F^{(n)}(a)$, получим:

$$\mu(x)=n!\,\frac{F(x)}{(x-a)^n}=\frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\xi_{n-1}-a}=\frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})-F^{(n-1)}(a)}{\xi_{n-1}-a},$$

откуда

$$\lim_{x\to a}\mu(x)=\lim_{\xi_{n-1}\to a}\frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})-F^{(n-1)}(a)}{\xi_{n-1}-a}=F^{(n)}(a),\quad \text{ч. т. д.}$$

Заметим, что рассуждения остаются в силе и в том случае, когда функция $F(x)$ определена в окрестности точки a лишь при $x\leqslant a$ или $x\geqslant a$ и в этой части окрестности выполнены все условия леммы.

§ 101. Полиномы Тейлора

Пусть $f(x)$ — функция, рассматриваемая в некотором промежутке $<A, B>$. Предположим, что в данной точке $a\in<A, B>$ существует конечная производная $f^{(n)}(a)$. При этих предположениях производные порядка ниже n существуют в некоторой окрестности точки a.

Определение. *Полиномом Тейлора степени n данной функции $f(x)$ в точке a называется многочлен*

$$T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)(x-a)}{1!}+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Вычислим значение производных от $T_n(x)$ в точке a

$$T_n(a)=f(a);\ T_n'(a)=f'(a);\ T_n''(a)=f''(a);\ \ldots;\ T_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a).$$

Таким образом, *значения полинома Тейлора $T_n(x)$ и его первых n производных в точке a совпадают со значениями функции $f(x)$ и соответствующих производных в точке a.*

Некоторые из коэффициентов (или даже все коэффициенты) $T_n(x)$ могут обратиться в нуль, а потому степень $T_n(x)$ может оказаться более низкой, чем n.

Из выражения для многочленов Тейлора:

$$T_k(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

вытекает следующее их свойство: для перехода от многочлена $T_k(x)$ к многочлену $T_{k+1}(x)$ достаточно, не меняя коэффициентов $T_k(x)$ в разложении по степеням $x-a$, прибавить слагаемое $\frac{f^{(k+1)}(a)(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$:

$$T_{k+1}(x)=T_k(x)+\frac{f^{(k+1)}(a)(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Определение. *Произведение $f^{(k)}(a)(x-a)^k$ называется дифференциалом k-го порядка в точке a функции $f(x)$.*

Дифференциал порядка k в точке a *обозначается так:*

$$d^kf(x,\ a)=f^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

Для обозначения дифференциалов от данной функции $f(x)$ в произвольной точке x, в которой существуют соответствующие производные, применяются символы:

$$df(x);\ d^2f(x);\ \ldots;\ d^nf(x).$$

Итак, имеем:

$$df(x)=(X-x)f'(x);$$

$$d^2f(x)=(X-x)^2f''(x);\ \ldots;\ d^nf(x)=(X-x)^{(n)}f(x).$$

Приняв во внимание, что $dx=X-x$, можно написать выражения для дифференциалов высших порядков в точке x в виде:

$$d^2f(x)=f''(x)\,dx^2;\ d^3f(x)=f'''(x)\,dx^3;\ \ldots;\ d^kf(x)=f^{(k)}(x)\,dx^k.$$

Отсюда понятно обозначение Лейбница для производных:

$$\frac{d^2f}{dx^2};\ \frac{d^3f}{dx^3};\ \ldots;\ \frac{d^kf}{dx^k}.$$

При помощи символов дифференциалов полином Тейлора $T_n(x)$ может быть записан в следующем виде:

$$T_n(x)=f(a)+df(x,\ a)+\frac{d^2f(x,\ a)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{d^kf(x,\ a)}{k!}+\ldots+\frac{d^nf(x,\ a)}{n!}.$$

Примеры.

1. Найти $T_3(x)$ для функции $f(x)=e^{\sin x}$ в точке 0. Имеем:

$f(x)=e^{\sin x}$; $f(0)=1$.

$f'(x)=e^{\sin x}\cos x$; $f'(0)=1$.

$f''(x)=-e^{\sin x}\sin x+\cos^2 x e^{\sin x}$; $f''(0)=1$.

$f'''(x)=-e^{\sin x}(\cos x+3\sin x\cos x-\cos^3 x)$; $f'''(0)=0$.

Следовательно,

$$T_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2.$$

2. Построим полиномы Тейлора любого порядка для функции a^x в точке 1. Имеем:

$$f(1)=a,\quad f^{(k)}(x)=(\ln a)^k a^x.$$

Следовательно, $f^{(k)}(1)=a(\ln a)^k$.

Значит,

$$T_1(x)=a+a(x-1)\ln a;\quad T_2(x)=a+a(x-1)\ln a+\frac{a\ln^2 a}{2!}(x-1)^2.$$

. . . . . .

$$T_n(x)=a+a(x-1)^2+\frac{a\ln^2 a}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{a\ln^n a}{n!}(x-1)^n.$$

3. Приведем пример функции, имеющей в точке 0 производные любого порядка, равные нулю:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Имеем:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0,$$

откуда

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

Производная $f'(x)$ непрерывна в точке 0; в самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=f'(0)=0.$$

Далее,

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=0.$$

Следовательно,

$$f''(x)=\begin{cases}-\left(\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

Подобно предыдущему, покажем, что $f''(0)=0$. Докажем, что производная любого порядка в точке 0 равна нулю. Производная любого порядка в любой точке $x\neq 0$ имеет вид:

$$f^{(n)}(x)=Q_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $Q_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ есть многочлен относительно $\dfrac{1}{x}$; но так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}=0$ при любом n, то $\lim\limits_{x\to 0}f^{(n)}(x)=0$.

Кроме того, мы получили

$$f'(0)=f''(0)=0;$$

предположим, что $f^{(n-1)}(0)=0$, тогда будем иметь:

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x}=\lim\frac{Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0.$$

Отсюда заключаем, что производные любого порядка непрерывны в точке $x=0$ и $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... равны нулю. Значит (при $a=0$), полином Тейлора тождественно равен нулю: $T_n(x)=0$.

§ 102. Формула Тейлора и ее остаточный член

Предположим, что функция $f(x)$, рассматриваемая в промежутке $<A, B>$, имеет конечную производную n-го порядка $f^{(n)}(a)$ в данной точке $a \in <A, B>$.

Обозначим через $R_n(x)$ разность между $f(x)$ и полиномом Тейлора n-го порядка в точке a:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Следовательно, по определению $R_n(x)$, имеем:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

или в развернутом виде:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Это тождество называется формулой Тейлора, а $R_n(x)$ — ее остаточным членом. Так в точке a значения функций $f(x)$ и $T_n(x)$ и их производных до n-й включительно равны, то $R_n(x)$ есть *функция, n раз дифференцируемая в точке a;* и

$$R_n(a) = R_n'(a) = R_n''(a) = \ldots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

В силу основной леммы,

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{R_n^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

Теорема. *Если существует конечная производная $f^{(n)}(a)$, то*

$$R_n(x) = \omega(x)(x-a)^n,$$

где $\omega(x)$ — функция, непрерывная в точке a и равная нулю в этой точке.

Доказательство. Положим $\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \omega(x)$, если $x \neq a$ и $\omega(a) = 0$. Имеем: $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$, ч. т. д.

Следовательно, формула Тейлора может быть записана в виде:

$$f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \omega(x).$$

Предположим, что в точке a существует конечная или бесконечная производная $n+1$ порядка $f^{(n+1)}(a)$; при этом о существовании производной $n+1$ порядка в окрестности точки a мы не делаем (пока) никаких предположений. Так как полином Тейлора $T_n(x)$ имеет степень не выше n, то $T_n^{(n+1)}(x) = 0$, а потому

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

имеет в точке a производную $R_n^{(n+1)}(a)$, равную $f^{(n+1)}(a)$.

В силу основной леммы,

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{\mu(x)}{(n+1)!}$$

или

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}\mu(x)}{(n+1)!}, \text{ где } \lim_{x \to a} \mu(x) = f^{(n+1)}(a).$$

Итак, формула Тейлора принимает вид:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}\mu(x)}{(n+1)!},$$

где

$$\lim_{x \to a} \mu(x) = f^{(n+1)}(a).$$

Пример.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + x + 1 + (x-1)^{\frac{7}{3}};$$

имеем:

$$f'(x) = 2x + 1 + \frac{7}{3}(x-1)^{\frac{4}{3}}; \quad f''(x) = 2 + \frac{28}{9}(x-1)^{\frac{1}{3}};$$

$$f'''(x) = \frac{28}{27}(x-1)^{-\frac{2}{3}}.$$

В точке $x=1$ получим:

$$f(1) = 3; \; f'(1) = 3; \; f''(1) = 2; \; f'''(1) = +\infty.$$

Подставив в формулу Тейлора, будем иметь (при $n=2$):

$$f(x) = 3 + 3 \cdot (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^2}{3!}\mu(x),$$

где

$$\lim_{x \to 1} \mu(x) = +\infty.$$

Как легко видеть,

$$R_2(x) = (x-1)^{\frac{7}{3}}; \; \mu(x) = \frac{6}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \text{ и } \omega(x) = \frac{R_2(x)}{(x-1)^2} = \sqrt[3]{x-1}.$$

Предположим, что функция $f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную $n+1$-го порядка в окрестности точки a.

При доказательстве основной леммы мы получили равенство:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n}=\frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\,(\xi_{n-1}-a)};$$

это равенство можно применить к $R_n(x)$ (заменив n на $n+1$):

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!\,(\xi_n-a)}=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(a)}{(n+1)!\,(\xi_n-a)},$$

где ξ_n есть промежуточное значение между a и x. Так как $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$, то, применив теорему Лагранжа, получим:

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Отсюда находим выражение для остаточного члена в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $0<\theta<1$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получает вид:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n+\frac{(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Для остаточного члена в формуле Тейлора можно получить выражения в разнообразной форме, однако практическую ценность кроме формы Лагранжа, представляет лишь форма Коши. Чтобы получить остаточный член в форме Коши, проделаем нижеследующие преобразования. Рассмотрим остаточный член:

$$R_n(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-\ldots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a); \qquad (1)$$

если считать, что аргумент x имеет некоторое определенное значение, то при заданной функции $f(x)$ значение R_n определяется выбором точки a. Введем в рассмотрение функцию $\Phi(t)$, которая получается заменой в правой части равенства (1) a на t:

$$\Phi(t)=f(x)-f(t)-(x-t)f'(t)-\ldots-\frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!}.$$

Функцию $\Phi(t)$ будем рассматривать в той окрестности точки a, в которой существуют $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n+1)}(x)$.

По формуле Лагранжа имеем:

$$\Phi(x)-\Phi(a)=(x-a)\Phi'(\eta), \qquad (2)$$

где η — промежуточное значение между x и a.

Непосредственным вычислением находим:

$$\Phi'(t) = -\frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}.$$

Подставив в формулу (2) значения

$$\Phi'(\eta), \quad \Phi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(a) = R_n(x),$$

получим:

$$R_n(x) = \frac{(x-\eta)^n (x-a) f^{(n+1)}(\eta)}{n!}$$

или, полагая $\eta = a + \vartheta(x-a)$, где $0 < \vartheta < 1$, найдем $R_n(x)$ в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{n!}.$$

Если в формуле Тейлора заменить a на x, а x на $x+h$, то получим:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} \qquad \text{в форме Лагранжа,}$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{n!} \qquad \text{в форме Коши.}$$

Формула Маклорена. Положив в формуле Тейлора $a = 0$, получим формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \qquad \text{в форме Лагранжа,}$$

или

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(\vartheta x)}{n!} \qquad \text{в форме Коши.}$$

Этот частный случай формулы Тейлора часто встречается на практике.

Пример.

Возьмем остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n = \frac{(x-a)^{(n+1)} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}.$$

Докажем, что если производная $f^{(n+2)}(x)$ конечна и отлична от нуля в точке a, то

$$\lim_{x\to a}\theta=\frac{1}{n+2}.$$

Положим для краткости $x=a+h$; имеем:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\ldots+R_n$$

и

$$f(a+h)=f(a)+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(a)\,h^{n+1}}{(n+1)!}+R_{n+1},$$

откуда

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(a)\,h^{n+1}}{(n+1)!}+R_{n+1}$$

или

$$\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}+\frac{h^{n+2}f^{(n+2)}(a+\theta_1 h)}{(n+2)!}.$$

После упрощений получим:

$$f^{(n+1)}(a+\theta h)-f^{(n+1)}(a)=\frac{h}{(n+2)}f^{(n+2)}(a+\theta_1 h).$$

Применим к левой части формулу Лагранжа:

$$\theta f^{(n+2)}(a+\theta_2 h)=\frac{1}{(n+2)}f^{(n+2)}(a+\theta_1 h),$$

откуда

$$\theta=\frac{1}{(n+2)}\frac{f^{(n+2)}(a+\theta_1 h)}{f^{(n+2)}(a+\theta_2 h)}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to a}\theta=\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+2}.$$

§ 103. Формула Тейлора для простейших элементарных функций

Ниже приводятся основные формулы, существенные для исследования элементарных функций.

1° $f(x)=e^x$. Так как $f^{(n)}(0)=1$, получим по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}.$$

2° $f(x)=\sin x$.

Имеем:

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2};$$

отсюда при четном n получим $f^{(2k)}(0)=0$, а при нечетном n

$$f^{(2k+1)}(0)=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^k.$$

Так как в точке 0 производные четного порядка равны нулю, то удобно считать n числом четным ($n=2k$), тогда получим по формуле Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k x^{2k+1}\cos\theta x}{(2k+1)!}.$$

Остаточный член взят в форме Лагранжа:

$$R_n = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x + \frac{2k+1}{2}\pi\right) = \frac{(-1)^k x^{2k+1}\cos(\theta x)}{(2k+1)!}.$$

3° $f(x)=\cos x$.
Имеем:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

откуда

$$f^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k; \quad f^{(2k+1)}(0) = 0.$$

Применив формулу Маклорена, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{k+1}\cos(\theta x)\, x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

(остаточный член в форме Лагранжа).
4° $f(x)=\ln(1+x)$.
Имеем:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \text{откуда} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Для исследования данной функции оказывается полезным знание остаточного члена как в форме Лагранжа, так и в форме Коши.

Для R_n в форме Лагранжа получим выражение:

$$R_n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

В форме Коши:

$$R_n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n.$$

Подставив в формулу Маклорена, найдем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n.$$

Заменив x на $-x$, получим:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}} \quad \text{в форме Лагранжа,}$$

$$R_n = -\frac{x^{n+1}}{1-\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n \quad \text{в форме Коши.}$$

5° $f(x) = (1+x)^k$, где k — любое действительное число. Имеем:

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)\ldots(k-n+1)(1+x)^{k-n},$$

откуда

$$f^{(k)}(0) = k(k-1)\ldots(k-n+1).$$

Подставив в формулу Маклорена, получим:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{k(k-1)\ldots(k-n)\,x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!\,(1+\theta x)^{n+1-k}} \quad \text{в форме Коши.}$$

Заметим, что в случае, если k есть натуральное число, то $f^{(k+1)}(x)$ есть константа, равная нулю, а потому $R_n = 0$ при $n > k$, и формула обращается в формулу бинома Ньютона. Как и в случае натурального k, число $\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}$ будем называть биномиальным коэффициентом и обозначать символом C_k^n. Пользуясь этим обозначением, можно написать:

$$(1+x)^k = 1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \ldots + C_k^n x^n + R_n.$$

Так, например,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}x^n + x^n\omega(x)$$

Выражение для биномиального коэффициента получается путем следующих преобразований:

$$C_{\frac{1}{2}}^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{-2n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \frac{(-1)^{n-1}\,1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}.$$

§ 104. Теорема о наилучшей локальной аппроксимации

Свойство наилучшей локальной аппроксимации полиномом Тейлора выражается следующей теоремой.

Теорема. *Если функция $f(x)$ в точке a имеет конечную производную n-го порядка, то каков бы ни был многочлен $Q(x)$ степени не выше n, отличный от $T_n(x)$ (построенного в точке a), в достаточно малой окрестности точки a имеет место неравенство:*

$$|f(x)-T_n(x)|<|f(x)-Q(x)|, \quad \text{где } x\neq a.$$

Доказательство. Расположим многочлен $Q(x)$ по степеням разности $x-a$:

$$Q(x)=k_0+k_1(x-a)+\ldots+k_m(x-a)^m \quad (\text{где } m\leqslant n)\,*.$$

По предположению, многочлен $Q(x)$ отличен от $T_n(x)$. Пусть первый из коэффициентов многочлена $Q(x)$, отличный от соответствующего коэффициента полинома Тейлора, есть k_q; таким образом,

$$k_q\neq\frac{f^{(q)}(a)}{q!}.$$

Возможно, что $k_0\neq f(a)$, но этот случай будет также предусмотрен, если условимся считать $f^{(0)}(a)=f(a)$ и $0!=1$; возможно также, что все коэффициенты $Q(x)$ совпадают с соответствующими коэффициентами $T_n(x)$, но в этом случае $m<n$, и тогда можно дополнить многочлен $Q(x)$ членами, равными нулю, считая

$$k_{m+1}=k_{m+2}=\ldots=k_n=0.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, получим:

$$f(x)-T_n(x)=(x-a)^n\omega(x),$$

$$f(x)-Q(x)=\left(\frac{f^{(q)}(a)}{q!}-k_q\right)(x-a)^q+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}-k_n\right)(x-a)^n+(x-a)^n\omega(x), \quad \text{где } 0\leqslant q\leqslant n.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to a}\left|\left(\frac{f^{(q)}(a)}{q!}-k_q\right)+\ldots+(x-a)^{n-q}\omega(x)\right|=\left|\frac{f^{(q)}(a)}{q!}-k_q\right|>0$$

и

$$\lim_{x\to a}|x-a|^{n-q}\omega|(x)|=0.$$

---

* Это можно сделать так: $Q(x)=Q(a+h)$, где $h=x-a$; пользуясь формулой бинома Ньютона, после приведения подобных членов мы представим многочлен $Q(a+h)$ в виде:

$$k_0+k_1h+k_2h^2+\ldots+k_mh^m.$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности точки a при $x \neq a$ будем иметь:

$$|x-a|^{n-q}|\omega(x)| < \left|\left(\frac{f^{(q)}(a)}{q!}-k_q\right)+\ldots+(x-a)^{n-q}\omega(x)\right|.$$

Умножив обе части этого неравенства на $|x-a|^q$, получим:

$$|f(x)-T_n(x)| < |f(x)-Q(x)|, \text{ ч. т. д.}$$

Примечание. Свойство дифференциала, дающего наилучшую локальную аппроксимацию посредством линейной функции $f(a)+(x-a)f'(a)$ (см. § 68), есть частный случай доказанной теоремы ($n=1$).

Геометрическая интерпретация. Какую бы параболу n-го или более низкого порядка

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

проходящую через точку $(a, f(a))$, мы ни взяли, в достаточно малой окрестности точки a парабола $y=T_n(x)$ лежит «ближе» к графику $y=f(x)$, чем первая парабола (расстояние измеряется по параллелям оси ординат).

Теорема. *Если функция $f(x)$ в точке a имеет конечную производную $f^{(n)}(a)$, то представление*

$$f(x) = Q(x) + \omega(x)(x-a)^n,$$

где $Q(x)$ — многочлен степени не выше n и $\lim\limits_{x\to a}\omega(x)=0$, возможно единственным образом посредством полинома Тейлора $T_n(x)$

$$Q(x) = T_n(x).$$

Эта теорема называется теоремой единственности разложения в строку Тейлора.

Доказательство. Для полинома $T_n(x)$ имеем:

$$f(x) = T_n(x) + \omega(x)(x-a)^n. \qquad (1)$$

Допустим, что существует многочлен $Q(x) \neq T_n(x)$, для которого

$$f(x) = Q(x) + \omega_1(x)(x-a)^n. \qquad (2)$$

Предположив существование равенства (2), мы допускаем наличие двух различных многочленов $T_n(x)$ и $Q(x)$, дающих наилучшую локальную аппроксимацию *. Имеем (по свойству $T_n(x)$) в некоторой окрестности U'_a (при $x \neq a$):

$$|f(x)-T_n(x)| < |f(x)-Q(x)|.$$

Так как $Q(x)$ также дает наилучшую локальную аппроксимацию, то в некоторой окрестности U''_a получим (при $x \neq a$):

$$|f(x)-Q(x)| < |f(x)-T_n(x)|.$$

* Доказательство теоремы о наилучшей аппроксимации основано лишь на соотношении $f(x)=T_n(x)+\omega(x-a)^n$. Поэтому многочлен $Q(x)$ также должен давать наилучшую локальную аппроксимацию.

В любой окрестности U_a, содержащейся в U'_a и U''_a, выполняются оба последние неравенства, что невозможно. Следовательно, $T_n(x) = Q(x)$, но тогда $\omega(x) = \omega_1(x)$, ч. т. д.

§ 105. Применение формулы Тейлора к исследованию функций в окрестности данной точки

1. Исследование функции в окрестности стационарной точки. Предположим, что в точке a производные функции $f(x)$ не все равны нулю и что первая из необращающихся в нуль производных в точке a есть конечная или бесконечная производная k-го порядка: $f^{(k)}(a) \neq 0$:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0.$$

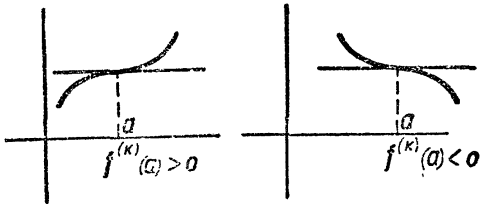
Положив в формуле Тейлора $n = k-1$, получим:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^k \mu(x)}{k!}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to a} \mu(x) = f^{(k)}(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a имеем $\mu(x) > 0$, если $f^{(k)}(a) > 0$, и $\mu(x) < 0$, если $f^{(k)}(a) < 0$. Так как $(x-a)^k > 0$, если $x > a$, то в достаточно малой окрестности точки a справа от a

$$\frac{\mu(x)}{k!}(x-a)^k > 0 \quad (\text{или } < 0)$$

при условии, что $f^{(k)}(a) > 0$ (или < 0). Следовательно, $f(x) > f(a)$ (или $< f(a)$) в достаточно малой окрестности точки a при $x > a$, если $f^{(k)}(a) > 0$ (или < 0). При проведении аналогичного исследования в окрестности точки a, слева от a надо различать два случая: k — четное число и k — нечетное число. Если k — четное, то $(x-a)^k > 0$, а потому $f(x) > f(a)$ (или $< f(a)$) при условии $f^k(a) > 0$ (или < 0). Если k — нечетное число, то $(x-a)^k < 0$, а потому $f(x) < f(a)$ (или $> f(a)$) при условии $f^{(k)}(a) > 0$ (или < 0).



Черт. 303.

I. Из полученного результата видим, что если порядок k — первой из необращающихся в нуль производных в точке a — есть нечетное число, то в окрестности точки a существуют такие точки, в которых $f(x) < f(a)$, а также и такие, в которых $f(x) > f(a)$.

Если $k > 1$ есть нечетное число, то $f'(a) = 0$, а потому в точке $M(a, f(a))$ график имеет касательную $y = f(a)$, параллельную оси абсцисс. Если $f^{(k)}(a) > 0$ (или < 0), то в достаточно малой окрестности точки a при $x > a$ линия расположена над (под) касательной, а при $x < a$ под (над) касательной (черт. 303).

Если k — четное число, то при $f^{(k)}(a) > 0$ (или < 0) имеем $f(x) > f(a)$ (или $< f(a)$) в окрестности точки a справа и слева от точки a; значит, в точке a имеет место минимум (максимум). Отсюда практически полезное правило для исследования функции на локальный экстремум: *вычисляем производные* $f'(a)$, $f''(a)$, ... *до тех пор, пока не встретимся с первым* (*конечным или бесконечным*) *числом* $f^{(k)}(a)$, *отличным от нуля*; *если* k — *четное число, то имеет место минимум при* $f^{(k)}a > 0$ *и максимум при* $f^{(k)}(a) < 0$; *если* k — *нечетное число, то в точке* a *нет экстремума*. Это правило неприменимо, если после нахождения последовательных производных до $k-1$ порядка включительно окажется, что $f^{(k)}(a)$ не существует, а также если в точке a равны нулю производные любого порядка.

Примеры.

1. Исследуем функцию $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ на экстремум; $f'(x) = e^{-x^2}(4x^3 - 2x^5)$, откуда, решив уравнение $4x^3 - 2x^5 = 0$, найдем стационарные точки $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2}$.

Вычислив

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^6 - 18x^4 + 12x^2),$$

найдем $f''(\pm\sqrt{2}) < 0$ и $f''(0) = 0$. Значит, в точках $\pm\sqrt{2}$ имеет место максимум.

Вычисляя

$$f'''(x) = e^{-x^2}(-8x^7 + 60x^5 - 96x^3 + 24x), \text{ найдем } f'''(0) = 0.$$

Так как

$$f^{IV}(x) = e^{-x^2}(16x^8 - 176x^6 + 492x^4 - 336x^2 + 24)$$

и $f^{IV}(0) = 24 > 0$, то в точке 0 имеет место минимум.

2. Функции

$$f_1(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{и} \quad f_2(x) = x^2\left(3 + \sin\frac{1}{x}\right)$$

имеют в точке 0 производные, равные нулю: $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$, но $f_1'(0)$ и $f_2''(0)$ не существуют (первые производные разрывны в точке 0), первая функция в точке 0 не имеет экстремума, а вторая имеет минимум. В данном случае правило неприменимо.

3. Функция $f_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ имеет в точке 0 производные любого порядка, равные нулю. Если $x \neq 0$, то $f_1(x) \geqslant 0$, а потому в точке 0 имеет место минимум. Функция

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x > 0); \\ 0 & (x = 0); \\ -e^{-\frac{1}{x^2}} & (x < 0), \end{cases}$$

так же как и $f_1(x)$, имеет в точке 0 производные любого порядка, равные нулю. Но так как $f_2(x) > 0$ при $x > 0$ и $f_2(x) < 0$ при $x < 0$, то в точке 0 нет экстремума. В данном случае правило неприменимо.

II. Пусть $f^{(k)}(a)$ есть первая из производных (конечная или бесконечная), не считая $f'(a)$, не равная нулю в точке a. Относительно $f'(a)$ не делаем никаких предположений. Применив формулу Тейлора, получим:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^k\mu(x)}{k!},\quad \text{где}\quad \lim_{x\to a}\mu(x)=f^{(k)}(a).$$

Примем во внимание, что $f(a)+(x-a)f'(a)$ есть ордината касательной в точке $M(a, f(a))$ к линии $y=f(x)$. Рассуждая подобно предыдущему, придем к следующему заключению: если k — четное число, то при $f^{(k)}(a)>0$ график в достаточно малой окрестности точки a лежит выше касательной; если $f^{(k)}(a)<0$, то ниже касательной, если k — нечетное число, то график лежит по разным сторонам касательной в окрестности точки a. Так, если $f^{(k)}(a)>0$, то при $x>a$ график лежит выше, а при $x<a$ ниже касательной.

III. Формула Тейлора в ряде случаев оказывается полезной при отыскании пределов. Поясним это на примерах.

Примеры.

1. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

Так как $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+x^3\omega(x)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+x^3\omega(x)\right)}{x^3}=\lim\left(\frac{1}{3!}-\omega(x)\right)=\frac{1}{6}.$$

2. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right].$$

Выполним следующие преобразования:

$$\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\dots\right]+$$

$$+\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\dots\right]=x+\frac{1}{12}x^3+\dots.$$

Мы не пишем остаточные члены; они имеют вид ωx^3, откуда находим:

$$\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{12}+\dots\right)$$

Следовательно, искомый предел равен $\frac{11}{12}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$.

Имеем:

$$\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}=$$

$$=\frac{x\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\dots\right)+x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)}{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^{3}}+$$

$$+\frac{-2\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\dots\right)+2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)}{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^{3}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{6}x^{3}+\dots}{x^{3}+\dots}.$$

Так как ненаписанные члены имеют вид $x^3\omega(x)$, то данное выражение представится в виде $\dfrac{\frac{1}{6}+\omega(x)}{1+\omega_1(x)}$, откуда искомый предел равен $\frac{1}{6}$.

§ 106. Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

Формула Тейлора имеет многочисленные применения в приближенных вычислениях. Пусть ε — предел допустимой погрешности, с которой требуется вычислить значение данной функции $f(x)$. Будем рассматривать многочлены Тейлора, построенные для данного значения $x=a$. Задачи приближенного вычисления могут ставиться различным образом, как например:

1° При данном x найти такое n (по возможности меньшее), чтобы

$$|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon. \qquad (1)$$

2° Найти такое n, чтобы неравенство (1) имело место для всех значений x, принадлежащих данному промежутку $<c,\ d>$.

3° При данном n установить промежуток, в котором имеет место неравенство (1).

Задачи 1° и 2° не всегда имеют решение (см. ниже пример 5). Задача 3° всегда имеет решение, ибо

$$\lim_{x\to a}[f(x)-T_n(x)]=0,$$

а потому неравенство (1) наверное выполняется в некоторой окрестности точки a.

Примеры.

1. Положим $f(x)=e^x$, $a=0$. Возьмем остаточный член формулы Маклорена; имеем:

$$|R_n|=\left|\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\right|\leqslant e^{|x|}\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

При любом данном x

$$\lim R_n=0, \text{ ибо } \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

а потому существует значение n, при котором

$$|R_n|<\varepsilon.$$

Следовательно, посредством полиномов Тейлора можно вычислить значение e^x с любой степенью точности. Заметим, что число n при данном ε в зависимости от значения x будет различным.

Решим задачу 2° при $\varepsilon=\frac{1}{1000}$ для сегмента $[-1, 1]$. На сегменте $[-1, 1]$

$$|e^{\theta x}|<e^x\leqslant e<3$$

и

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!};\ \text{при } n=6 \text{ имеем: } \frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}.$$

Значит, $|R_6(x)|<\frac{3}{5040}<\frac{1}{1000}$. Итак, многочлен

$$T_6(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^6}{6!}$$

аппроксимирует функцию e^x на сегменте $[-1, 1]$ с точностью до $\frac{1}{1000}$, т. е.

$$|e^x-T_6(x)|<\frac{1}{1000},\ \text{если } |x|\leqslant 1.$$

В частности, при $x=1$ имеем, что

$$\left|e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{6!}\right)\right|<\frac{1}{1000},$$

т. е.

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{6!}\approx e \text{ с точностью до } \frac{1}{1000}.$$

2. Остаточный член формулы Маклорена для функции $\sin x$ не превосходит по абсолютной величине $\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$, откуда

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)\right|<\left|\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|.$$

Пусть, например, x принадлежит сегменту $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; положим $k=4$, тогда

$$\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{x^9}{9!}\leqslant\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^9}{9!}\leqslant\frac{(0{,}8)^9}{9!}<\frac{0{,}2}{362880}<0{,}000005.$$

Таким образом, значения $\sin x$ отличаются от значений многочлена $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$ на число, меньшее 0,000005. Значит, для составления

таблиц синусов с пятью верными знаками можно пользоваться многочленом

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

Для малых значений x хорошую точность дает сумма двух первых членов формулы Маклорена:

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}.$$

Так, положив $x=10^\circ$ или, в радианной мере, $x=\frac{\pi}{18}$, получим следующую оценку для ошибки:

$$|R_4|=\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5<\frac{(0{,}2)^5}{5!}<\frac{1}{3\cdot10^5}.$$

3. Положим в формуле Маклорена для косинуса $n=5$ (значит, $k=2$):

$$R_5(x)=-\frac{\cos\theta x\cdot x^6}{6!}.$$

Найти сегмент $[-p, p]$, на котором $T_5(x)$ аппроксимирует $\cos x$ с точностью до 0,00005.

Имеем: $|R_5(x)|<\frac{|x|^6}{6!}$; если $\frac{p^6}{6!}<0{,}00005$, то $|R_5(x)|<0{,}00005$ при любом x, принадлежащем сегменту $[-p, p]$.

Решив неравенство $p^6<720\cdot0{,}00005$, получим, что $p<0{,}57$. Значит, $T_5(x)$ аппроксимирует $\cos x$ с точностью до 0,00005 на сегменте $[-0{,}57;\ 0{,}57]$. Так как $\frac{\pi}{4}<57$, то для составления таблицы значений косинусов острых углов меньше 30° с четырьмя верными знаками можно положить

$$\cos x\approx1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.$$

4. Имеем:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n.$$

Предположим, что $0<x\leqslant1$, тогда

$$|R_n|=\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

(остаточный член в форме Лагранжа). Пусть $\varepsilon>0$ — заданное число:

$$\left|\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)\right|<\varepsilon,$$

если $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, т. е. если $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Таким образом, многочлен $x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}$ аппроксимирует функцию $\ln(1+x)$ на сегменте $[0, 1]$ с абсолютной ошибкой, не превосходящей $\frac{1}{n+1}$.

В частности, при $x=1$, $n=9$ имеем:

$$\left|\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{9}\right)\right|<\frac{1}{10}.$$

5. Положим $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; при $a=0$ имеем $T_n(x)=0$. Пусть $x=p$—данное число, а $\varepsilon<e^{-\frac{1}{p^2}}$, тогда $|f(p)-T_n(p)|=e^{-\frac{1}{p^2}}>\varepsilon$, каково бы ни было значение n. Следовательно, при этих данных задача 1° не имеет решения. Задача 2° наверное не имеет решения ни в каком промежутке, содержащем точку p.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА IX
ОТЫСКАНИЕ ПРИМИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 107. Неопределенный интеграл

Как известно (§ 85, стр. 301), примитивной функцией относительно функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, которая имеет производную, равную $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

При этом:

1° Всякая функция вида $F(x) + C$, где C — любое действительное число, является примитивной по отношению к функции $f(x)$.

2° Если функция $f(x)$ рассматривается в промежутке, то всякая ее примитивная $\Phi(x)$ может отличаться от $F(x)$ только на константу:

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Отсюда следует, что *если известна функция $F(x)$, примитивная относительно функции $f(x)$, в некотором промежутке, то формула $F(x) + C$, где C — произвольное действительное число, изображает множество всех функций, примитивных по отношению к $f(x)$ в данном промежутке.*

Мы ограничимся рассмотрением функций, определенных в промежутке.

Определение. *Неопределенным интегралом функции $f(x)$, рассматриваемой в промежутке, называется множество всех примитивных функций относительно $f(x)$.*

Не всякая функция имеет примитивную: так, например, если $f(x)$ имеет точки разрыва первого рода, то (§ 88, стр. 309) для нее не может существовать ни одной примитивной. В самом деле, равенство $F'(x) = f(x)$ невозможно, ибо $F'(x)$ не может иметь точек разрыва первого рода. В настоящей главе мы изложим способы практического отыскания примитивной функции. Тем самым в каждом конкретном случае будет установлено и ее существование.

Ниже будет доказано, что *всякая непрерывная в промежутке функция $f(x)$ имеет примитивную.*

Примечание. Если областью определения функции $f(x)$ не является промежуток, то нельзя утверждать, что любые две примитивные относительно

$f(x)$ функции отличаются на константу. Пусть, например, функция $f(x)=x$ определена на множестве значений аргумента, состоящем из двух интервалов: $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; тогда функция $F(x)=\frac{x^2}{2}$, определенная в тех же интервалах, есть примитивная относительно $f(x)$. Функция $\varphi(x)$, определенная законом соответствия

$$\Phi(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2} & (\text{если } 1<x<+\infty);\\ \frac{x^2}{2}+1 & (\text{если } -\infty<x<-1),\end{cases}$$

также является примитивной относительно $f(x)$, однако разность $\Phi(x)-F(x)$ не есть константа:

$$\Phi(x)-F(x)=\begin{cases}0 & (\text{если } 1<x<+\infty);\\ 1 & (\text{если } -\infty<x<-1).\end{cases}$$

Для обозначения неопределенного интеграла от функции $f(x)$ применяется символ $\int f(x)\,dx$.

Так, например,

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C, \quad \int \cos x\,dx=\sin x+C.$$

Функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией, $f(x)\,dx$ — подинтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла:

1) *Если $F(x)$ есть примитивная относительно $f(x)$ в некотором промежутке, то*

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

где C — произвольное действительное число.

Это свойство следует из определения неопределенного интеграла. Последнее равенство можно переписать так:

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C$$

или так:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Эти равенства имеют место для любой дифференцируемой в промежутке функции $F(x)$.

Например:

$$\int d\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}+C.$$

2) *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, и дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.*

Согласно определению, имеем:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

и

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx.$$

Определение. *Два выражения, содержащие неопределенные интегралы, считаются равными, если каждая функция, принадлежащая множеству функций, определяемых левой частью, содержится в множестве функций, определяемых правой частью; и обратно: всякая функция, принадлежащая множеству, определяемому правой частью, содержится в множестве, определяемом левой частью.*

Пример.

Покажем, что

$$\int (2x+1)\,dx = \int 2x\,dx + \int dx.$$

В самом деле, функция x^2+x есть примитивная относительно $2x+1$, значит

$$\int (2x+1)\,dx = x^2+x+C \text{ (первое множество).}$$

Аналогично,

$$\int 2x\,dx = x^2+C_1 \text{ и } \int dx = x+C_2,$$

откуда

$$\int 2x\,dx + \int dx = (x^2+x)+C_1+C_2 \text{ (второе множество).}$$

Всякая функция второго множества содержится в первом множестве, достаточно положить $C=C_1+C_2$; обратно, каждая функция первого множества содержится во втором, ибо при любом заданном C уравнение $C_1+C_2=C$ имеет бесконечное множество решений относительно C_1 и C_2.

§ 108. Непосредственное интегрирование

В некоторых случаях удается найти примитивную от элементарной функции непосредственно на основании формул, производных от элементарных функций, например:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \text{так как } (-\cos x)' = \sin x;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C, \quad \text{так как } (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{x^2+1};$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \quad \text{так как } (\ln|x-a|)' = \frac{1}{x-a} \quad (x \neq a)$$

Во многих случаях отыскание примитивной путем попытки восстановить операцию дифференцирования в обратном порядке не представляет больших затруднений. Так, например, не представляет труда отыскание примитивной e^{2x}:

$$\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = \frac{(e^{2x})'}{2} = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}.$$

В этом примере легко догадаться, что нужно помножить и разделить на 2 заданную функцию e^{2x}, чтобы получить

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Необходимо запомнить следующую таблицу основных интегралов; *каждая из формул таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения соответствующей подинтегральной функции.*

1. $\int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & (n \neq -1); \\ \ln|x| + C & (n = -1). \end{cases}$
2. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C.$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

(В справедливости последних четырех формул предлагаем убедиться проверкой.) Интегралы, помещенные в этой таблице, будем называть табличными. Непосредственное интегрирование заключается в нахождении примитивной путем попытки восстановить действие дифференцирования в обратном порядке, зная результат этого действия. *Никаких общих правил непосред-*

ственного интегрирования указать невозможно. Успешное применение этого метода зависит от опыта.

Примеры.

1. Если подинтегральная функция может быть представлена в виде дроби $\frac{f'(x)}{f(x)}$, то $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$,

ибо

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Так, например:

a)

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a|+C;$$

b)

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{-\sin x}{-\cos x}\,dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|+C;$$

c)

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

2. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx;$$

подинтегральную функцию можно представить в виде:

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

Приняв во внимание равенство

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$

получим:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}+C.$$

3. Аналогично найдем:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)'\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

4. Рассмотрим интеграл вида

$$\int f(kx+b)\,dx.$$

Если $F(x)$ — примитивная относительно (x), то

$$\left[\frac{1}{k}F(kx+b)\right]' = F'(kx+b) = f(kx+b);$$

следовательно,

$$\int f(kx+b)\,dx=\frac{F(kx+b)}{k}+C.$$

Например,

$$\int \sin 2x\,dx=-\frac{\cos 2x}{2}+C;$$

$$\int e^{3x+1}\,dx=\frac{e^{3x+1}}{3}+C.$$

5.

$$\int e^{x^2}x\,dx=\int \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2)'\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

6.

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx=\int 2\sin\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\int 2\sin\sqrt{x}\,(\sqrt{x})'\,dx=-2\cos\sqrt{x}+C$$

7.

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4}=\int \frac{1}{2}\,\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^2+C.$$

§ 109. Интегрирование методом разложения

Теорема. *Если функции* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, *рассматриваемые совместно в одном и том же промежутке, имеют* (*каждая*) *примитивную в этом промежутке, то*

$$\int [k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\ldots+k_nf_n(x)]\,dx=$$

$$=k_1\int f_1(x)\,dx+k_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+k_n\int f_n(x)\,dx,$$

где k_1, k_2, ..., k_n — *некоторые действительные числа, причем хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля.*

В самом деле, пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ — примитивные функции относительно функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)\quad\text{(соответственно).}$$

Линейная комбинация примитивных

$$F(x)=k_1F_1(x)+k_2F_2(x)+\ldots+k_nF_n(x)$$

имеет производную, равную

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\ldots+k_nf_n(x);$$

значит,

$$\int [k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\ldots+k_nf_n(x)]\,dx=F(x)+C \qquad (1)$$

(где C — произвольное действительное число).

С другой стороны, умножив обе части каждого из равенств

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1;$$

$$\int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int f_n(x)\,dx = F_n(x) + C_n$$

соответственно на

$$k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n$$

и сложив, получим:

$$k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \dots + k_n\int f_n(x)\,dx =$$

$$= F(x) + k_1C_1 + k_2C_2 + \dots + k_nC_n \qquad (2)$$

(где $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ — произвольные действительные числа). Всякая функция вида (2) есть вместе с тем функция вида (1), так как достаточно положить

$$C = k_1C_1 + k_2C_2 + \dots + k_nC_n.$$

Всякая функция вида (1) есть функция вида (2), ибо при любом заданном C уравнение

$$k_1C_1 + k_2C_2 + \dots + k_nC_n = C$$

имеет решение (вообще говоря, бесконечное множество) относительно $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$. Отсюда вытекает, что множества функций вида (1) и вида (2) состоят из одних и тех же функций, ч. т. д.

В частности, имеем:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]\,dx =$$

$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \dots + \int f_n(x)\,dx$$

(интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых) и

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

(числовой множитель можно выносить за знак интеграла). Интегрирование методом разложения заключается в представлении подинтегральной функции в виде суммы так, чтобы примитивная от каждого слагаемого находилась путем уже установленных примеров.

Примеры.

1. $\int (a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)\,dx=a_0\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_1\frac{x^n}{n}+\ldots+a_nx+C.$

2. $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=$
$=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$

3. $\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=$
$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

4. $\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}=\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\operatorname{arc\,tg}x+C.$

Применим метод разложения к следующему табличному интегралу:

5. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{dx}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\int\frac{(a+x)+(a-x)}{(x-a)(x+a)}\,dx=$
$=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=$
$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

§ 110. Интегрирование методом подстановки

Пусть $x=\varphi(t)$ — монотонная функция, дифференцируемая в промежутке $<\alpha, \beta>$ и отображающая этот промежуток на промежуток, в котором рассматривается функция $f(x)$. Предположим, что $\varphi'(t)\neq 0$. Обозначим через $t=\bar{\varphi}(x)$ функцию, обратную относительно $\varphi(t)$.

Теорема. *Если $\Phi(t)$ есть примитивная относительно функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, то функция $F(x)=\Phi(\bar{\varphi}(x))$ есть примитивная относительно $f(x)$.*

Доказательство. Имеем:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{dx}=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x)\ *.$$

Отсюда ***правило.*** *Если известен интеграл*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\Phi(t)+C,\ \text{то}\ \int f(x)\,dx=\Phi(\bar{\varphi}(x))+C.$$

---

* Если $f(x)$ непрерывна и $\varphi'(t)$ обращается в нуль в отдельных точках, то равенство $F'(x)=f(x)$ сохраняется. В самом деле, пусть $\varphi'(t_0)=0$, тогда при $t\neq t_0$ в соответствующих точках $F'(x)=f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}F'(x)=f(x_0)$.

В силу теоремы § 88, имеем:

$$\lim_{x\to x_0}F'(x)=F'(x_0)=f(x_0).$$

Это правило записывают в виде равенства:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Интеграл, находящийся в правой части равенства (1), может оказаться известным; вычислив его и заменив t через x, $t=\overline{\varphi}(x)$ [где $\overline{\varphi}$ — обратная функция относительно $\varphi(t)$], мы найдем искомый интеграл: $\int f(x)\,dx$. Формула (1) удобна для запоминания; в самом деле, чтобы получить правую часть, достаточно в данном интеграле подставить $x=\varphi(t)$, и $dx=\varphi'(t)\,dt$.

Примеры.

1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Положим $x=\sin t$, $t=\arcsin x$, где $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, откуда

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int \cos^2 t\,dt=\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C.$$

Итак,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C.$$

2. $\int \frac{dx}{\sin x}$. Положим $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x=2\operatorname{arc\,tg} t$ (где $-\pi<x<\pi$). Имеем:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ (где $0<x<+\infty$). Положим $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

§ 111. Интегрирование по частям

Рассмотрим дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Воспользовавшись известным тождеством

$$(uv)'=u'v+uv',$$

находим:

$$uv'=(uv)'-u'v,$$

откуда

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int vu'\,dx,$$

или, что то же,

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx \qquad (1)$$

(константы входят в интегралы).

Эта формула используется следующим образом: данную подинтегральную функцию представляют как произведение двух сомножителей u и v'; может случиться, что функция $u'v$, равная произведению производной первого из сомножителей на примитивную другого, такова, что ее интеграл вычислится известным методом. Рассмотрим, например,

$$\int xe^x\,dx; \text{ положим } xe^x = uv',$$

где $u = x$, $k' = e^x$, тогда $u' = 1$ и $v = e^x$.
Значит,

$$u'v = e^x \text{ и } \int u'v\,dx = \int e^x\,dx = e^x.$$

Итак, по формуле (1) имеем:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Обычно формулу (1) записывают так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

ибо $u'\,dx = du$ и $v'\,dx = dv$, а вычисления располагают в таком порядке:

$$u = x,\ dv = e^x\,dx,\ du = dx,\ v = e^x,$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C$$

(см. предыдущий пример).

Примеры.

1. $\int x \sin x\,dx$. Положим

$$u = x,\ dv = \sin x\,dx,\ du = dx,\ v = -\cos x.$$

Получим:

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int (-\cos x)\, dx = \sin x - x\cos x + C.$$

2. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$. Положим

$$u = \ln x,\ dv = \frac{dx}{x^2},\ du = \frac{dx}{x},\ v = -\frac{1}{x}.$$

Значит,

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x + C.$$

3. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$. Положим

$$u = \operatorname{arc\,tg} x,\ dv = dx,\ du = \frac{dx}{x^2+1},\ v = x.$$

Получим:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\, dx}{x^2+1} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Очевидно, какой из множителей подинтегрального выражения обозначить через u и какой через dv, с точки зрения практики вычислений не безразлично. В самом деле, если в примере $\int x \sin x\, dx$ положить

$$u = \sin x \text{ и } dv = x\, dx,\ du = \cos x\, dx \text{ и } v = \frac{x^2}{2},$$

то получим:

$$\int x \sin x\, dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx.$$

Мы свели вычисление данного интеграла к вычислению более сложного.

Примечание I. Иногда приходится применять формулу интегрирования по частям последовательно несколько раз.

Пример.

$$\int x^3 e^{2x}\, dx.$$

$$u = x^3,\ dv = e^{2x}\, dx,\ du = 3x^2\, dx,\ v = \frac{e^{2x}}{2}.$$

$$\int x^3 e^{2x}\, dx = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\, dx.$$

Вычисляем $\int x^2 e^{2x}\, dx$ тем же методом:

$$u = x^2,\ dv = e^{2x}\, dx,\ du = 2x\, dx,\ v = \frac{e^{2x}}{2},$$

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x}\, dx.$$

Вычисляем, наконец, $\int xe^{2x}\,dx$:

$$u=x,\ dv=e^{2x}\,dx,\ du=dx,\ v=\frac{e^{2x}}{2},$$

$$\int xe^{2x}\,dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C=\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C.$$

Итак,

$$\int x^3e^{2x}\,dx=\frac{x^3e^{2x}}{2}-\frac{3}{2}\left[\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)\right]+C=$$

$$=\frac{e^{2x}}{8}[4x^3-6x^2+6x-3]+C.$$

Примечание II. В некоторых случаях вычисление интегралов с помощью формулы интегрирования по частям приведет к уравнению относительно искомого интеграла, из которого этот интеграл и определится.

Примеры.

1. $\int \sin^2 x\,dx=\int \sin x\cdot\sin x\,dx.$

Положим

$$u=\sin x,\ dv=\sin x\,dx,\ du=\cos x\,dx,\ v=-\cos x.$$

Получим:

$$\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int \cos^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int (1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=-\sin x\cos x+x-\int \sin^2 x\,dx.$$

Итак:

$$2\int \sin^2 x\,dx=x-\sin x\cos x+C.$$

Значит,

$$\int \sin^2 x\,dx=\frac{x-\sin x\cos x}{2}+C$$

$\left(\text{вместо } \frac{C}{2} \text{ можно снова писать } C\right)$.

2. Вычислим интегралы:

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{и} \quad I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Вычисляем I_1; положим $u=e^{ax}$, $dv=\cos bx\,dx$, $du=ae^{ax}\,dx$, $v=\frac{\sin bx}{b}$

$$I_1=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{b}(e^{ax}\sin bx-aI_2).$$

Если положим

$$u=\cos bx \text{ и } dv=e^{ax}\,dx,\ du=-b\sin bx\,dx \text{ и } v=\frac{e^{ax}}{a},$$

то

$$I_1=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx+bI_2).$$

Итак,

$$I_1 b+aI_2=e^{ax}\sin bx;$$
$$I_1 a-bI_2=e^{ax}\cos bx.$$

Отсюда

$$I_1=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C;$$
$$I_2=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

§ 112. Интегрирование в конечном виде

Во всех приведенных выше примерах мы рассматривали нахождение интеграла от функций, заданных формулой. «Вычисление» интеграла считалось законченным, если удавалось найти выражение примитивной при помощи формулы, содержащей операции элементарной математики.

При вычислении интеграла мы стараемся свести с помощью рассмотренных методов этот интеграл к табличному. Может, однако, случиться, что такие приемы не приведут к успеху. Причина этого может заключаться либо в несовершенстве применяемых методов, либо в том, что выразить интеграл при помощи формулы невозможно. Например, «вычислить» $\int e^{-x^2}dx$ невозможно, какими бы мы приемами ни пользовались, а между тем функция e^{-x^2} непрерывна и, следовательно (см. § 137), примитивная ее существует. Для лучшего уяснения положения вещей мы прибегаем к такой аналогии. Предположим, что мы ограничиваемся изучением лишь рациональных функций. Производная рациональной функции есть рациональная функция, но не всегда примитивная относительно рациональной функции есть рациональная функция. Таковы, например, примитивные относительно функций $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{2x}{x^2+1}$ и т. д. Оперируя исключительно с рациональными функциями, интегралы $\int\frac{dx}{x}$; $\int\frac{dx}{x^2+1}$ невозможно «вычислить», т. е. представить их в виде рациональных функций. Для представления этих интегралов нужно выйти за пределы множества рациональных функций и ввести функции трансцендентные: $\ln x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Подобным же образом примитивная функция от элементарной функции не всегда является элементарной функцией. Если примитивная от элементарной функции $f(x)$ не является элементарной, то говорят, что $\int f(x)\,dx$ не выражается в конечном виде.

Вопрос о том, что не «вычисляется» данный интеграл в силу несовершенства применяемых методов или в силу того, что он не выражается в конечном виде, остается открытым, так как не существует общих признаков, на основании которых можно судить о том, выражается ли данный интеграл в конечном виде или нет. Эта проблема решена пока что лишь для отдельных типов интегралов. Известно, например, что интегралы $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ в конечном виде не выражаются, равно как и интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^5+1}}.$$

В настоящей главе мы будем рассматривать интегралы, выражающиеся в конечном виде.

§ 113. Интегрирование простейших рациональных функций

Интеграл от полинома.

Если функция $f(x)$ есть полином

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

то

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)\,dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \ldots + a_nx + C.$$

Нет необходимости всякую целую рациональную функцию представлять в виде полинома, прежде чем приступить к интегрированию. Например,

$$\int (x-2)^3\,dx = \frac{(x-2)^4}{4} + C.$$

Подобным же образом интеграл $\int (x^2+1)^3 x\,dx$ вычисляется непосредственно; в самом деле:

$$\int (x^2+1)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^3 (x^2+1)'\,dx = \frac{(x^2+1)^4}{8} + C.$$

Интегралы от дробей вида $\frac{1}{(x-a)^n}$ и $\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^n}$, где n — натуральное число.

1° Интегралы

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$$

находятся непосредственно.

2° Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ находятся преобразованием квадратного трехчлена:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

В таком случае

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int \frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}.$$

Делаем подстановку:

$$x+\frac{b}{2a}=z,\ dx=dz;$$

получим:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int \frac{dz}{az^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}=\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Если $b^2-4ac>0$ (корни трехчлена ax^2+bx+c — действительные и различные), то

$$\frac{4ac-b^2}{4a^2}<0$$

и

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Этот интеграл вычисляется по формуле (11) таблицы основных интегралов.

Если $b^2-4ac<0$ (корни трехчлена ax^2+bx+c — мнимые), то

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}};$$

последний интеграл вычисляется по формуле (9) таблицы основных интегралов.

Если $b^2-4ac=0$, то

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{az}=-\frac{2}{(2ax+b)}+C.$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{dx}{x^2-2x}=\int \frac{dx}{(x-1)^2-1}=\int \frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C \quad (\text{подстановка } z=x-1).$$

2

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1}=\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$\left(\text{подстановка } z=x-\frac{1}{2}\right).$$

3° Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$.

Подстановкой $x+\frac{b}{2a}=z$ трехчлен ax^2+bx+c преобразуется в $az^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$; значит,

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{mz-\frac{mb}{2a}+n}{az^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}dz=$$

$$=\frac{m}{2a}\int \frac{2z\,dz}{z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}+\frac{2an-mb}{2a^2}\int \frac{dz}{z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Первый из этих интегралов равен:

$$\frac{m}{2a}\ln\left|z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|+C=\frac{m}{2a}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|+C=$$

$$=\frac{m}{2a}\ln\left|\frac{ax^2+bx+c}{a}\right|+C.$$

Второй интеграл нами рассмотрен раньше; он выражается через арктангенс или через логарифм.

Пример.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+6{,}5}=\int \frac{x\,dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}}=\int \frac{z+\frac{3}{2}}{z^2+\frac{17}{4}}dz=$$

$$=\int \frac{z\,dz}{z^2+\frac{17}{4}}+\frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2+\frac{17}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left(z^2+\frac{17}{4}\right)+$$

$$+\frac{3}{2\sqrt{\frac{17}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{\frac{17}{4}}}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+6{,}5)+$$

$$+\frac{3}{\sqrt{17}}\operatorname{ar\,ctg}\frac{2x-3}{\sqrt{17}}+C.$$

4° Интегралы вида $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, $\int\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^n}dx$

(n — натуральное число, большее 1).

Покажем сначала, как вычисляется $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ и $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$. Выкладки будем проводить сразу по отношению к обоим интегралам:

$$\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^n}=\pm\frac{1}{a^2}\int\frac{\mp a^2\,dx}{(x^2\pm a^2)^n}=\pm\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\pm a^2-x^2}{(x^2\pm a^2)^n}dx=$$

$$=\pm\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{n-1}}-\int\frac{x^2\,dx}{(x^2\pm a^2)^n}\right].$$

К интегралу $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2\pm a^2)^n}$ применим формулу интегрирования по частям, положив

$$u=x;\quad dv=\frac{x\,dx}{(x^2\pm a^2)^n},$$

тогда

$$du=dx,\quad v=-\frac{1}{2(n-1)(x^2\pm a^2)^{n-1}}.$$

Значит,

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2\pm a^2)^n}=-\frac{x}{2(n-1)(x^2\pm a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{n-1}}.$$

Итак,

$$\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^n}=\pm\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{n-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{2(n-1)(x^2\pm a^2)^{n-1}}\right]. \qquad (1)$$

Обозначим $\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^n}=I_n$; тогда

$$\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{n-1}}=I_{n-1}.$$

Значит, формула (1) перепишется так:

$$I_n=\pm\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}-\frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2(n-1)(x^2\pm a^2)^{n-1}}\right],$$

или:

$$I_n = \pm \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2 \pm a^2)^{n-1}}\right]. \qquad (2)$$

Рекуррентная формула (2) показывает, что вычисление I_n сводится к вычислению I_{n-1}. Применяя эту формулу к вычислению I_{n-1} (заменяем в этой формуле n на $n-1$), сведем вычисление I_{n-1} к вычислению I_{n-2} и т. д. Повторив эту операцию $n-1$ раз, мы сведем вычисление I_n к I_1.

Но $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$ есть табличный интеграл (формулы 9 и 11). Интеграл $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ сведется к I_n подстановкой

$$x + \frac{b}{2a} = z, \quad \text{а} \quad \int \frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

той же подстановкой преобразуется в такой интеграл:

$$\int \frac{m\left(z-\frac{b}{2a}\right)+n}{\left(az^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\right)^n}\,dz = \int \frac{mz+n-\frac{mb}{2a}}{a^n\left(z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}\,dz =$$

$$= \frac{m}{a^n}\int \frac{z\,dz}{\left(z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n} + \frac{2an-mb}{2a^{n+1}}\int \frac{dz}{\left(z^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется подстановкой

$$z^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} = t;$$

второй интеграл вычисляется с помощью формулы (2).

Примеры.

1. $$I_3 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Применяя рекуррентную формулу, получим;

$$I_3 = \left[\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2\right];$$

$$I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} I_1;$$

$$I_1 = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

2.

$$I = \int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx = \int \frac{3x+2}{\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\,dx.$$

Положив

$$x-\frac{3}{2}=t,$$

получим:

$$I=\int\frac{3t+\frac{13}{2}}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt=3\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{13}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{13}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

Применив рекуррентную формулу, получим:

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{4}{3}\left[\frac{t}{2\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\right]+C,$$

откуда

$$I=-\frac{3}{2\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{13t}{3\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C.$$

Заменив t через $x-\frac{3}{2}$, получим окончательно:

$$I=\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 114. Разложение рациональной функции в сумму элементарных дробей

Как известно, если степень полинома $P(x)$ меньше степени $Q(x)$, то рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной, в противном случае — неправильной. Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы правильной дроби и полинома. В самом деле, пусть степень $P(x)$ равна m, а степень $Q(x)$ равна n, причем $m\geqslant n$. Делим $P(x)$ на $Q(x)$, частное обозначим через $U(x)$, а остаток через $R(x)$. Очевидно, $U(x)$ есть полином, равно как и $R(x)$, причем степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Из тождества

$$P(x)=U(x)\,Q(x)+R(x)$$

имеем:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{Q(x)}+U(x),$$

где $\frac{R(x)}{Q(x)}$ есть правильная рациональная дробь, а $U(x)$ — полином.

Сумма правильных рациональных дробей есть правильная рациональная дробь. Поставим обратную задачу: *представить правильную рациональную дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *в виде суммы правильных рациональных дробей, знаменатели которых суть многочлены степени, меньшей, чем* $Q(x)$, *и имеют по возможности наиболее простой вид*. Например, рациональная дробь $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ может быть представлена в таком виде:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

Лемма 1°. *Правильная рациональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где*

$$Q(x) = (x-a)^n Q_1(x)$$

и многочлен $Q_1(x)$ *не делится на* $(x-a)$, *может быть представлена единственным образом в виде суммы двух правильных дробей*

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{n-1}Q_1(x)},$$

где A *— константа, а* $P_1(x)$ *и* $Q_1(x)$ *— многочлены.*

Доказательство. Преобразуем разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^n},$$

где A *— произвольная константа*, следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{AQ_1(x)}{(x-a)^n Q_1(x)} = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^n Q_1(x)}.$$

Выберем число A так, чтобы полином $P(x) - AQ_1(x)$ делился на $x-a$, т. е. чтобы имело место тождество:

$$P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x),$$

где $P_1(x)$ есть полином. Условие делимости полинома

$$P(x) - AQ_1(x) \quad \text{на} \quad x-a$$

(необходимое и достаточное) заключается в том, что

$$P(a) - AQ_1(a) = 0.$$

Значит, единственно возможное значение A есть $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$.

Заметим, что $Q_1(a) \neq 0$, так как $Q_1(x)$ не делится на $x-a$. Итак, $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ и $\frac{P(x)}{Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{P_1(x)}{(x-a)^{n-1} \cdot Q_1(x)}$. Значит,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{P(a)}{Q_1(a)}}{(x-a)^n} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{n-1}Q_1(x)}.$$

Полином $P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x)$ имеет степень ниже, чем $Q(x)$, значит, дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{n-1}\cdot Q_1(x)}$ правильная, ч. т. д.

Следствие. Если

$$Q(x) = (x-a)^n Q_1(x),$$

то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}, \qquad (1)$$

где A_1, A_2 ... A_n — некоторые действительные числа, а дробь $\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}$ — правильная.

В самом деле, применив n раз лемму 1°, имеем:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{n-1}Q_1(x)};$$

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{n-1}Q_1(x)} = \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^{n-2}Q_1(x)};$$

. . . . . .

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}.$$

Сложив эти равенства и упростив, получим тождество (1).

Так как мы пользовались леммой 1°, то представление дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде суммы дробей по формуле (1) е д и н с т в е н н о, а дробь $\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}$ — п р а в и л ь н а я.

Лемма 2°. *Правильная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где*

$$Q(x) = (x^2+px+q)^n Q_1(x),$$

квадратный трехчлен x^2+px+q *имеет мнимые корни и* $Q_1(x)$ *не делится на* x^2+px+q, *может быть представлена единственным образом в виде суммы правильных дробей:*

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\cdot Q_1(x)},$$

где A *и* B — *некоторые константы,* $P_1(x)$, $Q_1(x)$ — *некоторые многочлены.*

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

где A и B — произвольные константы.

Имеем:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{(Ax+B)\,Q_1 x}{(x^2+px+q)^n\,Q_1(x)} =$$

$$= \frac{P(x)-(Ax+B)\,Q_1(x)}{(x^2+px+q)^n\,Q_1(x)} = \frac{\dfrac{P(x)-(Ax+B)\,Q_1(x)}{x^2+px+q}}{(x^2+px+q)^{n-1}\cdot Q_1(x)}.$$

Докажем, что можно приписать константам A и B такие значения, что полином $P(x)-(Ax+B)\,Q_1(x)$ разделится на x^2+px+q. Обозначим частное от деления $P(x)$ на x^2+px+q через $S_1(x)$ и остаток через $\alpha x+\beta$; частное от деления $Q_1(x)$ на x^2+px+q обозначим через $S_2(x)$ и остаток через $\gamma x+\sigma$. В силу того, что коэффициенты полиномов $P(x)$, $Q_1(x)$ и x^2+px+q — числа действительные, α, β, γ, δ — также действительные числа. Таким образом,

$$\frac{P(x)-(Ax+B)\,Q_1(x)}{x^2+px+q} = \frac{P(x)}{x^2+px+q} - \frac{(Ax+B)\,Q_1(x)}{x^2+px+q} =$$

$$= S_1(x) - (Ax+B)\,S_2(x) + \frac{\alpha x+\beta-(Ax+B)(\gamma x+\delta)}{x^2+px+q} =$$

$$= S_1(x) - (Ax+B)\,S_2(x) + \frac{-A\gamma x^2+(\alpha-B\gamma-A\delta)\,x+\beta-B\delta}{x^2+px+q}.$$

Произведем деление с остатком полиномов:

$$\begin{array}{l|l} -A\gamma x^2+(\alpha-B\gamma-A\delta)\,x+\beta-B\delta & x^2+px+q \\ \hline \quad -A\gamma x^2 \quad -Ap\gamma x \quad -Aq\gamma & -A\gamma \\ \hline (\alpha+Ap\gamma-B\gamma-A\delta)\,x+Aq\gamma+\beta-B\delta & \end{array}.$$

Для делимости полинома $P(x)-(Ax+B)\,Q_1(x)$ на x^2+px+q необходимо и достаточно, чтобы полином

$$(\alpha+Ap\gamma-B\gamma-A\delta)\,x+Aq\gamma+\beta-B\delta$$

равнялся нулю при любом x. Для этого необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю коэффициент при x и свободный член:

$$\left.\begin{aligned} \alpha+Ap\gamma-B\gamma-A\delta&=0\\ Aq\gamma+\beta-B\delta&=0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} A(p\gamma-\delta)-B\gamma+\alpha&=0\\ Aq\gamma\qquad\quad -B\delta+\beta&=0 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Эта система совместна и имеет единственное решение относительно A и B, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} p\gamma-\delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix} = -p\gamma\delta+\delta^2+q\gamma^2 \neq 0.$$

Докажем, что $\Delta \neq 0$. Предположим, что

$$-p\gamma\delta + \delta^2 + q\gamma^2 = 0. \tag{3}$$

Число γ равным нулю быть не может, так как в этом случае и $\delta = 0$, а это означало бы, что $Q_1(x)$ делится на $x^2 + px + q$. Значит, $\gamma \neq 0$. Уравнение $z^2 + pz + q = 0$ имеет мнимые корни, но, с другой стороны, оно имеет действительный корень $-\frac{\delta}{\gamma}$ в силу равенства (3), и мы получили противоречие. Значит, система (2) имеет единственное решение. Числа A и B, удовлетворяющие этой системе, таковы, что $P(x) - (Ax + B) Q_1(x)$ делится на $x^2 + px + q$. Обозначим частное от деления через $P_1(x)$.

Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} = \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} Q_1(x)}$$

или

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} \cdot Q_1(x)}.$$

Степень полинома $P(x) - (Ax + B) Q_1(x)$ меньше степени $Q(x)$, которую обозначим через k; значит, степень полинома

$$P_1(x) = \frac{P(x) - (Ax+B) Q_1(x)}{x^2+px+q}$$

меньше $k-2$. Степень полинома $(x^2 + px + q)^{n-1} Q_1(x)$ равна $k-2$. Значит, дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} Q_1(x)}$ правильная, ч. т. д.

Следствие. Если

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^n Q_1(x),$$

то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n x + B_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{A_{n-1}x + B_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1 x + B_1}{x^2+px+q} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}, \tag{4}$$

где A_i и B_i — некоторые действительные числа. В самом деле, применяем лемму 2°:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n x + B_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} Q_1(x)};$$

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} Q_1(x)} = \frac{A_{n-1}x + B_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{n-2} Q_1(x)};$$

. . . . . .

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+px+q) Q_1(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+px+q} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}.$$

Сложив эти равенства, получим формулу (4).

Числа A_i и B_i определяются единственным образом, причем дробь $\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}$ правильная.

Определение. *Дроби вида*

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ и } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

где A, B и C — действительные числа, n и m — натуральные числа и трехчлен x^2+px+q имеет мнимые корни, называют элементарными дробями.

Теорема. *Если знаменатель правильной несократимой дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представлен в виде следующего произведения:*

$$Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-c)^\nu (x^2+px+q)^\lambda \times$$
$$\times (x^2+rx+s)^\mu \ldots (x^2+ux+v)^\nu,$$

где α, β, ..., γ, λ, μ, ..., ν — натуральные числа, а квадратные трехчлены имеют мнимые корни, то дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы элементарных дробей.

Доказательство. Предположим, что среди трехчленов x^2+px+q, x^2+rx+s, ..., x^2+ux+v и двучленов $x-a$, $x-b$, ..., $x-c$ нет тождественно равных. Пусть число двучленов равно k, а трехчленов l.

Обозначим

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{(x-a)^\alpha}.$$

Тогда, в силу следствия из леммы 1*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Обозначим

$$\frac{Q_1(x)}{(x-b)^\beta} = Q_2(x).$$

Тогда, в силу следствия из той же леммы, имеем:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{(x-b)^\beta Q_2(x)} = \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

и т. д.

Наконец,

$$\frac{P_{k-1}(x)}{Q_{k-1}(x)} = \frac{P_{k-1}(x)}{(x-c)^{\nu} Q_k(x)} =$$

$$= \frac{C_{\nu}}{(x-c)^{\nu}} + \frac{C_{\nu-1}}{(x-c)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{C_1}{x-c} + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)},$$

где

$$Q_k(x) = (x^2+px+q)^{\lambda}(x^2+rx+s)^{\mu} \ldots (x^2+ux+v)^{\nu}.$$

Обозначим

$$\frac{Q_k(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}} = Q_{k+1}(x).$$

Тогда, в силу следствия из леммы 2°, имеем:

$$\frac{P_k(x)}{Q_k(x)} = \frac{P_k(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda} Q_{k+1}(x)} = \frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}} +$$

$$+ \frac{M_{\lambda-1}x+N_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{M_1x+N_1x}{x^2+px+q} + \frac{P_{k+1}(x)}{Q_{k+1}(x)}.$$

Обозначим

$$\frac{Q_{k+1}(x)}{(x^2+rx+s)^{\mu}} = Q_{k+2}(x).$$

В силу следствия из той же леммы:

$$\frac{P_{k+1}(x)}{Q_{k+1}(x)} = \frac{P_{k+1}(x)}{(x^2+rx+s)^{\mu} Q_{k+2}(x)} = \frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+rx+s)^{\mu}} +$$

$$+ \frac{R_{\mu-1}x+S_{\mu-1}}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{P_{k+2}(x)}{Q_{k+2}(x)},$$

и т. д.

Наконец,

$$\frac{P_{k+l-1}(x)}{Q_{k+l-1}(x)} = \frac{P_{k+l-1}(x)}{(x^2+ux+v)^{\nu}} = \frac{U_{\nu}x+V_{\nu}}{(x^2+ux+v)^{\nu}} +$$

$$+ \frac{U_{\nu-1}x+V_{\nu-1}}{(x^2+ux+v)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{U_1x+V_1}{x^2+ux+v}.$$

Сложив почленно все написанные выше равенства, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \\
& + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{C_\gamma}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_{\gamma-1}}{(x-c)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_1}{x-c} + \\
& + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{M_{\lambda-1}x+N_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \\
& + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu} + \frac{R_{\mu-1}x+S_{\mu-1}}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{R_1 x + S_1}{x^2+rx+s} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{U_\nu x + V_\nu}{(x^2+ux+v)^\nu} + \frac{U_{\nu-1}x+V_{\nu-1}}{(x^2+ux+v)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{U_1 x + V_1}{x^2+ux+v},
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ч. т. д.

Это разложение, как показано при доказательстве лемм 1° и 2°, единственное. Теперь остановимся на способах отыскания коэффициентов A_i, B_i, C_i, M_i, N_i и т. д. Эти коэффициенты могут быть вычислены тем способом, который был указан при доказательстве лемм 1° и 2°. На практике для отыскания чисел A_i, B_i, ..., M_i, N_i и т. д. обычно используется метод неопределенных коэффициентов, заключающийся в следующем: в результате сложения дробей в правой части формулы (5) в числителе получится некоторый многочлен $R(x)$. В знаменателе получим $Q(x)$; так как в левой части имеем $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то отсюда следует, что $P(x) = R(x)$ тождественно *.

---

* Мы не можем непосредственно утверждать, что $P(a) = R(a)$, $P(b) = R(b)$, $P(c) = R(c)$, так как при $x = a, b, \ldots, c$ формула (5) не имеет смысла; $Q(a) = 0$, $Q(b) = 0$, ..., $Q(c) = 0$, но в любой окрестности, например точки a, формула имеет смысл, если $x \neq a$, а равенство $P(x) = R(x)$ есть тождество в достаточно малой окрестности точки a, $(x \neq a)$.
Значит,

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim R(x).$$

В силу непрерывности многочленов,

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} R(x) = R(a).$$

Значит,

$$P(a) = R(a), \ \ldots, \ P(c) = R(c),$$

и, следовательно, равенство $P(x) = R(x)$ есть тождество.

Пусть n — степень полинома $Q(x)$, тогда $n=\alpha+\beta+\ldots+\gamma+2(\lambda+\mu+\ldots+\nu)$, число неизвестных A_i, B_i, C_i, U_i, V_i входящих в коэффициенты $R(x)$, также равно $\alpha+\beta+\ldots+\gamma+2(\lambda+\mu+\ldots+\nu)=n$. Коэффициенты $R(x)$ суть линейные функции искомых коэффициентов. Степень полинома $P(x)$ не превышает $n-1$, а число его коэффициентов вместе со свободным членом не превышает n; мы можем всегда считать, что степень полинома $P(x)$ равна $n-1$, добавив в случае надобности члены с коэффициентами, равными нулю. Так как имеет место тождество $P(x)=R(x)$, то коэффициенты многочленов $P(x)$ и $R(x)$ при одинаковых степенях x равны.

Сравнивая коэффициенты полиномов $P(x)$ и $R(x)$, мы получим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$A_i,\ B_i,\ \ldots,\ M_i,\ N_i,\ \ldots,\ U_i,\ V_i. \tag{6}$$

Эта система совместна, так как числа (6) существуют, и имеет единственное решение, ибо представление дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ по формуле (5) существует единственное.

Примеры.

1. $$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=$$
$$=\frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}.$$

Следовательно,

$$1=(A+B)x+(A-B),$$

откуда

$$A+B=0,\ A-B=1.$$

Решив эту систему, находим:

$$A=\frac{1}{2};\ B=-\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

2. $$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}=$$
$$=\frac{A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx}{x(x-1)^3},$$

откуда

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx,$$

или

$$x^3+1=(A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2+(3A+B-C+D)x-A.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A+B &=1,\\ -3A-2B+C &=0,\\ 3A+B-C+D &=0,\\ -A &=1. \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем:

$$A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=2.$$

Следовательно,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

3.

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}=\frac{x}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)}=$$
$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

откуда

$$x=A(x+3)(x^2+2x+2)+B(x-1)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)(x+3).$$

или

$$x=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+(8A-3C+2D)x+(6A-2B-3D).$$

Значит,

$$\begin{aligned} A+\ B+\ C\ \ \ \ &=0,\\ 5A+\ B+2C+\ D&=0,\\ 8A\ \ \ \ -3C+2D&=1,\\ 6A-2B\ \ \ \ -3D&=0, \end{aligned}$$

отсюда

$$A=\frac{1}{20},\ B=\frac{3}{20},\ C=-\frac{1}{5},\ D=0.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}=\frac{1}{20(x-1)}+\frac{3}{20(x+3)}-\frac{x}{5(x^2+2x+2)}.$$

Нахождение числителей элементарных дробей может быть упрощено, если принять во внимание следующее замечание. Равенство $P(x)=R(x)$ есть тождество, в нем можно букве x придавать любое числовое значение. Эти значения можно выбирать с тем расчетом, чтобы получить по возможности более простые уравнения для определения искомых коэффициентов $A_i, B_i, \ldots$ $\ldots, M_i, N_i$, и т. д. В случае, если в знаменатель правильной дроби входят только множители первой степени с показателями степени, равными 1, т. е. если $Q(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-c)$, то вычисление числителей дробей значительно упрощается; в этом случае:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{x-c}=$$

$$= \frac{A(x-b)\ldots(x-c)+B(x-a)\ldots(x-c)+\ldots+C(x-a)(x-b)\ldots}{(x-a)(x-b)\ldots(x-c)}.$$

Значит,

$$P(x) = A(x-b)\ldots(x-c)+$$
$$+B(x-a)\ldots(x-c)+\ldots+C(x-a)(x-b)\ldots$$

тождественно.

Положив $x=a$, найдем:

$$P(a) = A(a-b)\ldots(a-c);$$

положив $x=b$, найдем:

$$P(b) = B(b-a)\ldots(b-c),$$

и т. д.; положив $x=c$, найдем:

$$P(c) = C(c-a)(c-b)\ldots$$

Итак,

$$A = \frac{P(a)}{(a-b)\ldots(a-c)},$$

$$B = \frac{P(b)}{(b-a)\ldots(b-c)}, \ldots, C = \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)\ldots}$$

Примеры.

1.

$$\frac{x^3+x}{(x^2-1)(x^2-2)} = \frac{x^3+x}{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} =$$
$$= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-\sqrt{2}}+\frac{D}{x+\sqrt{2}}.$$

Имеем:

$$P(x) = x^3+x.$$

$$A = \frac{P(1)}{(1+1)(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{2}{2(-1)} = -1;$$

$$B = \frac{P(-1)}{(-1-1)(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})} = \frac{-2}{2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = -1;$$

$$C = \frac{P(\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2};$$

$$D = \frac{P(-\sqrt{2})}{(-\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2})} = \frac{-3\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

Значит,

$$\frac{x^3+x}{(x^2-1)(x^2-2)} = \frac{-1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2(x-\sqrt{2})}+\frac{3}{2(x+\sqrt{2})}.$$

2. Обратимся к рассмотренному выше примеру:

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Положив $x=1$, в тождестве

$$x=A(x+3)(x^2+2x+2)+B(x-1)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)(x+3)$$

получим:

$$1=A\cdot 20, \text{ откуда } A=\frac{1}{20};$$

положив $x=-3$, получим:

$$-3=B(-20), \text{ откуда } B=\frac{3}{20};$$

положив $x=0$, получим:

$$0=6A-2B-3D, \text{ откуда } D=0.$$

Приравняв нулю коэффициент при x^3, получим:

$$A+B+C=0, \text{ откуда } C=-\frac{1}{5}.$$

§ 115. Интегрирование рациональных функций

Всякая рациональная функция может быть представлена в виде полинома или рациональной дроби. Так как неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы полинома и правильной дроби, то интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильной дроби и полинома. Разложив знаменатель правильной дроби на множители вида $(x-a)^\alpha$ и $(x^2+px+q)^\lambda$, можно правильную дробь представить в виде суммы элементарных дробей. Таким образом, интегрирование правильной дроби сведется к нахождению рассмотренных выше интегралов от элементарных дробей:

$$\int\frac{dx}{x-a}, \quad \int\frac{dx}{(x-a)^n}, \quad \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$$

и

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx.$$

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь. В высшей алгебре доказывается, что всякий многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами может быть разложен на множители следующим образом:

$$Q(x)=A(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-c)^\nu\cdot(x^2+px+q)^\lambda\ldots(x^2+sx+t)^\mu,$$

где A — действительное число, $a, b, \ldots, c$ — действительные корни уравнения $Q(x)=0$, числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — показатели кратности соответствующих корней, каждый из квадратных трехчленов соответствует паре мнимых сопряженных корней уравнения $Q(x)=0$. Если уравнение $Q(x)=0$ не имеет мнимых корней, то $\lambda=\ldots=\mu=0$; если это уравнение не имеет действительных корней, то $\alpha=\beta=\ldots=\gamma=0$.

Разложение многочлена $Q(x)$ на множители связано с решением уравнения $Q(x)=0$. В высшей алгебре доказывается, что если степень уравнения $Q(x)=0$ выше четырех, то его корни не могут быть в общем случае явно выражены при помощи конечного числа алгебраических действий над коэффициентами этого уравнения. Отсюда вытекает, что если степень многочлена $Q(x)$ выше четырех, то разложение его на множители практически возможно лишь в частных случаях. Даже если степень $Q(x)$ есть 3 или 4, то формула решения уравнения 3-й и 4-й степеней приводит к столь сложным выражениям, что практическая их ценность весьма незначительна. Поэтому мы ограничимся примерами, где знаменатель $Q(x)$ разложен на множители или разлагается элементарными способами.

Примеры.

1.

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx.$$

Как мы видели,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3},$$

значит,

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C=$$

$$=\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

2.

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}\,dx.$$

Как мы видели,

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}=\frac{1}{20(x-1)}+\frac{3}{20(x+3)}-\frac{x}{5(x^2+2x+2)},$$

значит,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}=\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x-1}+$$

$$+\frac{3}{20}\int\frac{dx}{x+3}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{1}{20}\ln|x-1|+$$

$$+\frac{3}{20}\ln|x+3|-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C=$$

$$=\frac{1}{20}\ln|(x-1)(x+3)^3|-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Примечание. Прежде чем приступить к представлению правильной дроби в виде суммы дробей, следует посмотреть, нельзя ли произвести какое-либо упрощение интеграла с помощью подстановки.

Примеры.

1.
$$\int \frac{x}{x^4-1}\,dx.$$

Подстановка $x^2=z$ дает
$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+C.$$

2. $\int \frac{x^{11}}{(x^8+1)^2}\,dx$. Положив $x^4=z$, получим:
$$\frac{1}{4}\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{1}{4}\left(\frac{-z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z\right)+C=$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{-x^4}{x^8+1}+\operatorname{arc\,tg} x^4\right)+C.$$

§ 116. Интегрирование иррациональных функций

Если подинтегральная функция иррациональная, то в некоторых случаях вычисление интеграла можно свести к интегрированию рациональных функций.

А. Подинтегральная функция иррациональна относительно аргумента x, причем подкоренные выражения суть степени линейной функции $ax+b$ с любыми целыми показателями.

Пусть подинтегральная функция содержит корни степени
$$n_1, n_2, \ldots, n_k,$$
подкоренные выражения которых суть целые степени $ax+b$.

Пусть n есть наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$. Обозначим
$$\frac{n}{n_1}=m_1, \frac{n}{n_2}=m_2, \ldots, \frac{n}{n_k}=m_k$$
($m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ суть натуральные числа).

Если сделать подстановку $\sqrt[n]{ax+b}=t$, то все корни, входящие в подинтегральную функцию, окажутся рациональными функциями t. В самом деле, так как $ax+b=t^n$, то
$$\sqrt[n_1]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_1}}=t^{m_1},$$
$$\sqrt[n_2]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_2}}=t^{m_2}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_k}}=t^{m_k}.$$

Значит, $\sqrt[n_i]{(ax+b)^l}=t^{m_i l}$, где l — любое целое число, и, таким образом, всякий из корней, входящих в подинтегральную функ-

цию, есть рациональная функция t; далее,

$$x=\frac{t^n-b}{a} \text{ и } dx=\frac{nt^{n-1}\,dt}{a}.$$

Следовательно, интеграл в результате подстановки будет иметь вид $\int R(t)\,dt$, где $R(t)$ — рациональная функция t.

Пример.

$\int \frac{(x-1)\,dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,x}$. Положим $\sqrt[6]{x}=t$; имеем:

$$x=t^6,\ \sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x^2}=t^4 \text{ и } dx=6t^5\,dt.$$

Произведя подстановку, получим:

$$\int \frac{6(t^6-1)\,t^5\,dt}{(t^3+t^4)\,t^6}=6\int \frac{t^6-1}{t^4(1+t)}\,dt=6\int \frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4}\,dt=$$

$$=6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)+C.$$

Все эти рассуждения остаются в силе, если подкоренное выражение есть дробно-линейная функция аргумента x, т. е. функция вида $\frac{ax+b}{cx+d}$. В самом деле, с помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ корни будут рационально выражены через t, равно как x и dx $\left(\text{из равенства } \frac{ax+b}{cx+d}=t^n \text{ следует, что } x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)$.

В. Подинтегральная функция иррациональна относительно аргумента x и не содержит никаких других радикалов, кроме квадратного корня из квадратного трехчлена. Вычисление интеграла сведется к интегрированию рациональной функции с помощью так называемых подстановок Эйлера.

Обозначим подкоренное выражение через ax^2+bx+c; тогда:

1° Если $a>0$, то полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}=t.$$

2° Если $c\geqslant 0$, то полагаем:

$$\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}=t.$$

3° Если корни α и β квадратного трехчлена действительные числа:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=|x-\alpha|\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}},$$

то полагаем:

$$\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}=t.$$

Покажем, что во всех этих случаях $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x, а следовательно, и dx выражаются рационально через t.

Обратимся к подстановке 1°.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a},$$

отсюда

$$ax^2+bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}+ax^2 \text{ и } x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}.$$

Следовательно, x а значит, и dx, а также и радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$, который равен $t-x\sqrt{a}$, рационально выражаются через t.

Возьмем вторую подстановку:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}.$$

Имеем:

$$ax^2+bx+c=t^2x^2+2tx\sqrt{c}+c,$$

отсюда

$$ax+b=t^2x+2t\sqrt{c} \text{ и } x=\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}.$$

Значит x, радикал

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{2t^2\sqrt{c}-bt}{a-t^2}+\sqrt{c}$$

и dx суть рациональные функции t.

Наконец, в третьем случае:

$$\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}=t.$$

Имеем:

$$\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}=t^2 \text{ и } x=\frac{a\beta-t^2\alpha}{a-t^2}.$$

Значит x, dx и радикал суть рациональные функции аргумента t. Таким образом, подинтегральные функции после подстановки станут рациональными.

Примеры.

1. Применим подстановку Эйлера к вычислению интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Воспользуемся первой подстановкой

$$\sqrt{x^2+a}=t-x,$$

откуда находим:

$$x=\frac{t^2-a}{2t},\quad dx=\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt$$

и

$$\sqrt{a+x^2}=t-x=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t}.$$

Произведя подстановку, получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

2. $I=\int\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}\,dx.$

Полагаем $x^2=z$; $x\,dx=\dfrac{dz}{2}$; получим:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(z-1)\,dz}{z\sqrt{z^2+3z+1}}.$$

Теперь воспользуемся подстановкой Эйлера.

Применим первую подстановку:

$$\sqrt{z^2+3z+1}+z=t;\quad \sqrt{z^2+3z+1}=t-z,$$

откуда

$$z^2+3z+1=t^2-2zt+z^2;\quad z=\frac{t^2-1}{3+2t};\quad dz=\frac{2t^2+6t+2}{(3+2t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{z^2+3z+1}=t-z=t-\frac{t^2-1}{3+2t}=\frac{t^2+3t+1}{3+2t};$$

$$z-1=\frac{t^2-2t-4}{3+2t}.$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{t^2-2t-4}{3+2t}\cdot 2\,\dfrac{t^2+3t+1}{(3+2t)^2}}{\dfrac{t^2-1}{3+2t}\cdot\dfrac{t^2+3t+1}{3+2t}}\,dt=\int\frac{t^2-2t-4}{(t^2-1)(3+2t)}\,dt=$$

$$=\int\frac{(t^2-1)-(2t+3)}{(t^2-1)(3+2t)}\,dt=\int\frac{dt}{3+2t}-\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|3+2t|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(3+2t)(t+1)}{t-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(3+2z+2\sqrt{z^2+3z+1})(z+1+\sqrt{z^2+3z+1})}{z-1+\sqrt{z^2+3z+1}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(2z+3+2\sqrt{z^2+3z+1})(z+1+\sqrt{z^2+3z+1})(z-1-\sqrt{z^2+3z+1})}{z^2-2z+1-z^2-3z-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(2z+3)(3z+2)+(5z+5)\,2\sqrt{z^2+3z+1}+4(z^2+3z+1)}{5z}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2z^2+5z+2+2(z+1)\sqrt{z^2+3z+1}}{z}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{[(z+1)+\sqrt{z^2+3z+1}]^2}{z}\right|+C=\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$$

Воспользуемся для вычисления того же интеграла второй подстановкой Эйлера:

$$\frac{\sqrt{z^2+3z+1}-1}{z}=t;\quad \sqrt{z^2+3z+1}=tz+1,$$

откуда

$$z^2+3z=t^2z^2+2tz.$$

Следовательно,

$$z=\frac{3-2t}{t^2-1};\quad dz=\frac{2t^2-6t+2}{(t^2-1)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{z^2+3z+1}=\frac{(3-2t)\,t}{t^2-1}+1=\frac{-t^2+3t-1}{t^2-1};$$

$$z-1=\frac{-t^2-2t+4}{t^2-1}.$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{z-1}{z\sqrt{z^2+3z+1}}\,dz=\frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{-t^2-2t+4}{t^2-1}\cdot 2\dfrac{t^2-3t+1}{(t^2-1)^2}}{\dfrac{3-2t}{t^2-1}\cdot\dfrac{-t^2+3t-1}{t^2-1}}\,dt=$$

$$=\int\frac{t^2+2t-4}{(3-2t)(t^2-1)}\,dt=\int\frac{(t^2-1)+(2t-3)}{(3-2t)(t^2-1)}\,dt=\int\frac{dt}{3-2t}-\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|3-2t|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(3-2t)(t-1)}{t+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{(3-2t)(t-1)}\right|+C.$$

Из формул подстановки получим:

$$t+1=\frac{\sqrt{z^2+3z+1}+z-1}{z};\quad t-1=\frac{\sqrt{z^2+3z+1}-z-1}{z};$$

$$3-2t=\frac{3z+2-2\sqrt{z^2+3z+1}}{z}.$$

Следовательно,

$$\frac{t+1}{(3-2t)(t-1)}=\frac{(z-1+\sqrt{z^2+3z+1})\,z}{(3z+2-2\sqrt{z^2+3z+1})(\sqrt{z^2+3z+1}-z-1)}=$$

$$=\frac{(2z+3+2\sqrt{z^2+3z+1})\,z}{3z+2-2\sqrt{z^2+3z+1}}=\frac{(z+1+\sqrt{z^2+3z+1})^2}{5z}.$$

Значит,

$$I=\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$$

Очевидно, для вычисления этого же интеграла годится и третья подстановка, так как корни трехчлена x^2+3x+1 действительные:

$$-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},\quad -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},$$

а потому можно положить

$$\sqrt{\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}}=t$$

и свести вычисление интеграла к интегрированию рациональных функций.

Примечание. Всегда применима либо первая, либо третья эйлеровы подстановки. В самом деле, если бы корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c были мнимые и $a<0$, то функция ax^2+bx+c имела бы отрицательное значение при любом x, т. е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ был бы числом мнимым. (В этом случае, так как $b^2-4ac<0$ и $a<0$, то $c<0$, т. е. не может быть применена и вторая подстановка.)

Как показывают примеры, использование подстановок Эйлера обычно связано с довольно громоздкими вычислениями. Мы укажем простейшие случаи, когда можно обойтись без этих подстановок.

1° Интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сведется к одному из табличных интегралов

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}},\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

с помощью преобразования квадратного трехчлена (выделение полного квадрата).

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-2x^2}};\quad x-2x^2=-2\left(x^2-\frac{x}{2}\right)=-2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right].$$

Применив подстановку $x-\frac{1}{4}=z$, получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{16}-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin 4z+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(4x-1)+C.$$

2° Интегралы вида $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ вычисляются также с помощью преобразования квадратного трехчлена.

Пример.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(z-1)\,dz}{\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}} - \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}} \right), \text{ где } z = x+1.$$

Но

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}} = \sqrt{z^2+\frac{3}{2}} + C = \sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}} + C$$

и

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}} = \ln \left| z + \sqrt{z^2+\frac{3}{2}} \right| + C = \ln \left| x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}} \right| + C.$$

Итак,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}} \right| + C.$$

Если к полученной примитивной прибавить константу $-\frac{\ln \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, то опять получится примитивная:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+4x+5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| (x+1)\sqrt{2} + \sqrt{2x^2+4x+5} \right| + C.$$

3° Интегралы вида $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ и $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ можно вычислить таким способом:

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \int \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

К интегралу $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$ применим формулу интегрирования по частям:

$$u = x, \quad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \quad du = dx \text{ и } v = \sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

Значит,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I;$$

далее,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Следовательно,

$$I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I \pm a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|,$$

откуда

$$I = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Аналогично вычисляется $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Интегралы вида

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$$

вычисляются с помощью преобразования квадратного трехчлена.

4° Интегралы вида $\int (mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ также легко вычисляются с помощью преобразования квадратного трехчлена и подстановки.

Пример.

$$\int (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3}\, dx; \quad x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2.$$

Делаем подстановку $x - 1 = z$. Тогда $dx = dz$ и $x = z + 1$. Значит,

$$I = \int (z+2)\sqrt{z^2+2}\, dz = \int z\sqrt{z^2+2}\, dz + 2\int \sqrt{z^2+2}\, dz.$$

Первый из этих интегралов вычисляется подстановкой

$$z^2 + 2 = t; \; z\, dz = \frac{dt}{2}; \; \int z\sqrt{z^2+2}\, dz = \int \frac{\sqrt{t}\, dt}{2} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{\sqrt{(z^2+2)^3}}{3} + C;$$

далее,

$$2\int \sqrt{z^2+2}\, dz = z\sqrt{z^2+2} + 2\ln\left|z + \sqrt{z^2+2}\right| + C.$$

Итак,

$$I = \frac{\sqrt{(x^2-2x+3)^3}}{3} + (x-1)\sqrt{x^2-2x+3} + 2\ln\left|x - 1 + \sqrt{x^2-2x+3}\right| +$$

$$+ C = \frac{x^2+x}{3}\sqrt{x^2-2x+3} + 2\ln\left|x - 1 + \sqrt{x^2-2x+3}\right| + C.$$

5° При вычислении интегралов вида $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, где n — натуральное число, может оказаться полезной подстановка $x = \frac{1}{t}$.

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (в промежутке $x > 1$). Положим $x = \frac{1}{t}$; $dx = -\frac{1}{t^2}\, dt$.

получим:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C = \arccos \frac{1}{x} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ (в промежутке $x>0$). Та же подстановка дает

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1+t^2} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Интегрирование дифференциальных биномов. Рассмотрим интеграл вида $\int x^m (bx^n+a)^p\,dx$; если хоть одно из рациональных чисел m, n, p не есть целое, то функция $x^m(bx^n+a)^p$ есть иррациональная. Подынтегральное выражение $x^m(bx^n+a)^p\,dx$ называется дифференциальным биномом. Рассмотрим случаи, когда интегрирование дифференциального бинома может быть сведено к интегрированию рациональной функции. Сделаем подстановку $x^n=t$, тогда $x=t^{\frac{1}{n}}$ и $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$:

$$\int x^m (bx^n+a)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(bt+a)^p\,dt.$$

Обозначим $\frac{m+1}{n}-1$ через q, тогда

$$\int x^m (bx^n+a)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^q (bt+a)^p\,dt.$$

Если p—число целое, а $q=\frac{r}{s}$, где r и s—целые числа, то подстановкой $t^{\frac{1}{s}}=z$ мы сведем вычисление интеграла к интегрированию рациональной функции. Если q—число целое, а $p=\frac{r}{s}$, то подстановка

$$(bt+a)^{\frac{1}{s}} = z$$

приведет также к интегрированию рациональной функции.

Наконец, приняв во внимание равенство

$$\int t^q (bt+a)^p\,dt = \int \left(\frac{bt+a}{t}\right)^p t^{p+q}\,dt,$$

видим, что если $p+q$ число целое, а $p=\frac{r}{s}$, то подстановка $\left(\frac{bt+a}{t}\right)^{\frac{1}{s}}=z$ приведет к интегрированию рациональной функции.

Так как $q=\frac{m+1}{n}-1$, то приходим к следующему заключению: *вычисление* $\int x^m (bx^n+a)^p\,dx$ *сведется к интегрированию рациональной функции, если хоть одно из рациональных чисел*

$$p,\quad \frac{m+1}{n}-1,\quad p+\frac{m+1}{n}-1$$

есть число целое, или, что то же, если одно из рациональных чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $p+\frac{m+1}{n}$ *целое.*

Пример.

Вычислим $\int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}\,dx$. Обозначим

$$I=\int x^{-6}(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}\,dx;\quad p=\frac{2}{3};\quad m=-6;\quad n=3;$$

$$p+\frac{m+1}{n}=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=-1\text{—число целое.}$$

Делаем для вычисления интеграла подстановку:

$$x^{-3}=t;\ x^3=\frac{1}{t};\ x=t^{-\frac{1}{3}};\ dx=-\frac{1}{3}t^{-\frac{4}{3}}dt.$$

Получим:

$$I=\int t^2\left(\frac{2}{t}+1\right)^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}t^{-\frac{4}{3}}\right)dt=-\frac{1}{3}\int (t+2)^{\frac{2}{3}}dt=$$

$$=-\frac{1}{5}(t+2)^{\frac{5}{3}}+C=-\frac{1}{5}(x^{-3}+2)^{\frac{5}{3}}+C.$$

Примечание. Знаменитый русский математик П. Л. Чебышев доказал, что вычисление $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$ сведется к интегрированию рациональной функции только в перечисленных выше случаях, при несоблюдении этого условия интеграл в конечном виде не выражается.

§ 117. Интегрирование тригонометрических функций

Будем называть элементарную функцию аргумента x *тригонометрической, если она при замене* $\sin x$ *через* y, $\cos x$ *через* z, $\operatorname{tg} x$ *через* $\frac{y}{z}$, $\operatorname{ctg} x$ *через* $\frac{z}{y}$ *не содержит буквы* x *и является алгебраической относительно* y и z.

Например, тригонометрическими функциями являются следующие:

$$\frac{\sin x}{\cos x+1},\quad \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x+\cos x},\quad \sqrt{\operatorname{ctg} x}\cos x.$$

Функции

$$x\sin x,\quad \frac{\cos x}{x},\quad \ln\sin x,\quad \sin(\cos x)$$

не являются тригонометрическими.

Мы укажем класс тригонометрических функций, интегрирование которых или сводится к интегрированию рациональных функций, или выполняется на основании элементарных тригонометрических преобразований.

I. Если подинтегральная функция рациональна относительно $\sin x$, $\cos x$ ($\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ предварительно следует выразить через $\sin x$, $\cos x$), то при подстановке $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ подинтегральное выражение будет рациональным относительно t. В самом деле, из формул тригонометрии получим:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

а так как

$$x=2\operatorname{arc}\operatorname{tg} t \text{ и } dt=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

то в результате подстановки подинтегральное выражение окажется рациональной функцией t.

Примеры.

1. $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2. $$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\int\frac{dy}{\sin y}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|+C=$$
$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

3. $$\int\frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sin x+\cos x-1}=\int\frac{\frac{1-t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1}=\int\frac{(1+t)\,dt}{2t^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

II. Если подинтегральная функция рациональна относительно $\sin kx$, $\cos lx$, $\operatorname{tg} px$, $\operatorname{ctg} qx$, где k, l, p и q — целые числа, то эта функция преобразуется в рациональную относительно $\sin x$, $\cos x$, так как

$$\sin mx=C_m^1\cos^{m-1}x\sin x-C_m^3\cos^{m-3}x\sin^3x+\ldots \quad (1)$$
$$\cos mx=\cos^m x-C_m^2\cos^{m-2}x\sin^2x+C_m^4\cos^{m-4}x\sin^4x-\ldots \quad (2)$$

(в правых частях формул (1) и (2) число слагаемых соответственно равно $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ и $m+1-\left[\frac{m+1}{2}\right]$)*.

Таким образом, в силу формул (1) и (2), функции

$$\sin kx,\ \cos lx,\ \operatorname{tg} px=\frac{\sin px}{\cos px},\ \operatorname{ctg} qx=\frac{\cos qx}{\sin qx}$$

преобразуются в рациональные функции относительно $\sin x$ и $\cos x$. Если числа k, l, p и q дробные, то приведем их к общему знаменателю $k=\frac{k_1}{n}$, $l=\frac{l_1}{n}$, $p=\frac{p_1}{n}$, $q=\frac{q_1}{n}$ и заменим $\frac{x}{n}$ через y, после чего функции $\sin k_1 y$, $\cos l_1 y$, $\operatorname{tg} p_1 y$, $\operatorname{ctg} q_1 y$ выразятся рационально через $\sin y$, $\cos y$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{ctg} y$.

Пример.

$$\int \frac{\cos\frac{x}{2}\,dx}{\sin\frac{x}{3}}.$$ Обозначим $\frac{x}{6}=y$, тогда $dx=6dy$

и

$$\int \frac{\cos\frac{x}{2}\,dx}{\sin\frac{x}{3}}=6\int\frac{\cos 3y\,dy}{\sin 2y}=6\int\frac{\cos^3 y-3\cos y\sin^2 y}{2\sin y\cos y}\,dy=$$

$$=3\left(\int\frac{\cos^2 y}{\sin y}\,dy-3\int\sin y\,dy\right).$$

Далее,

$$\int\frac{\cos^2 y\,dy}{\sin y}=\int\frac{1-\sin^2 y}{\sin y}\,dy=\int\frac{dy}{\sin y}+\cos y+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|+\cos y+C.$$

Значит,

$$\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=3\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|+4\cos y\right)+C=$$

$$=3\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{12}\right|+4\cos\frac{x}{6}\right)+C.$$

Вычисление интегралов с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ может привести к интегрированию рациональной функции, знаменатель которой — многочлен высокой степени.

---

* Для получения формул (1) и (2) можно взять формулу Моавра

$$\cos mx+i\sin mx=(\cos x+i\sin x)^m$$

и приравнять отдельно действительную часть действительной, а мнимую — мнимой.

В некоторых случаях можно облегчить вычисление интеграла, не прибегая к этой подстановке.

III. Если подинтегральная функция $f(x)$ рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$ и нечетная относительно $\cos x$, то подстановка $\sin x = t$ преобразует подинтегральное выражение в рациональное относительно t.

В самом деле, по условию, подинтегральная функция нечетная относительно $\cos x$. Перепишем $\int f(x)\,dx$ в виде $\int \frac{f(x)}{\cos x}\cos x\,dx$. В таком случае $\frac{f(x)}{\cos x}$ есть четная относительно $\cos x$, а значит, содержит лишь четные степени $\cos x$; четные же степени $\cos x$ рационально выражаются через $\sin x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; $\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$ и т. д. Следовательно, после подстановки $\sin x = t$, функция $\frac{f(x)}{\cos x}$ преобразуется в рациональную функцию t, которую обозначим через $R(t)$; значит,

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{\cos x}\cos x\,dx = \int R(t)\,dt.$$

Пример.

$$\int \frac{\operatorname{tg} x \cos^6 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\cos x\,dx =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}\cos x\,dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}\,dt = \int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} - 2\ln|t| + \frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

IV. Если подинтегральная функция, рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$, является нечетной относительно $\sin x$, то подстановка $\cos x = t$ сведет вычисление интеграла к интегрированию рациональной функции.

Рассуждаем аналогично: $\int f(x)\,dx = -\int \frac{f(x)}{\sin x}(-\sin x)\,dx$; но $\frac{f(x)}{\sin x}$ есть функция, четная относительно $\sin x$ и, значит, содержит лишь четные степени $\sin x$, а потому выражается рационально через $\cos x$, т. е. есть рациональная функция t, которую обозначим через $R(t)$. Значит,

$$\int f(x)\,dx = -\int \frac{f(x)}{\sin x}(-\sin x\,dx) = -\int R(t)\,dt.$$

Пример.

$$\int \cos^2 x \sin^5 x\,dx = -\int \cos^2 x \sin^4 x\,(-\sin x\,dx) =$$

$$= -\int \cos^2 x\,(1-\cos^2 x)^2\,(-\sin x\,dx) = -\int t^2\,(1-t^2)^2\,dt =$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6)\, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right) + C =$$

$$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}\right) + C.$$

V. Если подинтегральная функция, рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$ и при замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, остается неизменной, то подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ подинтегральное выражение преобразуется в рациональное относительно t. Действительно, заменим в подинтегральной функции $\sin x$ на $\cos x \operatorname{tg} x$; замена $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$ равносильна перемене знака у $\cos x$ в выражении $\cos x \operatorname{tg} x$. Таким образом, после замены $\sin x$ на $\cos x \operatorname{tg} x$ подинтегральная функция окажется четной относительно $\cos x$ и рациональной относительно $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$. Так как четные степени $\cos x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$ $\left(\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)$, то после подстановки $\operatorname{tg} x = t$ подинтегральная функция будет рациональной относительно t. Так как $x = \operatorname{arc tg} t$, то $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, и подинтегральное выражение будет рациональным относительно t.

Пример.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{\cos x \operatorname{tg} x}{\cos x \operatorname{tg} x + \cos x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\, dx = \int \frac{t\, dt}{(1+t)(1+t^2)}.$$

Но

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1},$$

откуда

$$t = (A+B)t^2 + (C+B)t + A + C$$

и

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arc tg} t + C$$

или

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + C.$$

VI. Если подинтегральная функция рациональна относительно $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$), то подстановка $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$) сведет вычисление интеграла к интегрированию рациональной функции.

Действительно, в первом случае подинтегральное выражение преобразуется в $\frac{R(t)\, dt}{1+t^2}$, а во втором случае в $-\frac{R(t)\, dt}{1+t^2}$.

Примеры.

1. $$\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\,dx=\int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right|+C.$$

2. $$\int \frac{1-\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x}\,dx=\int \frac{1-t}{1+t}\left(-\frac{dt}{1+t^2}\right)=\int \frac{t-1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt$$

Но

$$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1},$$

где

$$A=-1,\ B=1,\ C=0.$$

Значит,

$$\int \frac{1-\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x}\,dx=-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{1}{\sin x(\operatorname{ctg} x+1)}\right|+C=-\ln|\cos x+\sin x|+C.$$

VII. Интегралы вида

$$\int \sin mx\cos nx\,dx,\qquad \int \cos mx\cos nx\,dx,\qquad \int \sin mx\sin nx\,dx$$

вычисляются с помощью формул тригонометрии, преобразующих произведение тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Применив эти формулы, получим, например:

$$\int \sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x]\,dx=$$
$$=\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+C,$$
$$(m+n\neq 0,\quad m-n\neq 0).$$

Если же $m=\pm n$, то

$$\int \sin mx\sin nx\,dx=\pm\int \sin^2 mx\,dx=\pm\int\frac{1-\cos 2mx}{2}\,dx=$$
$$=\pm\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2mx}{4m}\right)+C.$$

Интегралы $\int \cos mx\sin nx\,dx$ и $\int \cos mx\cos nx\,dx$ вычисляются аналогично. Вычисления предоставляем учащимся.

VIII. Если подинтегральная функция имеет вид $\sin^m x \cos^n x$, где m и n — целые числа, то при вычислении интеграла

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

полезно помнить следующее:

a) Если хоть одно из чисел m или n нечетное, то можно пользоваться одной из подстановок $t = \sin x$ или $t = \cos x$. Так, если m нечетное, можно положить $t = \cos x$, если n нечетное, можно положить $t = \sin x$.

b) Если оба числа m и n положительные и четные, то можно предварительно выразить подинтегральную функцию через тригонометрические функции кратных дуг.

Примеры.

1. $\int \sin^3 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$. Полагаем $\cos x = t$; получим:

$$\int \sin^3 x \, dx = -\int (1 - t^2) \, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^2 x} dx$. Полагаем $\sin x = t$.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

3. $$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int (2 \sin x \cos x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

4. $$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \left[\int \sin^2 2x \, dx + \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \right] =$$
$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) \, dx + \frac{\sin^3 2x}{6} \right] = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

c) Интегралы вида $\int \frac{\sin^n x}{\cos^n x} dx = \int \operatorname{tg}^n x \, dx$, где n — целое положительное число, большее или равное 2, можно вычислять с помощью рекуррентной формулы:

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$
$$= \int \frac{\operatorname{tg}^{n-2} x}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx.$$

Аналогично:

$$\int \operatorname{ctg}^n x \, dx = \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \operatorname{ctg}^2 x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \, dx.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} = \int \operatorname{ctg}^4 x\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \int \operatorname{ctg}^2 x\, dx;$$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Значит,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + x + C.$$

d) При вычислении интегралов вида

$$\int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2l} x}\, dx, \quad \int \frac{\cos^{2l} x}{\sin^{2k} x}\, dx \text{ и } \int \frac{dx}{\cos^{2l} x \sin^{2k} x},$$

где k и l – натуральные числа, может оказаться полезным в процессе вычислений выразить отношение одинаковых степеней синуса и косинуса через тангенс, а также ввести в числитель «тригонометрическую единицу» $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ в какой-либо натуральной степени.

Примеры.

1.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

3.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^4 x \cos^4 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^4 x \cos^4 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{1}{\sin^4 x}\, dx.$$

Мы получили уже известные интегралы: первый интеграл рассмотрен в примере 1, второй интеграл вычисляется без труда:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C;$$

третий интеграл находится подобно первому:

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\, dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C.$$

e) При вычислении интегралов вида

$$I = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

можно пользоваться следующими формулами:

Если $n \neq -1$ и $m+n \neq 0$, то

$$I = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x \, dx.$$

Интегрируем по частям, полагая

$$u = \sin^{m-1} x, \quad dv = \cos^n x \sin x \, dx.$$

Имеем:

$$du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$$

и

$$I = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx;$$

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx = \int \sin^{m-2} x \cos^n x (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx - \int \sin^m x \cos^n x \, dx =$$

$$= \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx - I.$$

Итак,

$$I = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx - \frac{m-1}{n+1} I.$$

Отсюда

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x +$$

$$+ \frac{m-1}{n+m} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что

$$\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx = \frac{1}{m-1} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x +$$

$$+ \frac{m+n}{m-1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx \quad (n \neq -1, \ m+n \neq 0, \ m \neq 1).$$

Заменяя m на $m+2$, имеем:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x +$$

$$+ \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x \, dx \tag{5}$$

$$(n \neq -1, \ m+n+2 \neq 0, \ m \neq -1).$$

Заменяя в формулах (4) и (5) x на $\frac{\pi}{2} - x$, имеем:

$$-\int \cos^m x \sin^n x \, dx = -\frac{1}{m+n} \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x -$$

$$-\frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\,dx \quad (n\neq -1,\ m+n\neq 0);$$

$$-\int \cos^m x\sin^n x\,dx=\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n+1}x-$$

$$-\frac{m+n+2}{m+1}\int \cos^{m+2}x\sin^n x\,dx \quad (n\neq -1,\ m\neq -1,\ m+n+2\neq 0).$$

Меняя местами m и n, после умножения на -1 получаем:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{1}{n+m}\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x+$$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx \quad (m\neq -1,\ m+n\neq 0). \tag{6}$$

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{1}{n+1}\sin^{m+1}\cos^{n+1}x+$$

$$+\frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x\cos^{n+2}x\,dx \tag{7}$$

$$(n\neq -1,\ m\neq -1,\ m+n+2\neq 0).$$

Предположим, что числа m и n — целые, не отрицательные; тогда, пользуясь формулами (4) и (5), мы сведем вычисление

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

к вычислению одного из интегралов:

$$\int \sin x\,dx,\quad \int \cos x\,dx,\quad \int dx,\quad \int \sin x\cos x\,dx.$$

Если же одно из чисел m и n отрицательное, то вычисление интеграла сведется к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{dx}{\sin x},\quad \int \frac{dx}{\cos x},\quad \int \frac{\cos x}{\sin x}dx,\quad \int \frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

которые соответственно равны:

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,\quad \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|,\quad \ln|\sin x|,\quad -\ln|\cos x|.$$

Наконец, если и m и n — целые неположительные числа, то вычисление интеграла сведется к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{dx}{\sin x},\quad \int \frac{dx}{\cos x},\quad \int \frac{dx}{\sin x\cos x};$$

последний интеграл вычисляется так:

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=2\int \frac{dx}{\sin 2x}=\ln|\operatorname{tg}x|+C.$$

§ 118. Тригонометрические и гиперболические подстановки

При вычислении интегралов от иррациональных функций, не содержащих никаких других радикалов, кроме радикалов вида $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ или $\sqrt{a^2 - x^2}$, удобно пользоваться тригонометрическими подстановками.

Если подинтегральная функция не содержит никаких других радикалов, кроме радикала $\sqrt{a^2 - x^2}$, то подстановка

$$x = a \sin t \quad (\text{или } x = a \cos t),$$

где $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ (или $0 \leqslant t \leqslant \pi$) приведет к функции, рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$, ибо

$$\sqrt{a^2 - x^2} = x \cos t \ (\text{или } a \sin t).$$

Аналогично для функций, содержащих радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, можно пользоваться подстановкой $x = a \operatorname{tg} t$.

Если подинтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{x^2 - a^2}$, можно положить $x = \frac{a}{\cos t}$.

Примеры.

1.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Произведя подстановку $x = a \sin t$, получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C;$$

переходя от t к x:

$$t = \arcsin \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

2.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Произведя подстановку $x = \sin t$, получим:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t\, dt = \int \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C.$$

3.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}.$$

Полагая $x=\operatorname{tg} t$, $dx=\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$, получим:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\sec^3 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \cos t\,dt =$$

$$= \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Гиперболические подстановки. Основное соотношение между гиперболическими функциями $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ позволяет пользоваться гиперболическими подстановками для вычисления интегралов от функций, содержащих радикалы вида $\sqrt{x^2 \pm a^2}$. Если подинтегральная функция содержит радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, полагаем $x=a\operatorname{sh} t$, в случае радикала $\sqrt{x^2-a^2}$ полагаем $x=a\operatorname{sh} t$.

Пример.

$$\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx.$$

Полагаем $x=\operatorname{ch} t$; получим:

$$\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx = \int \operatorname{sh}^4 t\,dt = \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{ch}^2 2t\,dt - \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t\,dt + \frac{1}{4}\int dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4t + 1)\,dt - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{4}t = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4t - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{3}{8}t + C.$$

Принимая во внимание равенства:

$$\operatorname{sh} 4t = 2\operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = 4\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t\,(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = 4x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1);$$

$$\operatorname{sh} 2t = 2x\sqrt{x^2-1} \text{ и } t = \operatorname{Arch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

получим:

$$\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx = \frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1} + \frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$$

§ 119. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

Обозначим через $P_n(x)$ полином степени n. Вычисление интеграла

$$\int P_n(x)\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ есть $\cos(kx+l)$, $\sin(kx+l)$ либо e^{kx+l}, производится методом интегрирования по частям. В самом деле, пусть

$$u = P_n(x),\ dv = \varphi(x)\,dx.$$

Тогда $du = P_n'(x)\,dx$ и

$$v = \int \varphi(x)\,dx = \varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ есть либо $\frac{\sin(kx+l)}{k}$, либо $-\frac{\cos(kx+l)}{k}$, либо $\frac{e^{kx+l}}{k}$, а $P_n'(x)$ есть полином степени $n-1$.

Отсюда

$$\int P_n(x)\varphi(x)\,dx = P_n(x)\varphi_1(x) - \int P_n'(x)\varphi_1(x)\,dx.$$

Таким образом, мы свели вычисление интеграла (1) к вычислению интеграла того же вида, но более простого, так как степень полинома уменьшилась на 1. Повторив эту операцию n раз, мы придем к вычислению интегралов:

$$\int \sin(kx+l)\,dx, \quad \text{или} \quad \int \cos(kx+l)\,dx, \quad \text{или} \quad \int e^{kx+l}\,dx.$$

Пример.

$$I = \int (x^3 - x + 2)\sin 2x\,dx.$$

Положим:

$$u = x^3 - x + 2,\ dv = \sin 2x\,dx,\ du = (3x^2-1)\,dx,\ v = -\frac{\cos 2x}{2};$$

значит,

$$I = -\frac{1}{2}(x^3 - x + 2)\cos 2x + \frac{1}{2}\int (3x^2-1)\cos 2x\,dx.$$

Вычисляем:

$$\int (3x^2-1)\cos 2x\,dx.$$

Положим:

$$u = 3x^2 - 1,\ dv = \cos 2x\,dx,\ du = 6x\,dx,\ v = \frac{\sin 2x}{2};$$

значит,

$$\int (3x^2-1)\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}(3x^2-1)\sin 2x - 3\int x\sin 2x\,dx.$$

Вычисляем (интегрированием по частям):

$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2}\cos 2x + C.$$

Следовательно,

$$\int (3x^2-1)\cos 2x\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}\right)\sin 2x + \frac{3}{2}x\cos 2x + C,$$

откуда

$$I = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8}\right)\sin 2x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{4}x + 1\right)\cos 2x + C.$$

Если $\varphi(x)=\ln\psi(x)$, где $\psi(x)$ есть рациональная функция, то

$$\int P_n(x)\ln\psi(x)\,dx$$

вычисляется по частям:

$$u=\ln\psi(x),\quad dv=P_n(x)\,dx,\quad du=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx,\quad v=Q_{n+1}(x),$$

где $Q_{n+1}(x)$ есть полином степени $n+1$.

$$\int P_n(x)\ln\psi(x)\,dx=Q_{n+1}(x)\ln\psi(x)-\int\frac{Q_{n+1}(x)\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx$$

Но $\psi(x)$, а значит, и $\psi'(x)$ суть рациональные функции. Итак, мы свели вычисление интеграла к вычислению интеграла от рациональной функции.

Если $\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg}\psi(x)$, где $\psi(x)$ есть рациональная функция, то, полагая

$$u=\operatorname{arc\,tg}\psi(x),\quad dv=P_n(x)\,dx,\quad du=\frac{\psi'(x)}{1+\psi^2(x)}dx,\quad v=Q_{n+1}(x),$$

имеем:

$$\int P_n(x)\operatorname{arc\,tg}\psi(x)\,dx=Q_{n+1}(x)\operatorname{arc\,tg}\psi(x)-\int\frac{Q_{n+1}(x)\psi'(x)}{1+\psi^2(x)}\,dx$$

В последнем интеграле подинтегральная функция также рациональная.

Если $\varphi(x)=\arcsin x$, то, полагая

$$u=\arcsin x,\quad dv=P_n(x)\,dx,\quad du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=Q_{n+1}(x)\,dx,$$

имеем

$$\int P_n(x)\arcsin x\,dx=Q_{n+1}(x)\arcsin x-\int\frac{Q_{n+1}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Последний интеграл, как мы знаем, можно свести к вычислению интеграла от рациональной функции.

Примеры.

1.

$$\int x^3\ln(x^2+1)\,dx.$$

Полагаем

$$u=\ln(x^2+1),\quad dv=x^3\,dx,\quad du=\frac{2x}{x^2+1}\,dx,\quad v=\frac{x^4}{4}$$

Имеем

$$\int x^3\ln(x^2+1)\,dx=\frac{x^4}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^5}{x^2+1}\,dx.$$

Далее,

$$\frac{x^5}{x^2+1}=\frac{x^5+x^3-x^3-x+x}{x^2+1}=x^3-x+\frac{x}{x^2+1},$$

а потому

$$\int\frac{x^5}{x^2+1}\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Итак,

$$\int x^3 \ln(x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{4}\right)\ln(x^2+1)-\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{4}+C.$$

2

$$\int (x^2+1)\arcsin x\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x-\frac{1}{2}\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Вычисляем:

$$I=\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Полагаем

$$\sqrt{1-x^2}=t,\quad x^2=1-t^2,\quad x\,dx=-t\,dt.$$

Тогда

$$I=-\int \frac{(4-t^2)\,t\,dt}{t}=-4t+\frac{t^3}{3}+C=$$

$$=-4\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C.$$

Итак,

$$\int (x^2+1)\arcsin x\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x+\frac{1}{9}(11+x^2)\sqrt{1-x^2}+C.$$

§ 120. Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов можно применять в случаях, когда заранее известен вид, который имеет примитивная подинтегральной функции. Поясним это следующим примером: рассмотрим интеграл $\int e^{kx}P_n(x)\,dx$, где $P_n(x)$ есть многочлен степени n; путем интегрирования по частям получим:

$$\int e^{kx}P_n(x)\,dx=\frac{1}{k}e^{kx}P_n(x)-\frac{1}{k}\int e^{kx}P_n'(x)\,dx.$$

В правой части равенства мы получили интеграл того же вида, как данный, в котором вместо $P_n(x)$ содержится многочлен степени на 1 ниже: $P_n'(x)$. Продолжая интегрирование по частям, после n-го шага получим:

$$\int e^{kx}P_n(x)\,dx=\frac{1}{k}e^{kx}P_n(x)-\frac{1}{k^2}e^{kx}P'(x)+$$

$$+\frac{1}{k^3}e^{kx}P_n''(x)\ldots\pm\frac{1}{k^n}\int P_n^{(n)}(x)e^{kx}\,dx.$$

Но так как $P_n^{(n)}(x)=\text{const}$, то последний интеграл вычислится без труда, и мы будем иметь:

$$\int e^{kx}P_n(x)\,dx=Q_n(x)e^{kx}+C, \qquad (1)$$

где $Q_n(x)$ есть некоторый многочлен степени n. Полученный результат позволяет искать интеграл $\int e^{kx}P_n(x)$ в виде произведения

$Q_n(x)e^{kx}$, где $Q_n(x)$ есть многочлен степени n с неопределенными коэффициентами:

$$Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению чисел $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Дифференцируя почленно тождество (1), получим:

$$e^{kx}P_n(x) = kQ_n(x)e^{kx} + Q_n'(x)e^{kx}.$$

Сократив на e^{kx}, будем иметь тождество:

$$P_n(x) = kQ_n(x) + Q_n'(x). \qquad (2)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, мы получим систему уравнений, из которой и определяется $A_0, A_1 \ldots, A_n$.

Пример.

$$\int e^{2x}x^3dx.$$

Полагаем

$$\int e^{2x}x^3dx = (A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{2x} + C.$$

Дифференцируя и сокращая на e^{2x}, получим:

$$x^3 = 2(A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3) + (3A_0x^2 + 2A_1x + A_2).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим линейную систему:

$$2A_0 = 1;\ 2A_1 + 3A_0 = 0;\ 2A_1 + 2A_2 = 0;\ A_2 + 2A_3 = 0,$$

откуда

$$A_0 = \frac{1}{2},\quad A_1 = -\frac{3}{4},\quad A_2 = \frac{3}{4},\quad A_3 = -\frac{3}{8}.$$

Следовательно,

$$\int e^{2x}x^3dx = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^{2x} + C.$$

Если подинтегральная функция имеет вид $P_n(x)\cos kx + Q_n(x)\sin kx$, где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени n, то подобно предыдущему, найдем:

$$\int [P_n(x)\cos kx + Q_n(x)\sin kx]\,dx = S_n(x)\cos kx + T_n(x)\sin kx + C. \qquad (3)$$

Заметим, что многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ могут на самом деле быть и не одинаковой степени, но в этом случае всегда можно мыслить один из этих многочленов дополненным соответствующим количеством членов с коэффициентами, равными нулю. Написав в равенстве (3) многочлены $S_n(x)$ и $T_n(x)$ с неопределенными коэффициентами, продифференцировав и приравняв коэффициенты

в обеих частях прислагаемых вида $x^i \cos kx$ и $x^j \sin kx$, мы получим систему уравнений, из которой и определятся коэффициенты многочленов $S_n(x)$ и $T_n(x)$.

Заметим, что один из многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ может быть тождественно равным нулю, тогда данный интеграл обращается в интеграл $\int P_n(x) \cos kx\, dx$ или в $\int Q_n(x) \sin kx\, dx$.

Пример.

$$\int (x^2+3x+5) \cos 2x dx.$$

Полагаем

$$\int (x^2+3x+5) \cos 2x dx = (A_0x^2+A_1x+A_2) \cos 2x + \\ +(B_0x^2+B_1x+B_2) \sin 2x + C.$$

Дифференцируя, получим:

$$(x^2+3x+5) \cos 2x = -(A_0x^2+A_1x+A_2)\, 2 \sin 2x + \\ +(2A_0x+A_1) \cos 2x + (B_0x^2+B_1x+B_2)\, 2 \cos 2x + (2B_0x+B_1) \sin 2x,$$

откуда

$$(x^2+3x+5) \cos 2x = 2B_0x^2 \cos 2x + (2B_1+2A_0)\, x \cos 2x + \\ +(A_1+2B_2) \cos 2x - 2A_0x^2 \sin 2x + 2(B_0-A_1)\, x \sin 2x + (B_1-2A_2) \sin 2x.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$2B_0=1; \quad 2(B_1+A_0)=3; \quad A_1+2B_2=5; \\ 2A_0=0; \quad 2(B_0-A_1)=0; \quad B_1-2A_2=0.$$

Из этой системы найдем:

$$B_0=\frac{1}{2}; \quad A_0=0; \quad A_1=\frac{1}{2}; \quad B_1=\frac{3}{2}; \quad B_2=\frac{9}{4}; \quad A_2=\frac{3}{4}.$$

Следовательно,

$$\int (x^2+3x+5) \cos 2x dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right) \sin 2x + C.$$

Рассмотрим интеграл $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}} dx$, где n — натуральное число.

Интегрирование по частям дает:

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}} dx = \int x^{n-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} dx = \\ = x^{n-1} \sqrt{x^2+a} - (n-1) \int x^{n-2} \sqrt{x^2+a}\, dx = \\ = x^{n-1} \sqrt{x^2+a} - (n-1) \int \frac{x^n+ax^{n-2}}{\sqrt{x^2+a}} dx.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$I_n = x^{n-1} \sqrt{x^2+a} - (n-1) I_n - (n-1) a I_{n-2},$$

откуда получим рекуррентную формулу:

$$I_n = \frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{x^2+a} - a\frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Последовательное применение этой формулы сведет вычисление I_n к вычислению одного из интегралов:

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} dx = \sqrt{x^2+a} + C$$

или

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{x^2+a}} dx,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Применив к каждому члену многочлена $P_n(x)$ выведенную рекуррентную формулу, убедимся в справедливости формулы

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{x^2+a}} dx = P_{n-1}(x)\sqrt{x^2+a} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, а α — некоторое действительное число. Если дан интеграл вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, то преобразование квадратного трехчлена ax^2+bx+c (выделение полного квадрата) сведет данный интеграл к уже рассмотренному, поэтому и данный интеграл имеет вид:

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Коэффициенты многочлена $P_{n-1}(x)$, а также число α можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Пример.

$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx$. Полагаем

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-4x+1} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$$

Дифференцируя и умножая обе части на радикал $\sqrt{x^2-4x+1}$, получим.

$$x^2+1 = (Ax+B)(x-2) + A(x^2-4x+1) + \alpha.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим уравнения:

$$2A = 1;\ B-6A = 0;$$

$$A-2B+\alpha = 1,$$

откуда $A=\frac{1}{2}$, $B=3$ и $\alpha=\frac{13}{2}$. Следовательно,

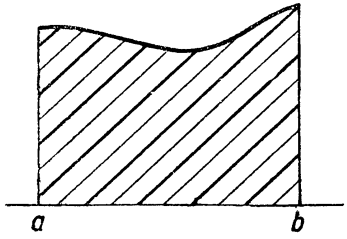
$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx=\left(\frac{x}{2}+3\right)\sqrt{x^2-4x+1}+$$
$$+\frac{13}{2}\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}|+C.$$

ГЛАВА X

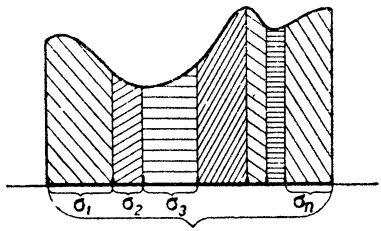
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 121. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Рассмотрим фигуру, ограниченную сверху графиком функции $f(x)$, непрерывной и неотрицательной на данном сегменте $[a, b]$, с боков прямыми $x=a$ и $x=b$ и снизу отрезком оси абсцисс $[a, b]$



Черт. 304.



Черт. 305.

(черт. 304). Эту фигуру будем называть криволинейной трапецией с основанием $[a, b]$. Рассмотрим вопрос об определении и вычислении площади криволинейной трапеции.

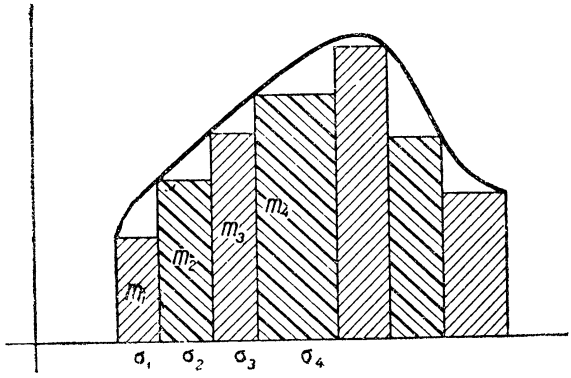
Разделим основание криволинейной трапеции на n сегментов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ (теми же буквами обозначим их длины); тогда данная криволинейная трапеция разделится на n криволинейных трапеций, основаниями которых служат сегменты σ_i (где $i=1, 2, \ldots n$) (черт. 305). Обозначим через $m_1, m_2, \ldots, m_n$ наименьшие ординаты графика на соответствующих сегментах σ_i. Произведения $m_1\sigma_1, m_2\sigma_2, \ldots, m_n\sigma_n$ суть площади «входящих» прямоугольников с основаниями $\sigma_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Эти прямоугольники содержатся в соответствующих криволинейных трапециях.

Сумма

$$m_1\sigma_1+m_2\sigma_2+\ldots+m_n\sigma_n=\sum m_i\sigma_i$$

есть площадь ступенчатого многоугольника, составленного из входящих прямоугольников. Этот многоугольник называется ступен-

чатым входящим многоугольником (черт. 306). Криволинейная трапеция содержит всякий входящий многоугольник, построенный при произвольном делении основания $[a, b]$ на части.



Черт. 306.

Обозначим через M_1, M_2, ... M_n наибольшие ординаты графика на сегментах σ_1, σ_2, ..., σ_n.

Сумма

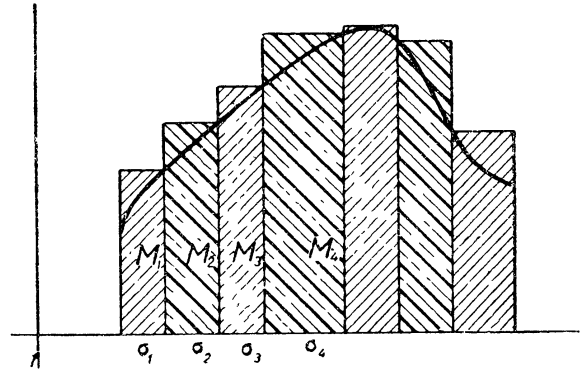
$$M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + \ldots + M_n\sigma_n = \sum M_i\sigma_i$$

обозначает площадь многоугольника, называемого ступенчатым выходящим многоугольником. Ступенчатый выходящий многоугольник при любом делении основания содержит криволинейную трапецию (черт. 307).

Одно из основных свойств площадей фигур выражается следующим предложением: *если фигура F содержится в F_1, то*

$$\text{пл. } F \leqslant \text{пл. } F_1.$$

Допустим, что мы приписали данной криволинейной трапеции в качестве площади некоторое число P. Если поставить условие, чтобы сформулированное свойство площадей осталось в силе и для фигур с криволинейной границей, то число P должно содержаться между площадями ступенчатых входящего и выходящего многоугольников при любом разбиении основания. *Если существует единственное число P, не меньшее площади любого ступенчатого входящего многоугольника и не большее площади любого ступенчатого выходящего многоугольника, то это число и рассматривается как площадь данной криволинейной трапеции* *.



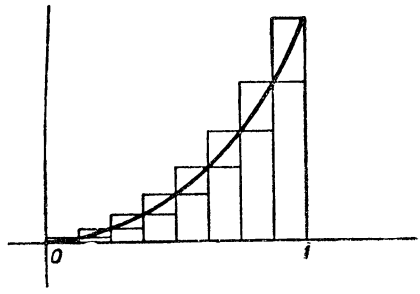
Черт. 307.

* Вопрос о том, в какой мере при таком определении остаются в силе все основные свойства площадей, подробно будет рассмотрен ниже (см второй том).

Рассмотрим задачу о нахождении работы при прямолинейном движении, если направление пути совпадает с направлением силы. Пусть $[a, b]$ есть путь, пройденный под действием силы $f(x)$. Если сила постоянна, то работа равна произведению силы на путь. В случае непостоянной силы разделим путь $[a, b]$ на некоторое количество сегментов

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n;$$

если m_i и M_i суть наименьшее и наибольшее значения силы $f(x)$ на σ_i, то произведения $m_i\sigma_i$ и $M_i\sigma_i$ соответственно меньше и больше, чем истинная работа на участке пути σ_i. Сумма $\sum \sigma_i m_i$ меньше работы на всем пути, а сумма $\sum M_i\sigma_i$ больше работы на всем пути. Если существует единственное число, не меньшее всех сумм вида $\sum m_i\sigma_i$ и не большее всех сумм вида $\sum M_i\sigma_i$, то это число и рассматривается как работа силы $f(x)$ на всем данном пути.



Черт. 308.

Как нетрудно видеть, задачи о площади и о работе с математической точки зрения одинаковы. К этой математической задаче приводится ряд различных вопросов геометрии, физики и механики.

Пример.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$ на сегменте $[0, 1]$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ на n равных (для простоты) сегментов (черт. 308):

$$\sigma_1=\left[0, \frac{1}{n}\right], \quad \sigma_2=\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \sigma_i=\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \ldots, \sigma_n=\left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Так как на сегменте $[0, 1]$ функция x^2 возрастает, то для каждого сегмента σ_i наименьшее значение m_i равно $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$, а наибольшее $M_i=\left(\frac{i}{n}\right)^2$.

Итак, имеем:

$$m_1=0, \quad m_2=\left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad m_3=\left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, m_i=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2, \ldots, m_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

$$M_1=\left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad M_2=\left(\frac{2}{n}\right)^2, \quad M_3=\left(\frac{3}{n}\right)^2, \ldots, M_i=\left(\frac{i}{n}\right)^2, \ldots, M_n=1=\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

и

$$\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n=\frac{1}{n}.$$

Для площади ступенчатого входящего многоугольника получим:

$$\sum m_i\sigma_i=m_1\sigma_1+m_2\sigma_2+\ldots+m_n\sigma_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n^3}[1+2^2+\ldots+(n-1)^2].$$

Подобным же образом для площади ступенчатого выходящего многоугольника находим:

$$\sum M_i\sigma_i=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2).$$

Воспользовавшись формулой для суммы квадратов натуральных чисел

$$\sum_{i=1}^{k} i^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

получим:

$$\sum m_i\sigma_i=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \quad \text{и} \quad \sum M_i\sigma_i=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Обе последовательности площадей ступенчатых многоугольников

$$\sum m_i\sigma_i \quad \text{и} \quad \sum M_i\sigma_i$$

имеют одинаковый предел:

$$\lim\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \lim\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

Число $\frac{1}{3}$ есть единственно возможное значение для площади криволинейного треугольника, ограниченного осью абсцисс, параболой и прямой $x=1$.

§ 122. Разбиение сегмента

Рассмотрим некоторый сегмент $[a, b]$. Возьмем произвольно $n-1$ различных точек, расположенных внутри $[a, b]$, и занумеруем их в порядке возрастания:

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b.$$

Для симметрии в обозначениях положим $x_0=a$, $x_n=b$. Весь сегмент $[a, b]$ разбивается на n сегментов:

$$\sigma_1=[x_0, x_1],\ \sigma_2=[x_1, x_2],\ \ldots,\ \sigma_n=[x_{n-1}, x_n].$$

Систему сегментов

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \qquad (\sigma)$$

будем называть разбиением сегмента $[a, b]$, а сами сегменты (σ) — ячейками данного разбиения.

Разбиение сегмента характеризуется следующими свойствами:

1° *Ячейки разбиения не имеют попарно общих внутренних точек: две ячейки могут иметь лишь общую граничную точку.*

2° *Всякая точка сегмента* $[a, b]$ *принадлежит хотя бы одной ячейке. Иначе говоря, ячейки* (σ) *составляют «в сумме» весь сегмент* $[a, b]$.

Для краткости в обозначениях длины ячеек разбиения (σ)

$$x_1-x_0,\quad x_2-x_1,\ \ldots,\ x_n-x_{n-1}$$

будем обозначать теми же буквами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, как и сами ячейки.

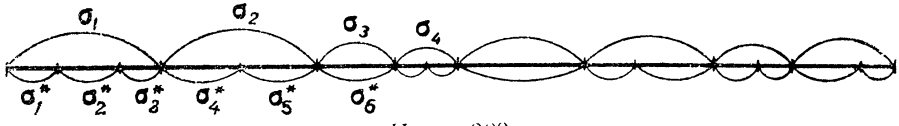
Расстояние $|x_i - x_{i-1}|$ между концами ячейки называется также ее диаметром.

Определение. *Разбиение* (σ^*)

$$\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_N^* \qquad (\sigma^*)$$

называется продолжением разбиения (σ), *если при переходе к* (σ^*) *каждая ячейка разбиения* (σ) *либо остается без изменения, либо подвергается разбиению.*

Таким образом, при переходе от данного разбиения (σ) к какому-нибудь его продолжению остаются без изменения все точки



Черт. 309

деления первоначального разбиения и добавляются, вообще говоря, новые точки деления. При этом каждая из первоначальных ячеек σ_i или остается без изменения, или делится на некоторое число более мелких ячеек (черт. 309).

Теорема. *Каковы бы ни были два различные разбиения* (σ') *и* (σ'') *сегмента* $[a, b]$, *существует разбиение* (σ^*), *являющееся продолжением обоих данных разбиений.*

Черт. 310.

Доказательство. Две ячейки σ_i' и σ_j'', взятые из разбиений (σ') и (σ''), либо не имеют общих внутренних точек, либо их общей частью является некоторый сегмент, в последнем случае обозначим эту общую часть через σ_{ij}^* (не исключена возможность, что σ_{ij}^* совпадает с одним из сегментов σ_i' и σ_i''). Система всевозможных сегментов σ_{ij}^* является разбиением (σ^*) сегмента $[a, b]$. Разбиение (σ^*), называемое суммарным, является продолжением (σ') и (σ''), ч. т. д.

Суммарное разбиение (σ^*) можно получить, если взять в качестве точек деления обоих данных разбиений (черт. 310).

Определение. *Разбиение* (σ) *называется* δ*-разбиением, если диаметр каждой ячейки меньше числа* $\delta > 0$:

$$x_i - x_{i-1} < \delta.$$

Таким образом, длины всех сегментов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ δ-разбиения меньше данного числа δ.

§ 123. Верхняя и нижняя суммы

Рассмотрим функцию $f(x)$, ограниченную на сегменте $[a, b]$. Пусть

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \qquad (\sigma)$$

— некоторое разбиение данного сегмента. Обозначим через M и m верхнюю и нижнюю грани функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, а через M_i и m_i — верхнюю и нижнюю грани $f(x)$ в ячейке σ_i.

Определение. *Сумма произведений длин ячеек σ_i на соответствующие значения верхней грани M*

$$M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + \ldots + M_i\sigma_i + \ldots + M_n\sigma_n = \sum M_i\sigma_i$$

называется верхней суммой функции $f(x)$ при данном разбиении (σ).

Аналогично, сумма произведений

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_n\sigma_n = \sum m_i\sigma_i$$

называется нижней суммой.

Верхнюю и нижнюю суммы при данных $f(x)$ и сегменте $[a, b]$ будем обозначать соответственно так: $\overline{S}(\sigma)$ и $\underline{S}(\sigma)$.

Определение. *Члены сумм $M_i\sigma_i$ и $m_i\sigma_i$, соответствующие ячейке σ_i, называются привзносами ячейки σ_i в этих суммах. Если ячейки $\sigma_k, \sigma_l, \ldots, \sigma_s$ входят в состав разбиения (σ), то части сумм, распространенные на эти ячейки* (т. е. суммы привзносов)

$$m_k\sigma_k + m_l\sigma_l + \ldots + m_s\sigma_s \quad \text{и} \quad M_k\sigma_k + M_l\sigma_l + \ldots + M_s\sigma_s,$$

называются привзносами данных ячеек в нижней и верхней суммах.

Основные свойства верхних и нижних сумм при данных сегменте $[a, b]$ и ограниченной функции $f(x)$ выражаются следующими теоремами.

Теорема I. *Множество всех верхних (нижних) сумм ограничено.*

Доказательство. Для любой ячейки σ_i имеем

$$m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M\ ^*,$$

так как верхняя (нижняя) грань $f(x)$ на σ_i не больше (не меньше), чем верхняя (нижняя) грань на всем сегменте $[a, b]$,

$$M_i \leqslant M \text{ и соответственно } m \leqslant m_i.$$

Следовательно, имеем:

$$m\sigma_i \leqslant m_i\sigma_i \leqslant M_i\sigma_i \leqslant M\sigma_i.$$

---

* Возможность равенства $m = M$ не исключается; в этом случае $f(x) = \text{const}$.

Просуммировав, получим:

$$m\sum\sigma_i \leqslant \sum m_i\sigma_i \leqslant \sum M_i\sigma_i \leqslant M\sum\sigma_i.$$

Так как

$$\sum\sigma_i = (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) = b - a,$$

то

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(\sigma) \leqslant \overline{S}(\sigma) \leqslant M(b-a), \qquad (1)$$

ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Ограничимся случаем, когда на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и положительна. Число $M(b-a)$ выражает площадь выходящего прямоугольника с основанием $[a, b]$. Из всех прямоугольников с основанием $[a, b]$, содержащих данную криволинейную трапецию, этот прямоугольник имеет наименьшую высоту M. Число $m(b-a)$ есть площадь входящего прямоугольника. Из всех прямоугольников с основанием $[a, b]$ и содержащихся в данной криволинейной трапеции этот прямоугольник имеет наибольшую высоту m. Верхняя и нижняя суммы $\overline{S}(\sigma)$ и $\underline{S}(\sigma)$ суть площади ступенчатых — входящего и выходящего — многоугольников, построенных для данного разбиения (σ). Неравенства (1) обозначают, что площади ступенчатого входящего и выходящего многоугольников (при любом разбиении) заключены между площадями входящего и выходящего прямоугольников.

Теорема II. *Если разбиение* (σ^*) *есть продолжение разбиения* (σ), *то*

$$\underline{S}(\sigma) \leqslant \underline{S}(\sigma^*) \quad \text{и} \quad \overline{S}(\sigma^*) \leqslant \overline{S}(\sigma).$$

Кратко это свойство формулируют так: *при продолжении разбиения верхние суммы не возрастают, а нижние не убывают.*

Доказательство. При переходе от разбиения (σ) к (σ^*) ячейка σ_i может не подвергаться делению, и тогда в суммах $\overline{S}(\sigma)$ и $\overline{S}(\sigma^*)$ эта ячейка дает один и тот же привзнос $M_i\sigma_i$. То же относится и к нижним суммам. Допустим, что при переходе к (σ^*) ячейка σ_i подвергается разбиению на более мелкие ячейки:

$$\sigma_i^{(1)},\ \sigma_i^{(2)},\ \ldots,\ \sigma_i^{(l)}.$$

Вычислив привзнос этих ячеек в сумме $\overline{S}(\sigma^*)$, получим:

$$M_i^{(1)}\sigma_i^{(1)} + M_i^{(2)}\sigma_i^{(2)} + \ldots + M_i^{(l)}\sigma_i^{(l)} \leqslant M_i(\sigma_i^{(1)} + \ldots + \sigma_i^{(l)}) = M_i\sigma_i,$$

так как $M_i^{(1)} \leqslant M_i,\ M_i^{(2)} \leqslant M_i, \ldots, M_i^{(l)} \leqslant M_i$.

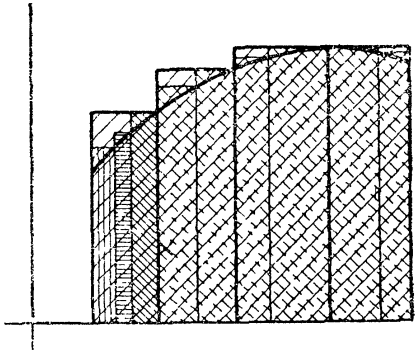
Следовательно, при разбиении ячейки σ_i привзнос соответствующих ячеек в $\overline{S}(\sigma^*)$ не больше привзноса σ_i в $\overline{S}(\sigma)$. Из сказанного следует, что $\overline{S}(\sigma^*) \leqslant \overline{S}(\sigma)$.

Аналогичные неравенства получим для нижних сумм:

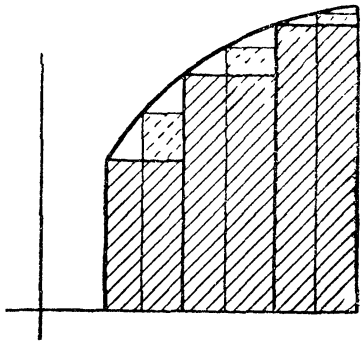
$$m_i^{(1)}\sigma_i^{(1)} + m_i^{(2)}\sigma_i^{(2)} + \ldots + m_i^{(l)}\sigma_i^{(l)} \geqslant m_i\sigma_i,$$

а потому $\underline{S}(\sigma) \leqslant \underline{S}(\sigma^*)$, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. При продолжении разбиения площадь ступенчатого выходящего многоугольника не



Черт. 311.

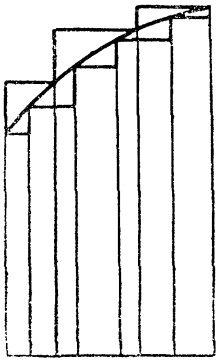


Черт. 312.

возрастает, а ступенчатого входящего многоугольника не убывает (черт. 311 и 312).

Теорема III. *Произвольная верхняя сумма не меньше любой нижней суммы.*

Доказательство. Для сумм $\overline{S}(\sigma)$ и $\underline{S}(\sigma)$, составленных при одном и том же разбиении, имеем:



Черт. 313.

$\underline{S}(\sigma) \leqslant \overline{S}(\sigma)$ (см. доказательство теоремы I).

Если две суммы $\underline{S}(\sigma)$ и $\overline{S}(\sigma')$ составлены для двух различных разбиений, то, составив суммы $\overline{S}(\sigma^*)$ и $\underline{S}(\sigma^*)$ для разбиения (σ^*), являющегося продолжением (σ) и (σ'), получим:

$$\underline{S}(\sigma) \leqslant \underline{S}(\sigma^*) \leqslant \overline{S}(\sigma^*) \leqslant \overline{S}(\sigma'), \text{ ч. т. д.}$$

Геометрическая интерпретация. Площадь любого ступенчатого выходящего многоугольника не меньше площади любого ступенчатого входящего многоугольника (черт. 313).

§ 124. Интегральные суммы

Рассмотрим некоторое разбиение

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n \qquad (\sigma)$$

данного сегмента $[a, b]$. Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ произ-

вольно выбранные n точек в соответствующих ячейках:

$$\xi_1 \in \sigma_1,\ \xi_2 \in \sigma_2,\ \ldots,\ \xi_i \in \sigma_i,\ \ldots,\ \xi_n \in \sigma_n.$$

Посредством неравенств эти условия запишутся так:

$$x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1,\ \ldots,\ x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i,\ \ldots,\ x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n$$

(где x_i — точки деления). Пусть $f(x)$ — функция, ограниченная на сегменте $[a, b]$.

Определение. *Сумма произведений длин ячеек σ_i на значения $f(\xi_i)$ функции $f(x)$ в соответствующих точках ξ_i называется интегральной суммой:*

$$S = \sum f(\xi_i)\,\sigma_i = f(\xi_1)\,\sigma_1 + f(\xi_2)\,\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\sigma_n.$$

При данной функции $f(x)$ значение интегральной суммы определяется заданием разбиения (σ) и выбором точек ξ_i в соответствующих ячейках.

Верхняя (аналогично нижняя) сумма может не быть суммой вида $\sum f(\xi_i)\,\sigma_i$. В самом деле, верхняя грань функции $f(x)$ в ячейке σ_i может не быть значением $f(x)$ ни в какой точке ξ_i этой ячейки. Для непрерывной функции в ячейке σ_i всегда найдется пара точек ξ_i и η_i, в которых $f(\xi_i) = M_i$ и $f(\eta_i) = m_i$, и поэтому для непрерывной функции верхняя и нижняя суммы являются интегральными суммами.

При любом данном разбиении (σ) произвольная интегральная сумма заключена между верхней и нижней суммами. В самом деле:

$$\underline{S}(\sigma) = \sum m_i \sigma_i \leqslant \sum f(\xi_i)\,\sigma_i \leqslant \sum M_i \sigma_i = \overline{S}(\sigma)$$

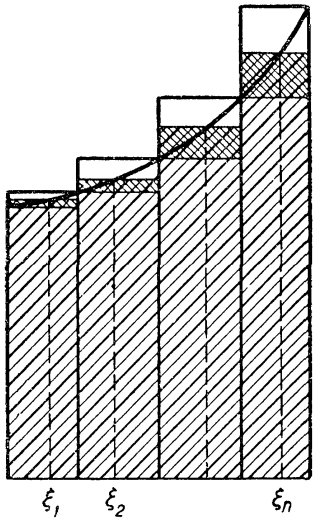
(так как $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$).

Верхняя (нижняя) сумма является верхней (нижней) гранью для множества всех интегральных сумм, составленных при данном разбиении (σ). В самом деле, значение $f(\xi_i)$ может быть взято либо равным, либо как угодно мало отличающимся от соответствующей верхней (нижней) грани M_i (или m_i).

В дальнейшем, во избежание частых оговорок, будем считать всегда возможным при составлении интегральных сумм в произведении $f(\xi_i)\,\sigma_i$ вместо сомножителя $f(\xi_i)$ брать M_i, а также m_i, где M_i и m_i — верхняя и нижняя грани $f(x)$ в ячейке σ_i. Приняв это соглашение, мы включаем в множество всех интегральных сумм верхнюю и нижнюю суммы. Таким образом, *верхняя и нижняя суммы считаются интегральными суммами.*

Геометрическая интерпретация. Сумма $\sum f(\xi_i)\,\sigma_i$ есть площадь ступенчатого многоугольника, состоящего из прямоугольников с основаниями σ_i, высоты которых $f(\xi_i)$ равны ординатам точек графика, абсциссы которых равны ξ_i.

Площадь всякого такого многоугольника не больше площади соответствующего выходящего и не меньше площади входящего многоугольников (черт. 314).



Черт. 314.

Теорема. *Привзнос ячеек* σ_k, σ_l, ..., σ_s (*входящих в состав разбиения* (σ)) *в любой интегральной сумме по абсолютной величине не больше, чем*

$$N(\sigma_k+\sigma_l+\ldots+\sigma_s),$$

где N *— верхняя грань* $|f(x)|$ *на сегменте* $[a, b]$.

Доказательство. Имеем:

$$|f(\xi_k)\sigma_k+f(\xi_l)\sigma_l+\ldots+f(\xi_s)\sigma_s|\leqslant$$
$$\leqslant|f(\xi_k)|\sigma_k+|f(\xi_l)|\sigma_l+\ldots+$$
$$+|f(\xi_s)|\sigma_s\leqslant N(\sigma_k+\sigma_l+\ldots+\sigma_s),$$

ибо $|f(\xi_i)|$ (а также $|M_i|$ и $|m_i|$) не больше N, ч. т. д.

§ 125. Предел интегральных сумм

Определение. *Число* I *называется пределом интегральных сумм функции* $f(x)$, *ограниченной на сегменте* $[a, b]$, *если при любом заданном числе* $\varepsilon>0$ *существует такое число* $\delta>0$, что неравенство

$$|S-I|<\varepsilon \qquad (1)$$

выполняется для любой интегральной суммы S, *составленной при произвольном* δ*-разбиении сегмента* $[a, b]$.

Иными словами, каков бы ни был способ деления сегмента $[a, b]$ и как бы ни выбирались точки ξ_i в соответствующих ячейках, неравенство

$$\left|\sum f(\xi_i)\sigma_i-I\right|<\varepsilon$$

выполняется, если диаметры всех ячеек разбиения меньше, чем δ. Итак, *если существует предел интегральных сумм, то неравенство* (1) *выполняется для произвольного «достаточно мелкого» разбиения* δ. Символически это записывается так:

$$\lim S=\lim\sum f(\xi_i)\sigma_i=I.$$

Понятие предела интегральных сумм отлично от понятия предела функции в точке. Здесь мы встречаемся с новой концепцией предела. Так, например, понятие окрестности значения

аргумента, лежащее в основе определения предела функции, в данном случае непосредственно не применимо. Поэтому было бы логической ошибкой без надлежащего обоснования применять теоремы о пределах функций к пределам интегральных сумм.

При оперировании с пределами интегральных сумм существенно установить справедливость основных теорем о пределах функций в точке (конечных) применительно к пределам интегральных сумм. Доказательства этих теорем можно провести в строгом соответствии с доказательствами свойств предела функции в точке. Докажем, например, следующую теорему.

Теорема. *Интегральные суммы функции $f(x)$, ограниченной на сегменте $[a, b]$, не могут иметь двух различных пределов.*

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению, что

$$\lim S = I \quad \text{и} \quad \lim S = J$$

и $I \neq J$. Пусть U_I и U_J (соответственно) ε-окрестности чисел I и J, не имеющих общих точек.

Так как $\lim S = J$, то значение S содержится в окрестности U_I, т. е. $|S - I| < \varepsilon$, коль скоро разбиение (σ) является δ_1-разбиением.

Так как $\lim S = J$, то значение S содержится в окрестности U_J, т. е. $|S - J| < \varepsilon$, коль скоро разбиение (σ) является δ_2-разбиением.

Пусть δ — любое положительное число, не большее наименьшего из чисел δ_1 и δ_2. Если (σ) является δ-разбиением, то диаметры всех его ячеек, будучи меньшими δ, меньше и чем δ_1 и чем δ_2, значит, (σ) является одновременно и δ_1-, и δ_2-разбиением. Следовательно, соответствующая интегральная сумма S удовлетворяет обоим неравенствам:

$$|S - I| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |S - J| < \varepsilon,$$

что невозможно, так как окрестности U_I и U_J не имеют общих точек. Полученное противоречие доказывает теорему.

Можно доказать в общем виде, что основные теоремы о пределах интегральных сумм в специальных доказательствах не нуждаются. Для этого сопоставим определения конечного предела функции в данной точке и предела интегральных сумм.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то имеем

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad x \in U_a,$$

где окрестность U_a точки a определяется заданием ε.

Значение интегральной суммы определяется заданием разбиения (σ) (с выбранными точками ξ_i в его ячейках). Если $\lim S = I$, то $|S - I| < \varepsilon$, если разбиение (σ) есть δ-разбиение, где δ определяется заданием ε. Обозначим через U_δ множество всех

δ-разбиений сегмента $[a, b]$; тогда имеем

$$|S - I| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad (\sigma) \in U_\delta.$$

В доказательствах теорем о пределе функции $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ из свойств окрестностей точки a мы пользовались свойством I_U.

Это свойство присуще и множествам разбиений U_δ. В самом деле, пусть U_{δ_1} и U_{δ_2} — два такие множества. Следовательно, U_{δ_1} состоит из всех разбиений с диаметрами ячеек, меньшими δ_1, а U_{δ_2} — из разбиений с диаметрами ячеек, меньшими δ_2. Если δ не превышает наименьшего из чисел δ_1 и δ_2, то всякое δ-разбиение есть в одно и то же время и δ_1-разбиение, и δ_2-разбиение, а потому

$$U_\delta \subset U_{\delta_1} \quad \text{и} \quad U_\delta \subset U_{\delta_2}.$$

Отсюда вывод: *поскольку остаются в силе предпосылки, на которых основаны доказательства теорем о пределах, остаются в силе и сами теоремы.*

Определение. *Функция $f(x)$, ограниченная на сегменте $[a, b]$, называется интегрируемой на этом сегменте, если существует предел интегральных сумм данной функции.*

Предел интегральных сумм называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Определенный интеграл обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

Сегмент $[a, b]$ будем называть также областью интегрирования.

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интеграла, функция $f(x)$ — подинтегральной функцией.

Если область интегрирования обозначена одной буквой, например $K = [a, b]$, то пишут также

$$I = \int_K f(x)\, dx.$$

§ 126. Теорема о пределах верхних и нижних сумм

По доказанному, множества верхних и нижних сумм, составленных для функции $f(x)$, ограниченной на данном сегменте $[a, b]$, являются ограниченными; поэтому эти множества имеют конечные нижние и верхние грани.

Теорема. *Для всякой функции $f(x)$, ограниченной на сегменте $[a, b]$,*

1° *существует предел верхних интегральных сумм. Этот предел равен нижней грани множества всех верхних сумм*

$$\lim \sum M_i \sigma_i = \bar{I};$$

2° *существует предел нижних интегральных сумм. Этот предел равен верхней грани множества всех нижних сумм*

$$\lim \sum m_i \sigma_i = \underline{I}.$$

Доказательство. Докажем утверждение 1° (2° доказывается аналогично). Пусть $\bar{I}$ есть нижняя грань множества всех верхних сумм. В силу свойств нижней грани, имеем $\bar{I} \leqslant \bar{S}(\sigma)$, где $\bar{S}(\sigma)$ — верхняя сумма, составленная для любого разбиения. Требуется доказать, что при данном $\varepsilon > 0$ существует такое число δ, что неравенство

$$0 \leqslant \bar{S}(\sigma) - \bar{I} < \varepsilon$$

имеет место, если диаметры ячеек разбиения (σ) меньше, чем δ.

По определению нижней грани, существует такое разбиение

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m, \qquad (\tau)$$

что

$$0 \leqslant \bar{S}(\tau) - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$ точки деления разбиения (τ), лежащие внутри $[a, b]$. Рассмотрим какое-либо δ-разбиение (σ) сегмента $[a, b]$. Возьмем любую точку l_i, граничную для двух ячеек разбиения (τ); эта точка либо является внутренней для некоторой ячейки разбиения (σ), либо общей граничной точкой двух ячеек. Следовательно, самое большее две ячейки с суммой длин, меньшей 2δ, «покрывают» точку l_i. Система $m-1$ точек $l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$ может быть покрыта самое большее $2(m-1)$ ячейками разбиения (σ) с общей суммой длин, меньшей $2(m-1)\delta$.

Эти ячейки, покрывающие точки деления разбиения (τ), дадут в верхней сумме $S(\sigma)$ привзнос, по абсолютной величине меньший, чем $2(m-1)N\delta$ (см. стр. 444, теорема о привзносе), где N есть верхняя грань $|f(x)|$ на сегменте $[a, b]$. Если $\delta < \frac{\varepsilon}{8(m-1)N}$, то для любого δ-разбиения (σ), ячейки, покрывающие точки $l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$, дадут привзнос, меньший $\frac{\varepsilon}{4}$. Возьмем произвольное δ-разбиение (σ) и составим суммарное разбиение (σ^*), присоединив к точкам деления (σ) точки деления (τ). Разбиение (σ^*) также является δ-разбиением.

Так как $\overline{S}(\sigma^*) \leqslant \overline{S}(\tau)$, то и подавно

$$0 \leqslant \overline{S}(\sigma^*) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Составим разность $\overline{S}(\sigma) - \overline{S}(\sigma^*)$; при вычитании могут остаться привзносы лишь тех ячеек обеих сумм, которые покрывают точки $l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$. Но в каждой сумме $\overline{S}(\sigma)$ и $\overline{S}(\sigma^*)$ такие ячейки дают привзнос, по абсолютной величине меньший $\frac{\varepsilon}{4}$, поэтому:

$$0 \leqslant \overline{S}(\sigma) - \overline{S}(\sigma^*) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сопоставив эти неравенства с неравенствами (1), получим:

$$0 \leqslant \overline{S}(\sigma) - \overline{I} < \varepsilon, \text{ ч. т. д.}$$

Следствие. При нахождении предела верхних (нижних) сумм можно пользоваться разбиениями частного вида. Так, например, можно составить любую последовательность

$$(\sigma^{(1)}), (\sigma^{(2)}), \ldots, (\sigma^{(n)}), \ldots$$

разбиений, но при непременном условии, чтобы наибольший из диаметров ячеек разбиения $(\sigma^{(i)})$ имел предел, равный нулю. Предел соответствующей последовательности верхних (нижних) сумм является одним и тем же числом $\overline{I}$ (или $\underline{I}$) вне зависимости от специального выбора последовательности разбиений. В частности, можно пользоваться делением сегмента $[a, b]$ на равные части.

§ 127. Условия интегрируемости

Теорема. *Для интегрируемости функции $f(x)$, ограниченной на сегменте $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы предел верхних сумм был равен пределу нижних сумм.*

Доказательство. Условие необходимо. В самом деле, если $\underline{I} \neq \overline{I}$, то из всего множества интегральных сумм можно выделить две части, именно верхние суммы и нижние суммы, имеющие различные пределы $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Отсюда заключаем, что предел для множества всех интегральных сумм не существует.

Условие достаточно. Если $\lim \overline{S}(\sigma) = \lim \underline{S}(\sigma) = I$, то существуют два числа δ_1 и δ_2 — такие, что

$$I < \overline{S}(\sigma) < I + \varepsilon,$$

если (σ) является δ_1-разбиением, и

$$I - \varepsilon < \underline{S}(\sigma) < I,$$

если (σ) является δ_2-разбиением. Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, тогда для любой интегральной суммы имеем:

$$I-\varepsilon \leqslant \underline{S}(\sigma) \leqslant \sum f(\xi_i)\,\sigma_i \leqslant \overline{S}(\sigma) \leqslant I+\varepsilon,$$

если разбиение (σ) есть δ-разбиение. Итак, все интегральные суммы $S(\sigma)$ произвольного δ-разбиения содержатся в ε-окрестности точки I, а потому

$$I=\lim S(\sigma), \text{ ч. т. д.}$$

Доказанному необходимому и достаточному условию интегрируемости можно придать нижеследующую удобную для применения форму. Из неравенства $\underline{S}(\sigma) \leqslant \overline{S}(\sigma)$ следует, что $\lim \underline{S}(\sigma) \leqslant \lim \overline{S}(\sigma)$ или $\underline{I} \leqslant \overline{I}$. Поэтому для любого разбиения имеем:

$$\underline{S}(\sigma) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}(\sigma),$$

откуда

$$0 \leqslant \overline{I}-\underline{I} \leqslant \overline{S}(\sigma)-\underline{S}(\sigma).$$

Представим разность $\overline{S}(\sigma)-\underline{S}(\sigma)$ в следующем виде:

$$\overline{S}(\sigma)-\underline{S}(\sigma)=\sum M_i\sigma_i-\sum m_i\sigma_i=$$
$$=\sum (M_i-m_i)\,\sigma_i=\sum \omega_i\sigma_i=\omega_1\sigma_1+\omega_2\sigma_2+\ldots+\omega_n\sigma_n.$$

Здесь через ω_i обозначена разность M_i-m_i между верхней и нижней гранями данной функции $f(x)$ в ячейке σ_i. Эта разность ω_i называется колебанием $f(x)$ в ячейке σ_i.

Обозначим

$$\Omega(\sigma)=\sum \omega_i\sigma_i=\overline{S}(\sigma)-\underline{S}(\sigma).$$

В силу теоремы о пределах верхних и нижних сумм,

$$\lim \Omega(\sigma)=\lim [\overline{S}(\sigma)-\underline{S}(\sigma)]=\lim \overline{S}(\sigma)-\lim \underline{S}(\sigma)=\overline{I}-\underline{I}.$$

Отсюда получаем необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ в следующем виде:

$$\lim \Omega(\sigma)=0.$$

В самом деле, если $\lim \Omega(\sigma)=0$, то $\overline{I}=\underline{I}$, и обратно, если $\overline{I}=\underline{I}$, то $\lim \Omega(\sigma)=0$.

Из неравенств $0<\overline{I}-\underline{I} \leqslant \Omega(\sigma)$ следует, что для доказательства равенства $\overline{I}=\underline{I}$ достаточно установить, что при *любом заданном* $\varepsilon>0$ существуют такие разбиения, для которых $\Omega(\sigma)<\varepsilon$. При этом вполне допустимо пользоваться какими-либо разбиениями частного вида (например, разбиениями сегмента на равные части).

Примеры.

1. Докажем, что функция e^x интегрируема на любом сегменте $[a, b]$. Разделим сегмент $[a, b]$ на n равных частей, положив $\frac{b-a}{n}=h$. Сегменты разбиения суть:

$$[a, a+h], [a+h, a+2h], \ldots, [a+ih, a+(i+1)h], \ldots, [a+(n-1)h, b].$$

Так как e^x возрастает, то

$$m_1=e^a,\ m_2=e^{a+h}=e^ae^h,\ \ldots,\ m_{i+1}=e^ae^{ih},\ \ldots,\ m_n=e^ae^{(n-1)h},$$
$$M_1=e^ae^h,\ \ldots,\ M_i=e^ae^{ih},\ M_n=e^b=e^ae^{nh}.$$

Обозначив верхнюю и нижнюю суммы при делении сегмента на n равных частей соответственно через $\overline{S}_n$ и $\underline{S}_n$, получим:

$$\underline{S}_n=e^ah+e^ae^hh+\ldots+e^ae^{ih}h+\ldots+e^ae^{(n-1)h}h=$$
$$=e^ah\,[1+e^h+\ldots+e^{ih}+\ldots e^{(n-1)h}]=\ =e^ah\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1}=h\,\frac{e^b-e^a}{e^h-1}.$$

Аналогично для верхней суммы будем иметь:

$$\overline{S}_n=e^ah\,[e^h+e^{2h}+\ldots+e^{nh}]=he^a\,\frac{e^he^{nh}-e^h}{e^h-1}=e^h\cdot h\,\frac{e^b-e^a}{e^h-1}.$$

Так как при нахождении пределов верхних и нижних сумм можно пользоваться частного вида разбиениями (в нашем примере разбиением на равные части), то

$$\lim\overline{S}=\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n=\lim_{h\to0}e^h\cdot h\,\frac{e^b-e^a}{e^h-1}=e^b-e^a,$$

и аналогично:

$$\lim\underline{S}=\lim_{h\to0}h\,\frac{e^b-e^a}{e^h-1}=e^b-e^a.$$

Функция интегрируема, ибо

$$\lim\overline{S}=\lim\underline{S}\quad\text{и, следовательно,}\quad\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a.$$

2. Докажем, что функция $f(x)=x^k$ интегрируема на любом сегменте $[a, b]$, $0<a<b$, где k—любое положительное число. Разделим сегмент $[a, b]$ на части так, чтобы длины сегментов разбиения образовали геометрическую прогрессию. Пусть n—натуральное число; положим $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}=q$ или $b=aq^n$. Рассмотрим точки

$$a<aq<aq^2<,\ \ldots,\ <aq^i<,\ \ldots,\ <aq^n=b$$

и соответствующие сегменты

$$[a, aq], [aq, aq^2], \ldots, [aq^{i-1}, aq^i], \ldots, [aq^{n-1}, aq^n].$$

Так как x^k возрастает, то $m_i=(aq^{i-1})^k=a^kq^{k(i-1)}$ и $M_i=a^kq^{ki}$. Обозначив верхнюю и нижнюю суммы через $\overline{S}_n$ и $\underline{S}_n$, получим:

$$\overline{S}_n=a^kq^k(aq-a)+\ldots+a^kq^{ki}(aq^i-aq^{i-1})+\ldots+a^kq^{kn}(aq^n-aq^{n-1})=$$
$$=a^{k+1}(q-1)[q^k+q^{2k+1}+\ldots+q^{ki+i-1}+\ldots+q^{kn+n-1}]=$$
$$=a^{k+1}(q-1)\frac{q^{(k+1)n+k}-q^k}{q^{k+1}-1}=(q-1)\,q^k\,\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{q^{k+1}-1}.$$

Аналогично:

$$\underline{S}_n=a^k(aq-a)+\ldots+a^kq^{k(n-1)}(aq^n-aq^{n-1})=(q-1)\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{q^{k+1}-1}.$$

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} q=\lim\sqrt[n]{\frac{b}{a}}=1$ и

$$\lim\overline{S}=\lim_{q\to1}q^k(q-1)\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{q^{k+1}-1}=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1};$$

$$\lim\underline{S}=\lim_{q\to1}(q-1)\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{q^{k+1}-1}=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Следовательно, данная функция интегрируема и

$$\int_a^b x^k\,dx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

3. Функция Дирихле неинтегрируема на любом сегменте. В самом деле, в любой ячейке σ_i имеем $M_i=1$ и $m_i=0$. Следовательно,

$$\overline{S}=\Sigma M_i\sigma_i=\Sigma\sigma_i=b-a \quad \text{и} \quad \underline{S}=\Sigma m_i\sigma_i=0,$$

а потому $\lim\overline{S}=b-a$, тогда как $\lim\underline{S}=0$.

§ 128. Основные классы интегрируемых функций

Теорема I. *Всякая непрерывная на сегменте* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство. В силу теоремы о равномерной непрерывности (§ 39), существует такое число δ, что

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{если} \quad |x_2-x_1|<\delta$$

для любой пары точек x_2 и x_1, содержащихся на $[a, b]$.

Пусть (σ) — любое δ-разбиение сегмента $[a, b]$. Так как диаметры ячеек σ_i меньше δ, то разность значений функции $f(x)$ в любых двух точках ячейки σ_i меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. По теореме о наибольшем и наименьшем значениях, M_i и m_i суть наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в ячейке σ_i:

$$f(\xi_i)=M_i \quad \text{и} \quad f(\eta_i)=m_i.$$

Поэтому для любой ячейки имеем:

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

откуда получим:

$$\Omega(\sigma) = \sum (M_i - m_i)\,\sigma_i = (M_1 - m_1)\,\sigma_1 + (M_2 - m_2)\,\sigma_2 + \ldots + (M_n - m_n)\,\sigma_n < \frac{\varepsilon}{b-a}(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n) = \varepsilon.$$

Итак, $\Omega(\sigma) < \varepsilon$, а потому $\lim \Omega(\sigma) = 0$, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Ограничимся (как и выше) случаем, когда непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция положительна на этом сегменте. Множества верхних и нижних сумм имеют общую грань I:

$$\underline{S} \leqslant I \leqslant \overline{S}.$$

I есть единственное число, не меньшее площади любого ступенчатого входящего многоугольника и не большее площади любого ступенчатого выходящего многоугольника. Это число рассматривается как площадь соответствующей криволинейной трапеции.

Примеры.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = x$ на сегменте $[a, b]$. Эта функция интегрируема в силу непрерывности. Разделив сегмент $[a, b]$ произвольным образом на n частей $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, положим

$$\xi_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ \ldots, \ \xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \ \ldots, \ \xi_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}.$$

Для соответствующей интегральной суммы будем иметь:

$$\sum_i f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_i \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) = \sum_i \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} = \frac{1}{2}[(x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \ldots + (x_n^2 - x_{n-1}^2)] = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Все эти суммы S имеют одно и то же значение:

$$S = \text{const} = \frac{b^2 - a^2}{2}; \quad \text{следовательно,} \quad \lim S = \frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x\,dx.$$

2. Функция $\sin x$ непрерывна, а потому интегрируема на любом сегменте $[a, b]$. Разделив сегмент на n равных частей, положим $h = \frac{b-a}{n}$ и, взяв в качестве ξ_i крайнюю правую точку сегмента σ_i, получим:

$$S_n = h[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin(a+nh)].$$

Имеем:

$$\sin(a+ih) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{2i-1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2i+1}{2}h\right)\right].$$

Подставив в выражение для S_n, после сокращения получим:

$$S_n=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right].$$

$$\int_a^b \sin x\,dx=\lim S_n=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right]=$$

$$=\cos a-\cos b.$$

3. Вычислим

$$\int_a^b \ln x\,dx, \quad \text{где} \quad 0<a<b.$$

Разобьем сегмент $[a, b]$ точками:

$$a,\ aq,\ \ldots,\ aq^n=b, \quad \text{где} \quad q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Взяв в качестве ξ_i крайнюю правую точку сегмента $[aq^{i-1}, aq^i]$, получим:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(aq^i-aq^{i-1})\ln(aq^i)=a(q-1)\Sigma q^{i-1}(\ln a+i\ln q)=$$

$$=a\ln a\,(q-1)\Sigma q^{i-1}+a(q-1)\ln q\,\Sigma i q^{i-1}.$$

Имеем:

$$(q-1)\sum_{i=1}^{n} q^{i-1}=q^n-1.$$

Для вычисления суммы $\sum_{i=1}^{n} iq^{i-1}$ примем во внимание, что эта сумма равна производной по q от суммы членов геометрической прогрессии:

$$\sum iq^{i-1}=\frac{d}{dq}\sum_{i=1}^{n} q^i=\frac{d}{dq}\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)=\left[\frac{(n+1)q^n}{q-1}-\frac{q^{n+1}-1}{(q-1)^2}\right];$$

подставив найденные значения сумм в выражения для S_n и заменив q^n на $\frac{b}{a}$, после элементарных преобразований получим:

$$S_n=b\ln b-a\ln a-(bq-a)\frac{\ln q}{q-1}+b\ln q.$$

Следовательно,

$$\int_a^b \ln x\,dx=\lim_{q\to 1} S_n=b(\ln b-1)-a(\ln a-1).$$

4. Функция, определенная на сегменте [0, 1] законом соответствия

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{(если } x\text{—рациональное число);} \\ -x & \text{(если } x\text{—иррациональное число),} \end{cases}$$

неинтегрируема на этом сегменте. Пусть (σ)—какое-нибудь разбиение сегмента [0, 1]. Пусть $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$—любые рациональные точки, взятые на сегментах $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, а точки $\xi_1'', \xi_2'', \ldots, \xi_n''$—любые иррациональные точки на тех же сегментах. Составим следующие интегральные суммы для функции $f(x)$:

$$S^*=\Sigma f(\xi_i')\,\sigma_i \quad \text{и} \quad S^{**}=\Sigma f(\xi_i'')\,\sigma_i.$$

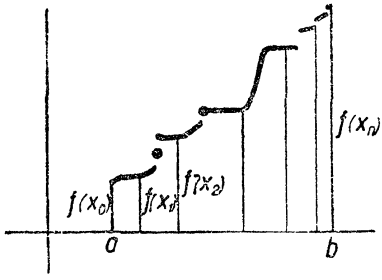
Сумма S^* принадлежит множеству интегральных сумм, составленных для функции $f_1(x)=x$, а потому (см. пример 1)

$$\lim S^*=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Сумма S^{**} принадлежит множеству интегральных сумм, составленных для функции $f_2(x)=-x$, а потому (как нетрудно убедиться)

$$\lim S^{**}=\int_0^1 (-x)\,dx=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, интегральные суммы для данной функции не имеют предела, и функция $f(x)$ неинтегрируема.



Черт. 315.

Теорема II. *Всякая монотонная на сегменте* $[a, b]$ *функция интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь δ-разбиение данного сегмента

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots$$
$$\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b.$$

Предположим для определенности, что $f(x)$ не убывает, не будучи константой; тогда M_i есть значение $f(x)$ в правом конце сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, а m_i есть значение $f(x)$ в левом конце того же сегмента:

$$M_i=f(x_i), \quad m_i=f(x_{i-1}) \qquad \text{(черт. 315).}$$

По условию, $|x_i-x_{i-1}|<\delta$, а потому имеем:

$$\Omega(\sigma)=\sum (M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\leqslant\sum [f(x_i)-f(x_{i-1})]\,\delta=$$
$$=\delta[(f(x_1)-f(x_0))+(f(x_2)-f(x_1))+\ldots+$$
$$+(f(x_n)-f(x_{n-1}))]=\delta[f(b)-f(a)].$$

Если выбрать $\delta<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, то будем иметь $\Omega(\sigma)<\varepsilon$.

Следовательно, $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Определение. *Множество точек* $\mathfrak{M}$ *называется (по Жордану) множеством меры нуль, если при любом* $\varepsilon > 0$ *существует конечная система сегментов*

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k,$$

для которой сумма длин $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k$ *меньше* ε *и которая содержит внутри себя данное множество.*

Кратко говорят, что *множество меры нуль (по Жордану) может быть покрыто конечным числом сегментов со сколь угодно малой суммой длин.*

Сегменты $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ можно предполагать не имеющими попарно общих точек, так как всякие два сегмента, имеющие общую внутреннюю или граничную точку, можно заменить одним сегментом.

Число сегментов k для различных значений ε, вообще говоря, различно и определяется заданием ε.

В частности, *всякое конечное множество точек есть множество меры нуль.* В самом деле, если множество $\mathfrak{M}$ состоит из p различных точек, то, поместив каждую точку внутрь сегмента длины, меньшей $\frac{\varepsilon}{p}$, получим систему сегментов с суммой длин, меньшей ε, покрывающую $\mathfrak{M}$.

Примеры.

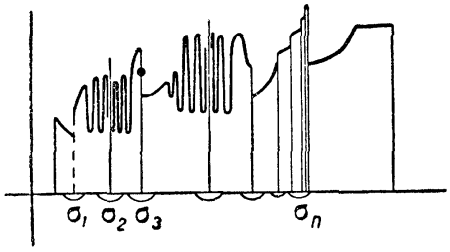
1. Множество точек $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ есть множество меры нуль. Возьмем сегмент $[-\varepsilon', \varepsilon']$, где число $\varepsilon' > 0$ не равно ни одному из чисел $\frac{1}{2^n}$. Вне сегмента $[-\varepsilon', \varepsilon']$ содержится конечное число точек данного множества; покроем эти точки сегментами с суммой длин, меньшей $\frac{\varepsilon}{2}$. Эти сегменты и сегмент $[-\varepsilon', \varepsilon']$ покрывают данное множество и имеют сумму длин, меньшую $2\varepsilon' + \frac{\varepsilon}{2}$. Если взять $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4}$, то сумма длин будет меньше, чем ε.

2. Множество всех рациональных точек интервала (0, 1) (либо любого другого промежутка) не есть множество меры нуль (по Жордану). В самом деле, конечная система сегментов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, покрывающая множество рациональных точек интервала (0, 1), покрсет весь этот интервал. В противном случае, удалив эти сегменты из интервала (0, 1), мы получили бы в остатке систему промежутков, не содержащих рациональных точек, что невозможно.

Теорема III. *Если множество точек разрыва функции* $f(x)$, *ограниченной на сегменте* $[a, b]$, *имеет меру нуль (по Жордану), то функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon' > 0$—некоторое заданное число. Построим систему сегментов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ (черт. 316), содержащих внутри себя все точки разрыва функции $f(x)$ и имеющих сумму длин, меньшую, чем ε'. Возьмем любое разбиение $(\sum)$

сегмента $[a, b]$ при единственном условии, чтобы сегменты $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ входили в состав этого разбиения, для чего достаточно, чтобы концы этих сегментов были точками деления и чтобы никакая точка деления не содержалась внутри этих сегментов. Пусть N есть верхняя грань $|f(x)|$ на сегменте $[a, b]$. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ — ячейки $(\sum)$, отличные от ячеек $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.



Черт. 316.

В каждой из ячеек τ_i функция $f(x)$ непрерывна; следовательно, эта ячейка может быть разбита на столь малые части

$$\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \ldots, \tau_i^{(q)},$$

что колебание $f(x)$ на каждой из этих частей $M_{\tau_i^{(k)}} - m_{\tau_i^{(k)}} < \varepsilon''$, где $\varepsilon'' > 0$ — любое наперед заданное число. Чтобы не вводить излишних обозначений, будем с самого начала предполагать сами ячейки τ_i достаточно малыми, чтобы для каждой из них имело место неравенство:

$$M_{\tau_i} - m_{\tau_i} = \omega_{\tau_i} < \varepsilon'';$$

сумму $\Omega(\sum)$ можно представить в виде суммы привзносов ячеек σ_i и τ_i:

$$\Omega(\sum) = \sum \tau_i \omega_{\tau_i} + \sum \sigma_i \omega_{\sigma_i}.$$

Для первого привзноса имеем неравенство:

$$\sum \tau_i \omega_{\tau_i} < \varepsilon'' \sum \tau_i < \varepsilon''(b-a).$$

Для второго привзноса получим:

$$\sum \sigma_i \omega_{\sigma_i} < 2N \sum \sigma_i < 2N\varepsilon',$$

так как $\omega_i \leqslant |M_i| + |m_i| \leqslant 2N$. Следовательно,

$$\Omega(\sum) < 2N\varepsilon' + \varepsilon''(b-a).$$

Если числа ε' и ε'' выбрать при условиях

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4N} \quad \text{и} \quad \varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{то получим} \quad \Omega(\sum) < \varepsilon,$$

а потому $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, ч. т. д.

Следствие. *Если ограниченная на сегменте* $[a, b]$ *функция имеет на этом сегменте конечное число точек разрыва, то она интегрируема.*

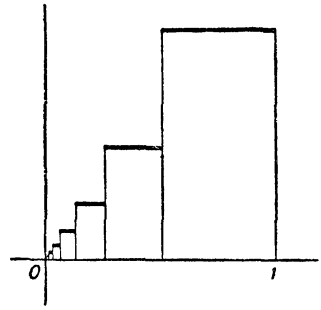
Функциями, удовлетворяющими условиям доказанных теорем, не исчерпывается класс всех интегрируемых функций (см.

ниже пример 3). Выявление класса всех интегрируемых функций в зависимости от структуры множества точек разрыва выходит за пределы данной книги.

Примеры.

1. Функция (черт. 317)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \left(\text{если } \frac{1}{2}<x\leqslant 1\right),\\ \frac{1}{2} & \left(\text{если } \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}\right),\\ \frac{1}{4} & \left(\text{если } \frac{1}{8}<x\leqslant\frac{1}{4}\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0 & (\text{если } x=0)\end{cases}$$

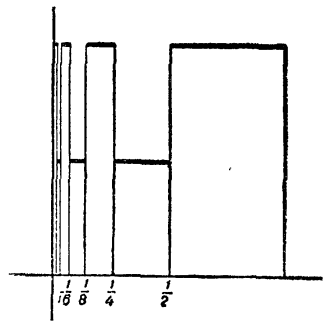


Черт. 317.

интегрируема на сегменте [0, 1], так как она монотонна (не убывает).

2. Функция, определенная законом соответствия (черт. 318),

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \left(\text{если } \frac{1}{2}<x\leqslant 1\right),\\ \frac{1}{2} & \left(\text{если } \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}\right),\\ 1 & \left(\text{если } \frac{1}{8}<x\leqslant\frac{1}{4}\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 1 & \left(\text{если } \frac{1}{2^{2k-1}}<x\leqslant\frac{1}{2^{2k-2}}\right),\\ \frac{1}{2} & \left(\text{если } \frac{1}{2^{2k}}<x\leqslant\frac{1}{2^{2k-1}}\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 1 & (\text{если } x=0),\end{cases}$$



Черт. 318.

интегрируема на сегменте [0, 1], так как множество ее точек разрыва

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}\ldots$$ есть множество меры нуль.

3. Рассмотрим функцию $F(x)$, определенную на сегменте [0, 1] следующим законом соответствия $F(x)=0$, если x — иррациональное число или если $x=0$, и $F(x)=\frac{1}{q}$, если x — рациональное число, где q есть знаменатель несократимой дроби, изображающей $x\left(x=\frac{p}{q}\right)$. На странице 157 мы показали, что эта функция непрерывна при всяком иррациональном значении x и разрывна при всяком рациональном $x\neq 0$. Функция $F(x)$ не удовлетворяет ни одной из теорем I, II, III и вместе с тем интегрируема на сегменте [0, 1]. В самом деле, пусть N — некоторое натуральное число, которое можно наперед выбрать как угодно большим. Рассмотрим множество всех дробей, содержащихся на сегменте [0, 1] и имеющих знаменатель не больший, чем N. Таких точек на сегменте [0, 1] имеется лишь конечное число. Все эти точки

можно заключить внутрь конечного числа сегментов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$, не имеющих общих точек, сумма длин которых меньше некоторого наперед заданного числа ε' (т. е. $\sum \sigma_i < \varepsilon'$). Образуем разбиение (Σ), для которого точками деления являются концы сегментов σ_i. Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ сегменты разбиения (Σ), отличные от сегментов σ_i. В силу описанного построения на сегментах τ_i, кроме иррациональных точек, могут содержаться рациональные точки $\left(x=\frac{p}{q}\right)$, только лишь такие, что $q > N$, но в этих точках $F(x)=F\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}<\frac{1}{N}$.

Оценим привзнос ячеек σ_i в сумме Ω (Σ):

$$\sum \omega_{\sigma_i}\sigma_i \leqslant \sum \sigma_i < \varepsilon'; \quad \text{в самом деле,} \quad \omega_{\sigma_i}=M_i-m_i \leqslant 1.$$

Оценим привзнос ячеек τ_i:

$$\sum \omega_{\tau_i}\tau_i < \sum \frac{1}{N}\tau_i < \frac{1}{N}(b-a).$$

Итак,

$$\Omega\left(\sum\right) < \varepsilon' + \frac{1}{N}(b-a).$$

Достаточно взять $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ и $N > \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$, чтобы получить $\Omega\left(\sum\right) < \varepsilon$.

Легко непосредственно вычислить $\int_0^1 F(x)\,dx$. При произвольном разбиении сегмента $[0, 1]$ на сегменты $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ нижняя грань $F(x)$ на любом из сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ равна нулю $(m_i=0)$, откуда $\underline{S}=0$.

В силу интегрируемости $F(x)$, имеем $\int_0^1 F(x)\,dx=\lim \underline{S}=0$.

Теорема IV. *Если ограниченные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны на сегменте $[a, b]$ всюду, за исключением, быть может, множества точек $\mathfrak{M}$ меры нуль (по Жордану), то либо обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

либо обе данные функции неинтегрируемы.

Доказательство. Обозначим через N любое число, большее, чем верхние грани $|f(x)|$ и $|\varphi(x)|$ на сегменте $[a, b]$:

$$|f(x)| < N \quad \text{и} \quad |\varphi(x)| < N.$$

Заключим множество $\mathfrak{M}$ внутрь системы ячеек $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ с суммой длин, меньшей $\frac{\varepsilon}{2N}$. Рассмотрим разбиение $(\sum)$, в состав которого входят ячейки σ_i. В прочих ячейках $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ имеем $f(x)=\varphi(x)$. Составим разность верхних (нижних) сумм для

функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Каждая из ячеек τ_i в суммах $\overline{S}_f$ и $\overline{S}_\varphi$ дает одинаковый привзнос, поэтому после вычитания останутся в каждой сумме лишь привзносы ячеек $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$.

Следовательно,

$$|\overline{S}_f - \overline{S}_\varphi| \leqslant 2N(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k) \leqslant 2N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon. \qquad (1)$$

То же получим и для нижних сумм. Так как пределы верхних (нижних) сумм существуют, то [в силу (1)] получим:

$$\lim \overline{S}_f = \lim \overline{S}_\varphi \quad \text{и} \quad \lim \underline{S}_f = \lim \underline{S}_\varphi.$$

Если одна из данных функций, например $f(x)$, интегрируема, $\lim \overline{S}_f = \lim \underline{S}_f$, то и для другой функции имеем $\lim \overline{S}_\varphi = \lim \underline{S}_\varphi$, а потому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx;$$

если $\lim \overline{S}_f \neq \lim \underline{S}_f$, то и $\lim \overline{S}_\varphi \neq \lim \underline{S}_\varphi$; в этом случае обе функции неинтегрируемы, ч. т. д.

Таким образом, *всякую функцию $f(x)$, ограниченную на сегменте без изменения свойства интегрируемости и значения интеграла, можно заменить другой ограниченной функцией $\varphi(x)$, равной $f(x)$ всюду на $[a, b]$, за исключением множества точек меры нуль.* В частности, можно не принимать во внимание значения функции на конечном множестве точек, а также в концах сегмента.

Предположим, например, что функция $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале (a, b). Продолжим эту функцию, приписав ей в точках a и b произвольные значения $f(a)$ и $f(b)$. После продолжения получилась функция, непрерывная на сегменте, кроме, быть может, точек a и b; эта функция интегрируема, причем $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет одинаковое значение при любом выборе значений $f(a)$ и $f(b)$.

Пример.

1. Функция, определенная на сегменте [0, 1] законом соответствия

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(x \neq \frac{1}{n}\right); \\ 1 & \left(x = \frac{1}{n}\right), \end{cases}$$

где n — натуральное число, интегрируема на [0, 1] и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. В самом

деле, $f(x)$ отличается от константы, равной нулю, на множестве точек $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$ меры нуль.

2. Ограниченная функция $\sin\frac{1}{x}$ непрерывна в любом интервале $(0, b)$ и, следовательно, интегрируема на сегменте $[0, b]$.

§ 129. Расширение понятия интеграла

В определения интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ предполагалось, что областью интеграции является «положительный» сегмент $[a, b]$, т. е. что $a < b$. Если $a > b$, то понятие интеграла, распространенного на «отрицательный» сегмент $[a, b]$, устанавливается посредством нижеследующих дополнительных определений. Этими определениями обобщаются понятия разбиения, ячейки, δ-разбиения и интегральной суммы на случай $a > b$.

Определение. 1° *Если* $a > b$, *то всякая система точек*

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_i > \ldots > x_n = b$$

определяет разбиение «отрицательного» сегмента $[a, b]$.

2° *Ячейке* σ_i *приписывается отрицательная длина* $\sigma_i = x_i - x_{i-1}$.

3° *Диаметром* σ_i *считается положительное число* $|x_i - x_{i-1}|$.

4° *Разбиение называется* δ*-разбиением, если диаметр всех его ячеек меньше* δ.

5° *Интегралом* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется предел интегральных сумм*:

$$\lim \sum f(\xi_i)\,\sigma_i, \quad \text{где} \quad \xi_i \in \sigma_i.$$

6° *Если* $a = b$, *то интеграл считается равным нулю*:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Теорема. *Если существует* $\int_a^b f(x)\,dx$, *то существует и интеграл* $\int_b^a f(x)\,dx$ *и имеет место равенство*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть, например, $a < b$. Всякому разбиению сегмента $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$$

соответствует разбиение отрицательного сегмента $[b, a]$

$$b = x_n > x_{n-1} > \ldots > x_i > \ldots > x_2 > x_1 > x_0 = a.$$

Всякой интегральной сумме, распространенной на сегмент $[a, b]$

$$\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

соответствует интегральная сумма, распространенная на $[b, a]$

$$\sum f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i).$$

Обратно, всякой интегральной сумме, распространенной на $[b, a]$, соответствует интегральная сумма, распространенная на $[a, b]$.

Соответственные интегральные суммы — противоположные числа:

$$S_{[a, b]} = -S_{[b, a]}.$$

Следовательно,

$$\lim S_{[ab]} = -\lim S_{[ba]} \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \text{ч. т. д.}$$

§ 130. Формула Лейбница—Ньютона

Теорема. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте примитивную $F(x)$:*

$$F'(x) = f(x),$$

то значение интеграла равно разности значений примитивной в верхнем и в нижнем пределах интеграции:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{(формула Лейбница—Ньютона)}.$$

Доказательство. В самом деле, пусть

$$[a, x_1], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, b]$$

произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Рассмотрим тождество

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(b) - F(x_{n-1})] = \sum [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Преобразовав каждое слагаемое в квадратных скобках по формуле Лагранжа, получим:

$$F(b) - F(a) = \sum (x_i - x_{i-1}) F'(\xi_i) = \sum (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i). \qquad (1)$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема, то существует предел интегральных сумм, равный интегралу на сегменте $[a, b]$:

$$\lim \sum (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Для нахождения этого предела можно воспользоваться любыми частного вида интегральными суммами. Интегральные суммы (1) имеют одно и то же значение, равное $F(b) - F(a)$, а потому и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a), \quad \text{ч. т. д.}$$

Для обозначения разности значений функции $F(x)$ в точках b и a принято писать:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b;$$

в этом обозначении формула Лейбница—Ньютона принимает вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

Значение формулы Лейбница—Ньютона заключается в следующем: во всех случаях, когда известна примитивная подинтегральной функции, нет надобности в непосредственном составлении интегральных сумм и вычислении их предела, а достаточно составить разность значений примитивной от верхнего и от нижнего пределов интеграции.

Примеры.

1. *a)* $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2;$

b) $\int_0^1 e^{kx}\,dx = \left[\frac{e^{kx}}{k}\right]_0^1 = \frac{e^k}{k} - \frac{1}{k};$

c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arc\,tg} x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

2. Знание интеграла может быть использовано при нахождении пределов. Пусть, например, требуется найти предел последовательности:

$$\lim \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right].$$

Приняв во внимание очевидное равенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{2}\right],$$

мы видим, что выражение, находящееся под знаком предела, есть интегральная сумма, составленная для функции $\frac{1}{1+x}$ на сегменте $[0, 1]$ при делении этого сегмента на n равных частей, где в в качестве точек ξ_i взяты правые концы сегментов σ_i. Так как функция $\frac{1}{1+x}$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то она интегрируема на этом сегменте; отсюда следует, что искомый предел существует и равен интегралу

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2.$$

3. Найти предел последовательности

$$\lim\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right].$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\frac{1}{n}\sum\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

Полученное выражение есть интегральная сумма, составленная для функции $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ при разбиении сегмента $[0, 1]$ на n равных частей, где ξ_i есть крайняя правая точка соответствующего сегмента σ_i; отсюда следует, что искомый предел существует и равен интегралу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

§ 131. Теоремы о действиях над интегрируемыми функциями

Теорема I. *Если функции* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ $f_n(x)$ *интегрируемы на сегменте* $[a, b]$, *то любая их линейная комбинация*

$$F(x)=cf_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)$$

интегрируема на $[a, b]$ *и*

$$\int_a^b F(x)\,dx=c_1\int_a^b f_1(x)\,dx+c_2\int_a^b f_2(x)\,dx+\ldots+c_n\int_a^b f_n(x)\,dx. \quad (1)$$

Свойство, выраженное этой теоремой, называется свойством дистрибутивности интеграла.

Доказательство. Рассмотрим какую-либо интегральную сумму функции $F(x)$:

$$\sum F(\xi_i)\,\sigma_i = c_1 \sum f_1(\xi_i)\,\sigma_i + c_2 \sum f_2(\xi_i)\,\sigma_i + \ldots + c_n \sum f_n(\xi_i)\,\sigma_i.$$

Эта сумма равна линейной комбинации интегральных сумм функций $f_k(x)$. Так как каждая из этих сумм имеет предел, равный соответствующему интегралу, то сумма $\sum F(\xi_i)\,\sigma_i$ также имеет предел, а потому функция $F(x)$ интегрируема и

$$\lim \sum F(\xi_i)\,\sigma_i = c_1 \lim \sum f_1(\xi_i)\,\sigma_i + \ldots + c_n \lim \sum f_n(\xi_i)\,\sigma_i,$$

откуда

$$\int_a^b F(x)\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,dx, \quad \text{ч. т. д.}$$

В частности:

1° $$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

2° $$\int_a^b cf(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx.$$

3° $$\int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx.$$

Примечание. Из интегрируемости суммы $f(x)+\varphi(x)$ не следует, что каждое слагаемое является интегрируемой функцией. Так, например, функция Дирихле $\chi(x)$ неинтегрируема; точно так же неинтегрируема функция

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1 & (\text{если } x\text{—иррациональное число}); \\ 0 & (\text{если } x\text{—рациональное число}). \end{cases}$$

Сумма $\chi(x)+\chi_1(x) = \text{const} = 1$ интегрируема.

Теорема II. 1° *Произведение интегрируемых на сегменте* $[a, b]$ *функций есть функция, интегрируемая на* $[a, b]$.

2° *Если на сегменте* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема, а функция* $\varphi(x)$ *знакопостоянна* (т. е. *либо положительна, либо отрицательна*) *и имеет верхнюю и нижнюю грани, отличные от нуля, то частное* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *есть интегрируемая функция.*

3° *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на сегменте* $[a, b]$, *то функция* $|f(x)|$ *также интегрируема на* $[a, b]$.

Доказательства этих утверждений однотипны, поэтому мы приведем доказательство лишь утверждения 1°. Докажем

сперва теорему для частного случая произведения двух неотрицательных интегрируемых функций.

Пусть $F(x)=f(x)\varphi(x)$, причем $f(x)\geqslant 0$ и $\varphi(x)\geqslant 0$ при любом значении x на сегменте $[a, b]$. Пусть (σ) есть какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$. Обозначим соответственно через M, M' и M'' верхние грани функций $F(x)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$, через M_i, M_i', M_i'' — верхние грани тех же функций на σ_i, а через ω_i, ω_i' и ω_i'' — соответствующие колебания на σ_i. Аналогичные обозначения будем употреблять и для нижних граней функций $F(x)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$. При всех значениях x на σ_i имеем:

$$0\leqslant m_i'\leqslant f(x)\leqslant M_i',$$
$$0\leqslant m_i''\leqslant \varphi(x)\leqslant M_i''.$$

Перемножив почленно, получим:

$$0\leqslant m_i'm_i''\leqslant F(x)\leqslant M_i'M_i'', \text{ а потому } m_i'm_i''\leqslant m_i\leqslant M_i\leqslant M_i'M_i''.$$

Совершая элементарные преобразования и пользуясь неравенствами $M_i''\leqslant M''$ и $m_i'\leqslant M'$, имеем:

$$M_i-m_i\leqslant M_i'M_i''-m_i'm_i''=M_i'M_i''-M_i''m_i'+M_i''m_i'-m_i'm_i''=$$
$$=M_i''(M_i'-m_i')+m_i'(M_i''-m_i'')\leqslant M''(M_i'-m_i')+M'(M_i''-m_i''),$$

или, что то же,

$$\omega_i\leqslant M''\omega_i'+M'\omega_i''.$$

Следовательно,

$$\sum\omega_i\sigma_i\leqslant M''\sum\omega_i'\sigma_i+M'\sum\omega_i''\sigma_i,$$

т. е. $\Omega_F(\sigma)\leqslant M''\Omega_f(\sigma)+M'\Omega_\varphi(\sigma)$.

Так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то

$$\lim\Omega_f(\sigma)=\lim\Omega_\varphi(\sigma)=0, \text{ откуда } \lim\Omega_F(\sigma)=0.$$

Следовательно, функция $F(x)$ интегрируема. Покажем, что теорема справедлива для произведения л ю б ы х двух интегрируемых функций. Сохраняя прежние обозначения, имеем:

$$0\leqslant f(x)-m' \quad \text{и} \quad 0\leqslant\varphi(x)-m''.$$

Неотрицательные функции $f(x)-m'$ и $\varphi(x)-m''$ интегрируемы (теорема I); значит, функция $F(x)=(f(x)-m')(\varphi(x)-m'')$ также интегрируема. Функция $f(x)\varphi(x)$ может быть представлена как линейная комбинация интегрируемых функций

$$f(x)\varphi(x)=F(x)+m'\varphi(x)+m''f(x)-m'm'',$$

а потому интегрируема, ч. т. д.

Методом индукции теорема распространяется на произведение любого числа интегрируемых функций. В частности, если $f(x)$ интегрируема, то интегрируема любая ее целая положительная степень $[f(x)]^n$.

Примечания.

I. Если произведение интегрируемо, то это не значит, что каждый сомножитель интегрируем. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{—рациональное число});\\ -x & (x\text{—иррациональное число}) \end{cases}$$

не интегрируема на сегменте $[0, 1]$ (см. пример 4, стр. 453), а квадрат ее $[f(x)]^2=x^2$ есть интегрируемая функция.

Произведение интегрируемой и неинтегрируемой функций может оказаться интегрируемым.

Возьмем, например, произведение функции Дирихле и функции $F(x)$, определенной законом соответствия $F(x)=0$, если x—иррациональное число или нуль; $F(x)=\frac{1}{q}$, если $x=\frac{p}{q}$—рациональное число, где $q>0$, $p\neq 0$ и $\frac{p}{q}$—несократимая дробь. Имеем: $\chi(x)\cdot F(x)=F(x)$, но $\chi(x)$ неинтегрируема, а $F(x)$ интегрируема (пример 3, стр. 457).

II. Из интегрируемости функции $|f(x)|$ не следует интегрируемость функции $f(x)$. Так, например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{—рациональное число});\\ -x & (x\text{—иррациональное число}) \end{cases}$$

не интегрируема на любом сегменте $[a, b]$, функция же $|f(x)|=|x|$ непрерывна, а потому интегрируема.

III. Сложная функция $f(\varphi(x))$ может быть неинтегрируемой, если обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы. Пусть $F(x)=0$, если x—иррациональное число; $F(x)=\frac{1}{q}$, если x—рациональное число $\left(x=\frac{p}{q}\right.$, где $\left.p$ и $q>0$ взаимно простые числа$\right)$ и $F(0)=1$.

Функция $F(x)$ интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

Положим

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (\text{если } x\neq 0);\\ 0 & (\text{если } x=0). \end{cases}$$

Функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте, так как она имеет только одну точку разрыва. Функция $f(F(x))=\chi(x)$ есть функция Дирихле, не являющаяся интегрируемой.

§ 132. Свойство аддитивности интеграла

Лемма. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и если сегмент $[c, d]$ содержится в сегменте $[a, b]$* (черт. 139), *то $f(x)$ интегрируема на $[c, d]$.*

Доказательство. Будем рассматривать любые разбиения сегмента $[a, b]$, для которых c и d входят в состав точек деления. Сумму вида $\sum\omega_i\sigma_i$, распространенную на сегмент $[c, d]$, можно рассматривать как привзнос ячеек, принадлежащих сегменту $[c, d]$ в сумме $\Omega_{[a, b]}$, распространенной на сегмент $[a, b]$.

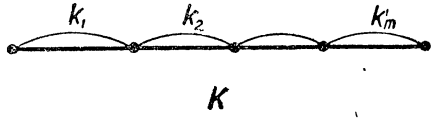
Имеем:

$$0 \leqslant \Omega_{[c,\ d]} \leqslant \Omega_{[a,\ b]},$$

откуда $\lim \Omega_{[c,\ d]} = 0$, так как $\lim \Omega_{[a,\ b]} = 0$, ч. т. д.

Теорема. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте K и если сегмент K разбит на конечное число сегментов $K_1, K_2, \ldots, K_m$*

Черт. 319.



Черт. 320.

(черт. 320), *не имеющих попарно общих внутренних точек, то интеграл от $f(x)$ на сегменте K равен сумме интегралов на сегментах $K_1, K_2, \ldots, K_m$:*

$$\int\limits_K f(x)\,dx = \int\limits_{K_1} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{K_m} f(x)\,dx.$$

Это свойство интеграла называется свойством аддитивности.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, функция $f(x)$ интегрируема на любом из сегментов $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Будем рассматривать такие разбиения сегмента K, для которых концы сегментов $K_1, K_2, \ldots, K_m$ входят в состав точек деления. Любую интегральную сумму (указанного вида), распространенную на сегмент K, можно разбить на m частей, являющихся интегральными суммами от $f(x)$, распространенными на сегменты $K_1, K_2, \ldots, K_m$:

$$\sum_K f(\xi_i)\,\sigma_i = \sum_{K_1} + \sum_{K_2} + \ldots + \sum_{K_m}.$$

Переходя к пределу, получим равенство, выражающее свойство аддитивности интеграла, ч. т. д.

Примечание. Из интегрируемости функции $f(x)$ на каждом из сегментов $K_1, K_2, \ldots, K_m$ следует интегрируемость $f(x)$ на K. В самом деле, для нахождения $\lim \Omega_K$ воспользуемся разбиениями, содержащими концы сегментов $K_1, K_2, \ldots, K_m$ в составе точек деления; имеем:

$$\lim \Omega_K = \lim (\Omega_{K_1} + \Omega_{K_2} + \ldots + \Omega_{K_m}) =$$
$$= \lim \Omega_{K_1} + \lim \Omega_{K_2} + \ldots + \Omega_{K_m} = 0,$$

значит,

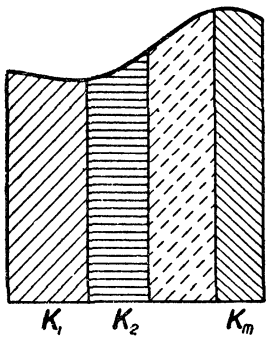
$$\lim \Omega_K = 0.$$

Геометрическая интерпретация. При любом разбиении основания K криволинейной трапеции сумма площадей трапеций, на которые разбивается вся данная трапеция, равна площади данной трапеции (черт. 321).

Если сегмент $[a, b]$ точкой c разделен на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то свойство аддитивности можно записать так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Это свойство верно не только для положительных сегментов (т. е. когда $a < c < b$), но при любых значениях a, b и c, если только $f(x)$ интегрируема на соответствующих сегментах. В этом можно убедиться проверкой. Пусть, например, $a < b < c$ (прочие возможные случаи предоставляем рассмотреть учащимся), тогда имеем:



Черт. 321.

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c, \text{ откуда } \int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$$

(мы позволяем себе не писать подинтегральную функцию, так как она всюду одна и та же). Далее легко показать, что

$$\int_{x_0}^{x_n} = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые числа (разумеется, что на соответствующих сегментах подинтегральная функция должна быть интегрируемой). В самом деле,

$$\int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} = \int_{x_0}^{x_2}; \quad \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} = \int_{x_0}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} = \int_{x_0}^{x_3}$$

и т. д. (применить метод полной индукции).

Свойством аддитивности пользуются на практике при вычислении интегралов от функций, заданных разными формулами в разных промежутках, а также от функций с конечным числом точек разрыва.

Примеры.

1. $$(x) = \begin{cases} x & (x \leqslant 0); \\ \sin x - 1 & (0 < x). \end{cases}$$

Имеем:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} (\sin x - 1)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + [-\cos x - x]_0^1 = -\cos 1 - \frac{1}{2}.$$

2. $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{x^2}\,dx$, где $a>0$.

Имеем:

$$\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{x^2}\,dx=\int\limits_{-a}^{a} |x|\,dx=\int\limits_{-a}^{0} -x\,dx+\int\limits_{0}^{a} x\,dx=a^2$$

3. Вычислить:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\,dx=\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx+\sqrt{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi} -\cos\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}-2\sqrt{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=4\sqrt{2}.$$

4. Рассмотрим $\int\limits_{0}^{x} [t]\,dt$. Предположим для определенности $x>0$. Пусть n — целая часть x. Имеем:

$$\int\limits_{0}^{x} [t]\,dt=\int\limits_{0}^{1} [t]\,dt+\int\limits_{1}^{2} [t]\,dt+\ \dots\ +\int\limits_{n-1}^{n} [t]\,dt+\int\limits_{n}^{x} [t]\,dt=$$

$$=\int\limits_{1}^{2} 1\,dt+\int\limits_{2}^{3} 2dt+\ \dots\ +\int\limits_{n-1}^{n} (n-1)\,dt+\int\limits_{n}^{x} n\,dt=$$

$$=1+2+\ \dots\ +(n-1)+n(x-n)=\frac{n(n-1)}{2}+n(x-n)=$$

$$=\frac{[x]([x]-1)}{2}+[x](x-[x]).$$

§ 133. Основные неравенства

Теорема. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ (где $a<b$), m и M — ее верхняя и нижняя грани, то*

$$m(b-a)\leqslant\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

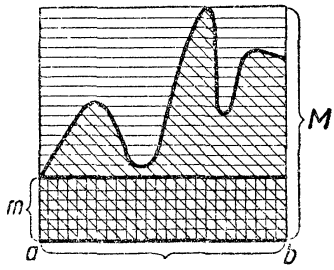
Доказательство. Для любой интегральной суммы S имеем:

$$m(b-a)\leqslant S\leqslant M(b-a);$$

перейдя к пределу, получим доказываемые неравенства, ч. т. д.

Для отрицательного сегмента ($b < a$) знаки неравенства следует заменить знаками противоположного смысла.

Геометрическая интерпретация. Площадь криволинейной трапеции не меньше площади входящего прямоугольника и не больше площади выходящего прямоугольника (черт. 322).



Черт. 322.

Следствие I. Если функция $f(x)$ неотрицательна (неположительна) на сегменте $[a, b]$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \text{ (или } \leqslant 0).$$

В самом деле, достаточно принять во внимание, что $m \geqslant 0$ (или $M \leqslant 0$) и $b - a > 0$.

Следствие II. Если $f(x) \leqslant \varphi(x)$ и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ (где $a < b$), то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

В самом деле, $\varphi(x) - f(x) \geqslant 0$, откуда

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Примечание. Неотрицательная функция $f(x)$ может не быть тождественно равной нулю, но иметь интеграл, равный нулю. Примером может служить всякая функция, равная нулю всюду, за исключением множества точек меры нуль (по Жордану). Другой пример дает функция $F(x)$, рассмотренная в примере 3 на странице 457, $F(x)$ не равна тождественно нулю и неотрицательна, но

$$\int_0^1 F(x)\,dx = 0.$$

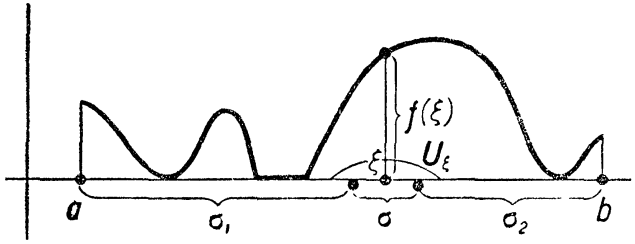
Теорема. *Если неотрицательная непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ не равна тождественно нулю, то*

$$0 < \int_a^b f(x)\,dx, \text{ где } a < b.$$

Доказательство. Существует хотя бы одна точка $\xi \in [a, b]$, в которой $f(\xi) > 0$. В силу непрерывности, существует такая окрестность $U_\xi \subset [a, b]$, в которой $f(x) > 0$. Возьмем какой-нибудь сегмент σ, лежащий внутри окрестности U_ξ (черт. 323). Наименьшее значение $f(x)$ на сегменте σ положительно: $m_\sigma > 0$. Сегмент $[a, b]$

разделяется при помощи сегмента σ на три части: σ_1, σ, σ_2. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\sigma_1} f(x)\,dx + \int_{\sigma} f(x)\,dx + \int_{\sigma_2} f(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\sigma} f(x)\,dx \geqslant m_\sigma \sigma > 0, \text{ ч. т, д.}$$



Черт. 323.

Следствие. Если непрерывная функция неотрицательна (или неположительна) на сегменте $[a, b]$ и если $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ на сегменте $[a, b]$.

В частности, если $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ или $\int_a^b f^2(x)\,dx) = 0$, то $f(x) = 0$.

1° Из доказанных выше теорем вытекают следующие неравенства:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqslant 0, \text{ если } a < b.$$

2° Так как $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, то

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \text{ где } a < b,$$

откуда

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

3° При любых a и b

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant N|b-a|,$$

где N — верхняя грань $|f(x)|$ на $[a, b]$.

Примеры.

1. Докажем, что

$$0<\int_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}<\frac{1}{8}.$$

В самом деле, в интервале (0, 1)

$$0<\frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^6}}<x^7, \text{ откуда } 0<\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx<\int_0^1 x^7\,dx=\frac{1}{8}.$$

2. Рассмотрим последовательность

$$s_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$$

(n — натуральное число); докажем, что эта последовательность сходится к нулю. Разобьем сегмент [0, 1] на два сегмента [0, δ] и [δ, 1], где δ — произвольное число ($0<\delta<1$).

Имеем:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=\int_0^\delta (1-x^2)^n\,dx+\int_\delta^1 (1-x^2)^n\,dx.$$

Так как наибольшее значение $(1-x^2)^n$ на сегменте [0, δ] есть 1, то получим:

$$0<\int_0^\delta (1-x^2)^n\,dx<\delta$$

(равенство исключается, так как подинтегральная функция непрерывна и равна 1 лишь в одной точке сегмента [0, δ]).

Наибольшее значение подинтегральной функции на сегменте [δ, 1] есть $(1-\delta^2)^n<1$. Имеем:

$$\int_\delta^1 (1-x^2)^n\,dx<(1-\delta^2)^n(1-\delta)\leqslant(1-\delta^2)^{n+1}$$

(так как при $0<\delta\leqslant 1$ имеем $\delta^2\leqslant\delta$). Возьмем δ меньшим, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Так как

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\delta^2)^{n+1}=0,$$

то число n можно взять настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $(1-\delta^2)^{n+1}<\frac{\varepsilon}{2}$. При этих условиях получим:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx<\delta+(1-\delta^2)^{n+1}<\varepsilon, \text{ значит, } \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=0.$$

3. Доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\,dx < \frac{\pi}{2R}\left[1-e^{-R}\right], \text{ где } R>0.$$

В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. Чтобы установить последнее неравенство, заметим, что функция $\frac{\sin x}{x}$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет отрицательную производную. В самом деле,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x-\operatorname{tg} x)\cos x}{x^2} < 0.$$

Следовательно, функция $\frac{\sin x}{x}$ убывает, а потому при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \text{ и } \sin x > \frac{2}{\pi}x.$$

Отсюда в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $e^{-R\sin x} < e^{-\frac{2R}{\pi}x}$.

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}x}\,dx = -\frac{\pi}{2R}\left[e^{-\frac{2R}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R}\left[1-e^{-R}\right].$$

Неравенство Буняковского. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\,dx}. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $[f(x)-\lambda\varphi(x)]^2$, где λ — произвольное действительное число; эта функция интегрируема и

$$\int_a^b [f(x)-\lambda\varphi(x)]^2\,dx \geqslant 0, \tag{2}$$

или, что то же,

$$\lambda^2\int_a^b \varphi^2(x)\,dx - 2\lambda\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0. \tag{3}$$

Выражение в левой части последнего неравенства есть квадратный трехчлен относительно λ, неотрицательный при всех действительных λ; следовательно, его дискриминант неотрицателен:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \varphi^2(x)\,dx - \left\{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right\}^2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Отсюда вытекает неравенство Буняковского. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и неравенство (1) обращается в равенство, то неравенство (4) также обращается в равенство; значит, трехчлен, находящийся в левой части неравенства (3), имеет двукратный корень $\lambda=k$. При $\lambda=k$ неравенство (2) обратится в равенство

$$\int_a^b [f(x)-k\varphi(x)]^2\,dx=0.$$

Но в силу непрерывности подинтегрального выражения это возможно, если

$$f(x)=k\varphi(x).$$

§ 134. Теорема о среднем значении

Теорема. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и функция $\varphi(x)$ знакопостоянна (т. е. неположительна или неотрицательна), то существует число μ, заключенное между верхней и нижней гранями функции $f(x)$:*

$$m\leqslant\mu\leqslant M,$$

такое, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\mu\int_a^b\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Предположим для определенности, что функция $\varphi(x)$ неотрицательна ($\varphi(x)\geqslant 0$) и $a<b$. В силу неравенств $m\leqslant f(x)\leqslant M$, имеем на $[a, b]$:

$$m\varphi(x)\leqslant\varphi(x)f(x)\leqslant M\varphi(x),$$

откуда

$$m\int_a^b\varphi(x)\,dx\leqslant\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx\leqslant M\int_a^b\varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Если $\int_a^b\varphi(x)\,dx=0$, то $\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx=0$, и в качестве μ можно взять любое число $m\leqslant\mu\leqslant M$.

Если

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx>0,$$

то положим

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b\varphi(x)\,dx}=\mu.$$

В силу (2), $m \leqslant \mu \leqslant M$; следовательно,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad \text{где} \quad m \leqslant \mu \leqslant M, \quad \text{ч. т. д.}$$

Предоставляем читателю рассмотреть случаи $\varphi(x) \leqslant 0$ и $a > b$.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то существует по крайней мере одна точка $\xi \in [a, b]$, в которой $f(\xi) = \mu$; следовательно,

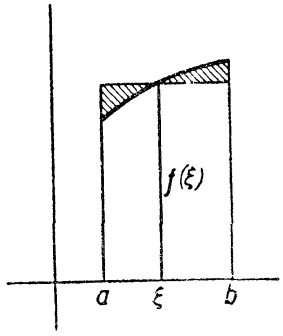
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Следствие. Если положить $\varphi(x) = \text{const} = 1$, то получим в общем случае:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \quad \text{где} \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Если $f(x)$ непрерывна, то получим нижеследующую формулу среднего значения:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \quad \text{где} \quad \xi \in [a, b].$$



Черт. 324

Это равенство имеет следующую геометрическую интерпретацию: существует прямоугольник с высотой $f(\xi)$ (где $\xi \in [a, b]$), равновеликий криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ (черт. 324).

В качестве применения теоремы о среднем значении покажем, что если функция $f(x)$ непрерывна, то при любом разбиении (σ) сегмента $[a, b]$ может быть построена интегральная сумма, в точности равная значению интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum \int_{\sigma_i} f(x)\,dx.$$

По теореме о среднем значении существуют такие числа:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \quad \text{что} \quad \int_{\sigma_i} f(x)\,dx = f(\xi_i)\,\sigma_i, \quad \text{где} \quad \xi_i \in \sigma_i,$$

и, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum f(\xi_i)\,\sigma_i.$$

Геометрическая интерпретация. При любом разбиении (σ) сегмента $[a, b]$ существует такой ступенчатый многоугольник, состоящий из прямоугольников с основаниями σ_i, площадь которого равна площади криволинейной трапеции.

§ 135. Интеграл как непрерывная функция верхнего предела

Численное значение интеграла

$$\int_a^x f(t)\,dt\ *$$

определяется значением верхнего предела x, а потому этот интеграл является функцией от аргумента x.

Положим

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Областью определения функции $\Phi(x)$ является множество всех значений x (как больших, так и меньших a) — таких, что $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, x]$. Эти значения (см. § 132, лемма) образуют некоторый промежуток $<\alpha, \beta>$. Так, например, для функции $\Phi_1(x) = \int_a^x \frac{1}{t}\,dt$, где $a < 0$, областью определения является интервал $-\infty < x < 0$. Для функции $\Phi_2(x) = \int_a^x \frac{1}{t}\,dt$, где $a > 0$, областью определения является интервал $0 < x < +\infty$. Имеем:

$$\Phi_1(x) = \ln(-x) - \ln(-a) \text{ и } \Phi_2(x) = \ln x - \ln a.$$

Рассмотрение интеграла $\int_x^b f(t)\,dt$ как функции нижнего преде-

---

* Аргумент подинтегральной функции обозначен буквой t, отличной от x во избежание смешения. Это, впрочем, не имеет принципиального значения, так как интеграл не является функцией от аргумента подинтегральной функции:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz,$$

а определяется значениями a и b и функцией $f(x)$.

ла не представляет специального интереса, так как, в силу формулы

$$\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt,$$

задача сводится к изучению интеграла как функции верхнего предела.

Теорема. *Интеграл* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *есть непрерывная функция верхнего предела.*

Доказательство. Имеем:

$$\Phi(X) - \Phi(x) = \int_a^X f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^X f(t)\,dt,$$

откуда

$$|\Phi(X) - \Phi(x)| \leqslant \int_x^X |f(t)\,dt| \leqslant N|X - x|,$$

где N есть верхняя грань $|f(x)|$ на любом сегменте, содержащемся в области определения $\Phi(x)$ и содержащем точки a, x и X.

Если $|X - x| < \frac{\varepsilon}{N} = \delta$, то

$$|\Phi(X) - \Phi(x)| < \varepsilon \text{ при } |X - x| < \delta.$$

Следовательно, функция $\Phi(x)$ непрерывна в точке x, ч. т. д.

Следствие. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и $f(x)$ интегрируема в промежутке $\langle a, \varphi(x)\rangle$, то $\Psi(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$ есть непрерывная функция. Это следует из теоремы о непрерывности сложной функции, так как

$$\Psi(x) = \int_a^u f(t)\,dt, \text{ где } u = \varphi(x).$$

Это же замечание относится к функциям

$$\int_{\varphi(x)}^b f(t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt.$$

§ 136. Вторая теорема о среднем значении

Доказательство второй теоремы о среднем значении основано на следующем преобразовании суммы парных произведений. Рассмотрим сумму произведений соответственных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n=\sum_{i=1}^{n} a_iu_i.$$

Положим

$$S_k=u_1+u_2+\ldots+u_k.$$

Имеем:

$$u_1=S_1;\ u_2=S_2-S_1;\ \ldots;\ u_n=S_n-S_{n-1}$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} a_iu_i=a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+\ldots+a_n(S_n-S_{n-1})=$$
$$=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})S_i+a_nS_n.$$

Лемма. *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции, интегрируемые в промежутке $\langle a, b\rangle$, то*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\lim\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\int_{\sigma_i} f(x)\,dx \quad (\text{где } \xi_i\in\sigma_i).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\sum\varphi(\xi_i)\int_{\sigma_i} f(x)\,dx=\sum\int_{\sigma_i}\varphi(\xi_i)f(x)\,dx.$$

В силу свойства аддитивности имеем:

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx=\sum\int_{\sigma_i}\varphi(x)f(x)\,dx,$$

откуда

$$\left|\sum\varphi(\xi_i)\int_{\sigma_i} f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\sum\int_{\sigma_i}|\varphi(\xi_i)-\varphi(x)|\cdot|f(x)|\,dx.$$

Если ω_i колебание функции $\varphi(x)$ на σ_i, то

$$|\varphi(\xi_i)-\varphi(x)|\leqslant\omega_i.$$

Пусть M — верхняя грань $|f(x)|$; имеем:

$$\sum\int_{\sigma_i}|\varphi(\xi_i)-\varphi(x)|\cdot|f(x)|\,dx\leqslant\sum\omega_i\int_{\sigma_i}|f(x)|\,dx\leqslant M\sum\omega_i\sigma_i;$$

но $\lim\Sigma\,\omega_i\sigma_i=0$, откуда и следует справедливость леммы.

Вторая теорема о среднем значении. *Если $f(x)$ функция, интегрируемая на сегменте $[a, b]$, и если функция $\varphi(x) \geqslant 0$ и не возрастает, то существует число ξ, $a < \xi < b$, такое, что*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Доказательство. В силу леммы,

$$\lim \sum \varphi(\xi_i) \int_{\sigma_i} f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx.$$

Применим преобразование суммы парных произведений, полагая $a_i = \varphi(\xi_i)$ и $u_i = \int_{\sigma_i} f(x)\,dx$. Пусть x_{i-1}, x_i суть концы сегмента σ_i; для

$$S_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_i$$

имеем:

$$S_i = \int_{\sigma_1} f(x)\,dx + \int_{\sigma_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\sigma_i} f(x)\,dx = \int_a^{x_i} f(x)\,dx,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{\sigma_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i+1})] \int_a^{x_i} f(x)\,dx + \varphi(\xi_n) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пусть соответственно $\max \int_a^x f(x)\,dx$ и $\min \int_a^x f(x)\,dx$ — наибольшее и наименьшее значения непрерывной на $[a, b]$ функции $\int_a^x f(x)\,dx$.

В силу условия, $\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i+1}) \geqslant 0$ и $\varphi(\xi_n) \geqslant 0$, а потому

$$\min \int_a^x f(x)\,dx \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i+1})] + \varphi(\xi_n) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{\sigma_i} f(x)\,dx \leqslant \max \int_a^x f(x)\,dx \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i+1})] + \varphi(\xi_n) \right\},$$

или, что то же,

$$\varphi(\xi_i) \min \int_a^x f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{\sigma_i} f(x)\,dx \leqslant \varphi(\xi_1) \max \int_a^x f(x)\,dx,$$

где $a<\xi_1<x_1$. Переходя к пределу, получим:

$$\psi(a+0)\min\int_a^x f(x)\,dx\leqslant\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx\leqslant\varphi(a+0)\max\int_a^x f(x)\,dx.$$

В силу непрерывности функции $\int_a^x f(x)\,dx$, существует число ξ в интервале (a, b) такое, что $\varphi(a+0)\int_0^\xi f(x)\,ax=\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx$, ч. т. д.

Если функция $\varphi(x)$ не убывает, то $\varphi(\xi_{i-1})-\varphi(\xi_i)\leqslant 0$; тогда, написав суммы $\sum\varphi(\xi_i)\int_{\sigma_i} f(x)\,dx$ в обратном порядке, получим:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Если монотонная функция $\varphi(x)$ не является положительной, то

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

В самом деле, пусть для определенности $\varphi(x)$ не возрастает; тогда $\varphi(x)-\varphi(b-0)\geqslant 0$; следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,[-\varphi(b-0)+\varphi(x)]\,dx=[-\varphi(b-0)+\varphi(a+0)]\int_a^\xi f(x)\,dx;$$

откуда после элементарных преобразований и получим формулу (1).

Пример.

Докажем, что $\left|\int_a^b\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{a}}$, где $0<a<b$.

В самом деле, $\sin x$ интегрируема, а $\frac{1}{\sqrt{x}}$ монотонна (убывает) на сегменте $[a, b]$; применяя вторую теорему о среднем значении, получим:

$$\int_a^b\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_a^\xi\sin x\,dx=\frac{1}{\sqrt{a}}(\cos a-\cos\xi).$$

Так как $|\cos a-\cos\xi|\leqslant 2$, то утверждение очевидно.

§ 137. Интегрирование и отыскание примитивных функций

Формула Лейбница—Ньютона показывает, что задачи интегрирования (определенный интеграл) и отыскания примитивных функций (неопределенный интеграл) имеют тесную связь. Однако

класс интегрируемых функций в промежутке $<a, b>$ не совпадает с классом функций, имеющих примитивную функцию в том же промежутке. Так, в общем случае задачи интегрирования и отыскания примитивной различны: если одна задача имеет решение, то это не означает, что имеет решение другая.

Так, например, функция $y = \operatorname{sign} x$ имеет при $x = 0$ единственную точку разрыва первого рода. Для этой функции на сегменте $[-1, 1]$ не существует примитивной, так как в противном случае производная $F(x) = \operatorname{sign} x$ имела бы в точке 0 разрыв первого рода, что невозможно (см. стр. 309). Функция $\operatorname{sign} x$ как непрерывная всюду, кроме точки $x = 0$, интегрируема на сегменте $[-1, 1]$.

С другой стороны, можно построить пример такой функции $F(x)$, что ее производная $F'(x) = f(x)$ неинтегрируема; это значит, что неинтегрируемая функция $f(x)$ может иметь примитивную $F(x)$. Построение этого примера не элементарно и выходит за пределы настоящего курса *.

Теорема. *Если интегрируемая функция $f(x)$ непрерывна в точке x, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет в точке x производную, равную $f(x)$.*

Сокращенно эту теорему принято формулировать так. *Производная интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции.*

Доказательство. Имеем по теореме о среднем значении:

$$\Phi(X) - \Phi(x) = \int_x^X f(t)\,dt = (X - x)\,\mu,$$

где μ — число, содержащееся между верхней и нижней гранями $f(x)$ на сегменте (положительном или отрицательном) $[x, X]$.

Так как $f(X)$ непрерывна в точке x, то

$$\lim_{X \to x} f(X) = \lim \mu = f(x),$$

и, следовательно,

$$\lim_{X \to x} \frac{\Phi(X) - \Phi(x)}{X - x} = \Phi'(x) = f(x), \text{ ч. т. д.}$$

Примечание I. Эти рассуждения применимы в случае, если интегрируемая функция $f(x)$ имеет правый предел в точке x, тогда (полагая $x < X$) существует правая производная $\Phi'_+(X)$,

* См. Александров и Колмогоров, Введение в теорию функции действительного переменного, гл. VIII, § 2 и 3, ГОНТИ, 1938.

равная $f(x+0)$:

$$\Phi'_+(x) = f(x+0).$$

Аналогично, если существует левый предел $f(x-0)$, то

$$\Phi'_-(x) = f(x-0).$$

Примечание II. Для производной интеграла по нижнему пределу имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_b^x f(t)\,dt\right) = -f(x).$$

Теорема (существование примитивной функции). *Всякая функция $f(x)$, непрерывная в промежутке $<a, b>$, имеет в этом промежутке примитивную функцию.*

Доказательство. Функция $f(x)$, будучи непрерывной, интегрируема на любом сегменте, содержащемся в $<a, b>$. Пусть x_0 любая точка промежутка $<a, b>$; согласно предыдущей теореме,

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

имеет во всех точках $<a, b>$ производную функцию, равную $f(x)$, ч. т. д.

Примечание. Из бесконечного множества примитивных функций, отличающихся друг от друга лишь числовыми слагаемыми, $\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ есть примитивная, обращающаяся в нуль в точке x_0.

Для непрерывных функций задачи интегрирования и отыскания примитивных обе имеют решение, при этом решение одной из них дает решение и другой.

В самом деле, если известна примитивная $F(x)$, то известен интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Если известен интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$, то известна примитивная

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$, где $f(x)$ непрерывная, а $\varphi(x)$ дифференцируемая функция. Положим

$$F(u)=\int\limits_a^u f(t)\,dt, \quad u=\varphi(x).$$

По теореме о дифференцировании сложной функции имеем:

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{dF}{du}\cdot\frac{d\varphi}{dx},$$

но так как

$$\frac{dF}{du}=f(u), \text{ то } \frac{d\Phi}{dx}=f(\varphi(x))\frac{d\varphi}{dx}.$$

Так, например,

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\sin x} e^{-t^2}\,dt=e^{-\sin^2 x}\cos x.$$

§ 138. Интегрирование подстановкой

Теорема. *Если*

1° $f(x)$ — *функция, непрерывная в промежутке* $<A, B>$;

2° *сегмент* $[a, b]$ *принадлежит промежутку* $<A, B>$ (*в частности может с ним совпадать*);

3° *функция* $\varphi(t)$ *на сегменте* (*положительном или отрицательном*) $[\alpha, \beta]$ *имеет непрерывную производную* $\varphi'(t)$;

4° $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

5° *значения функции* $\varphi(t)$ *содержатся в промежутке* $<A, B>$, *то имеет место равенство*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Рассмотрим две функции:

$$\Phi(t)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \Psi(t)=\int\limits_\alpha^t f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

определенные на сегменте $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Эти функции имеют одинаковую производную:

$$\Phi'(t)=\Psi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

откуда

$$\Phi(t)=\Psi(t)+C.$$

Но так как

$$\Phi(\alpha) = \Psi(\alpha) = 0, \text{ то } C = 0.$$

Полагая $t = \beta$, получим $\Phi(\beta) = \Psi(\beta)$ или

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Приняв во внимание условие 4°, получим доказываемое равенство.

Приведем другое доказательство формулы подстановки, не опирающееся на дифференцирование интеграла по верхнему пределу. Докажем справедливость формулы подстановки при следующих условиях.

1° *Функция* $f(x)$ *интегрируема на сегменте* $[a, b]$.

2° *Функция* $\varphi(t)$ *строго монотонна с интегрируемой производной.*

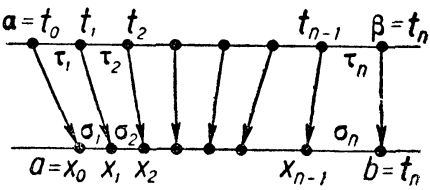
3° *Функция* $\varphi(t)$ *отображает сегмент* $[\alpha, \beta]$ *на сегмент* $[a, b]$.

Предположим для определенности, что $a < b$ и что функция $\varphi(t)$ возрастает, тогда $\varphi'(t) \geqslant 0$. Взаимно обратные функции $x = \varphi(t)$ и $t = \varphi(x)$ устанавливают взаимно однозначное и непрерывное отображение сегментов $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и $a \leqslant x \leqslant b$ друг на друга. Рассмотрим какое-либо разбиение

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_n \qquad (\tau)$$

сегмента $[\alpha, \beta]$. Этому разбиению соответствует разбиение сегмента $[a, b]$

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n, \qquad (\sigma)$$



Черт. 325.

где одинаковыми индексами занумерованы соответственные ячейки (черт. 325). В силу равномерной непрерывности функции $x = \varphi(t)$, диаметры ячеек разбиения (σ) будут меньше, чем δ, если диаметры ячеек (τ) будут меньше, чем некоторое число δ':

$$\sigma_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) < \delta,$$

если $t_i - t_{i-1} < \delta'$.

Составим интегральную сумму функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$:

$$\sum f[\varphi(\theta_i)]\,\varphi'(\theta_i)\,\tau_i = S(\tau), \text{ где } \theta_i \in \tau_i.$$

Составим интегральную сумму для функции $f(x)$ и разбиения (σ), соответствующего разбиению (τ):

$$S(\sigma) = \sum f(\xi_i)\,\sigma_i.$$

По теореме Лагранжа имеем:

$$\sigma_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\vartheta_i)\,\tau_i, \text{ где } \tau_i = t_i - t_{i-1} \text{ и } \vartheta_i \in \tau_i.$$

Пользуясь произволом выбора точек $\xi_i \in \sigma_i$, положим $\xi_i = \varphi(\theta_i)$, тогда получим:

$$S(\sigma) = \sum f(\varphi(\theta_i))\,\varphi'(\vartheta_i)\,\tau_i.$$

В силу интегрируемости функции $f(x)$ имеем:

$$\lim S(\sigma) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Сопоставим суммы $S(\tau)$ и $S(\sigma)$:

$$|S(\tau)-S(\sigma)|=\left|\sum f(\xi_i)(\varphi'(\theta_i)-\varphi'(\vartheta_i))\tau_i\right|\leqslant$$
$$\leqslant N\sum|\varphi'(\theta_i)-\varphi'(\vartheta_i)|\tau_i\leqslant N\sum\omega_i\tau_i=N\Omega\varphi'(\tau),$$

где N — верхняя грань $|f(x)|$ на $[a, b]$ и ω_i — колебание $\varphi'(t)$ в ячейке τ_i. В силу интегрируемости $\varphi'(t)$ имеем $\lim\Omega\varphi'(\tau)=0$. Откуда, принимая во внимание (1), получим $\lim S(\tau)=\lim S(\sigma)$ или

$$\lim S(\tau)=\lim\sum f[\varphi(\theta_i)]\,\varphi'(\theta_i)\,\tau_i=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx,$$ ч. т. д.

Примечание I. Первое доказательство формулы подстановки предполагает непрерывность функций $f(x)$ и $\varphi'(x)$, но не предполагает монотонности $\varphi(t)$. Второе доказательство предполагает монотонность $\varphi(t)$, но не предполагает непрерывности $f(x)$ и $\varphi'(t)$.

Примечание II. Заметим, что производная $\varphi(t)$ в некоторых точках сегмента $[\alpha, \beta]$ может не существовать Например, $\varphi'(t)$ может не существовать в конечном числе точек, но теорема о подстановке остается верной в предположении, что все прочие условия теоремы выполнены.

Если $a<b$ и функция $\varphi(t)$ возрастает, то соответствующий сегмент $a\leqslant t\leqslant\beta$ положителен. Если же функция $\varphi(t)$ убывает, то сегмент $[\alpha, \beta]$ отрицателен. В первом случае $\varphi'(t)\geqslant 0$, а во втором $\varphi'(t)\leqslant 0$. Во втором случае можно написать:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\beta^\alpha f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

Если условиться все интегралы распространять только на положительные промежутки, то формула подстановки принимает вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,|\varphi'(t)|\,dt;$$

$a<b$ и $\alpha<\beta$, а $\varphi(t)$ — монотонная функция (возрастающая или убывающая — безразлично).

Примеры.

1.

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Функция $x=a\sin t$ возрастает на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и отображает этот сегмент на сегмент $[0, a]$; произведя подстановку, получим:

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2\pi}{4}.$$

2. Вычислить:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Функция $x=\pi-t$ убывает на сегменте $0\leqslant t\leqslant\pi$, при этом сегмент $0\leqslant x\leqslant\pi$ отображается на отрицательный сегмент $[\pi, 0]$; произведя подстановку, получим:

$$I=\int_{\pi}^{0}-\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt-\int\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=-\pi\left[\operatorname{arc\,tg}(\cos t)\right]_0^{\pi}-I=\frac{\pi^2}{2}-I.$$

Из уравнения $I=\frac{\pi^2}{2}-I$ получаем $I=\frac{\pi^2}{4}$.

3. Вычислить при целом k:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}\,dx.$$

Положим $x=\pi-t$:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}\,dx=-\int_{\pi}^{0}\frac{\sin 2k(\pi-t)}{\sin t}\,dt=-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kt}{\sin t}\,dt.$$

Итак, $I=-I$, откуда $I=0$.

4. $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$

Положим $x=\operatorname{tg} t$; получим:

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{(1+\operatorname{tg}^2 t)}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg} t)\,dt.$$

Принимая во внимание, что $1+\operatorname{tg} t=\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}$, получим:

$$I=\left\{\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt\right\}.$$

Второй интеграл преобразуем подстановкой $t=\frac{\pi}{4}-z$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos z\,dz.$$

Отсюда

$$I=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt=\frac{\pi \ln 2}{8}.$$

5. Обозначим через

$$B(p, q)=\int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx, \text{ где } p>0 \text{ и } q>0.$$

Покажем, что $B(p, q)=B(q, p)$. Положим $x=1-y$:

$$B(p, q)=\int_1^0 (1-y)^p y^q (-dy)=\int_0^1 (1-y)^p y^q\, dy=B(q, p).$$

6. При вычислении интегралов от четных и нечетных функций полезно иметь в виду следующие формулы:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx=2\int_0^a f(x)\, dx, \quad \text{если } f(x) \text{—четная функция и}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx=0, \text{ если } f(x) \text{—нечетная функция.}$$

В самом деле,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx=\int_{-a}^{0} f(x)\, dx+\int_0^a f(x)\, dx.$$

Полагаем в первом интеграле $x=-t$. Эта подстановка отображает сегмент $[-a, 0]$ на сегмент $[a, 0]$. Получим:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx=\int_0^a f(-x)\, dx+\int_0^a f(x)\, dx.$$

Теперь справедливость формул становится очевидной.

§ 139. Интегрирование по частям

Рассмотрим непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции $u(x)$ и $v(x)$, имеющие интегрируемые производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Произведение $u(x)v(x)$ также имеет интегрируемую производную. Это следует из формулы дифференцирования произведения

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]=u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$$

и из теорем об интегрируемых функциях. Для получения формулы интегрирования по частям проинтегрируем обе части последнего равенства, причем к левой части можем применить формулу Лейб-

ница—Ньютона:

$$[u(x)\,v(x)]_a^b = \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Полученная формула интегрирования по частям позволяет свести вычисление интеграла, находящегося в левой части равенства (1), к вычислению интеграла $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$, что в ряде случаев может оказаться более простым.

§ 140. Примеры на применение формул интегрирования подстановкой и по частям

1. Вычислить интегралы

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx \quad \text{и} \quad J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx,$$

где m—натуральное число.

Покажем, что $J_m = I_m$. Положив во втором интеграле $x = \frac{\pi}{2} - t$, получим $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t\,dt = I_m$. Для вычисления I_m применим формулу интегрирования по частям, положив

$$u = \sin^{m-1} x, \quad v' = \sin x.$$

Получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = [-\sin^{m-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Первое слагаемое обращается в нуль; заменив во втором интеграле $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получим:

$$I_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,$$

откуда

$$I_m=(m-1)\,I_{m-2}-(m-1)\,I_m.$$

Решив относительно I_m, получим рекуррентную формулу:

$$I_m=\frac{m-1}{m}\,I_{m-2}.$$

Применив к интегралу I_{m-2} ту же рекуррентную формулу, получим (при $m\geqslant 4$):

$$I_m=\frac{(m-1)\,(m-3)}{m\,(m-2)}\,I_{m-4}.$$

Применение рекуррентной формулы приводит к интегралам:

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\quad\text{(при } m \text{ четном)}$$

или

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1\quad\text{(при } m \text{ нечетном)}.$$

При четном m $(m=2k)$ получим:

$$I_{2k}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots(2k)}\,\frac{\pi}{2};$$

при нечетном m $(m=2k+1)$:

$$I_{2k+1}=\frac{2\cdot 4\ldots(2k)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}.$$

2. Вычислить $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx$, где m—натуральное число.

Положив $x=\sin t$, получим:

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}t\,dt=\begin{cases}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots m}{2\cdot 4\ldots(m+1)}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{(при нечетном } m);\\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\ldots m}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(m+1)} & \text{(при четном } m).\end{cases}$$

3. Вычислить

$$I=\int_0^{\pi}x\sin^m x\,dx,$$

где m—натуральное число. Имеем:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^m x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sin^m x\,dx.$$

Во втором интеграле сделаем подстановку $x=\pi-t$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)\sin^m t\,dt=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^m t\,dt,$$

значит,

$$I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\,dt=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{1\cdot3\ldots(m-1)}{2\cdot4\ldots m} & \text{(при } m \text{ четном);}\\[2ex] \pi\dfrac{2\cdot4\ldots(m-1)}{1\cdot3\cdot5\ldots m} & \text{(при } m \text{ нечетном).}\end{cases}$$

Задача отыскания полиномов Лежандра. *Найти многочлен $P_n(x)$, такой, чтобы имело место равенство*

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\,P_n(x)\,dx=0,$$

где $Q(x)$ — *произвольный многочлен степени ниже* n.

Пусть $P_n(x)$ — какой-нибудь многочлен степени n; подберем многочлен $R(x)$ степени $2n$, удовлетворяющий следующим условиям:

1° $P_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}R(x)$.

2° В точке -1 многочлен R и $n-1$ его первых производных обращаются в нуль: $R(-1)=R'(-1)=\ldots=R^{(n-1)}(-1)=0$.

Расположим многочлен $P_n(x)$ по степеням $x+1$:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x+1)+\ldots+a_{n-1}(x+1)^{n-1}+a_n(x+1)^n.$$

Будем искать $R(x)$ в виде

$$R(x)=c_0+c_1(x+1)+\ldots+c_{n-1}(x+1)^{n-1}+\ldots+c_{2n}(x+1)^{2n}.$$

После n-кратного дифференцирования найдем:

$$R^{(n)}(x)=n!c_n+\ldots+[2n\ldots(n+1)]\,c_{2n}(x+1)^n.$$

Положим

$$c_0=c_1=\ldots=c_{n-1}=0;$$

коэффициенты

$$c_n,\ c_{n+1},\ \ldots,\ c_{2n}$$

определим, приравнивая коэффициенты многочлена $R^{(n)}(x)$ соответствующим коэффициентам $P_n(x)$:

$$c_n=\frac{a_0}{n!};\ \ldots;\ c_{2n}=\frac{a_n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}.$$

При указанном выборе коэффициентов c_i многочлен $R(x)$ принимает вид $R(x)=(x+1)^nS(x)$, где $S(x)$ — некоторый многочлен степени n. Итак, мы построили многочлен $R(x)$, удовлетворяющий условиям 1° и 2°. Перейдем к задаче отыскания полиномов Лежандра. Будем искать полином Лежандра в виде

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}R(x).$$

По условию,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,Q(x)\,dx=0,$$

где $Q(x)$ — любой многочлен степени ниже n. Подставляя $R^{(n)}(x)$ вместо $P_n(x)$ и интегрируя по частям, получим:

$$\int_{-1}^{+1} Q(x)\,R^{(n)}(x)\,dx=[Q(x)\,R^{(n-1)}(x)]_{-1}^{+1}-\int_{-1}^{1} Q'(x)\,R^{(n-1)}(x)\,dx.$$

После $n-1$-кратного интегрирования по частям получим:

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\,R^{(n)}(x)\,dx=$$

$$=[Q(x)\,R^{(n-1)}(x)-Q'(x)\,R^{(n-2)}(x)+\ldots\pm Q^{(n-1)}(x)\,R(x)]_{-1}^{+1}=$$

$$=Q(1)\,R^{(n-1)}(1)-Q'(1)\,R^{(n-2)}(1)+\ldots\pm Q^{(n-1)}(1)\,R(1)=0.$$

По условию, полученное выражение должно равняться нулю при любом $Q(x)$ степени не выше $(n-1)$. Так как числа $Q(1)$, $Q'(1)$, ..., $Q^{(n-1)}(1)$ могут быть любыми в зависимости от рыбора $Q(x)$, то это равенство нулю возможно лишь при условии $R(1)=R'(1)=\ldots=R^{(n-1)}(1)=0$; значит, число 1 должно быть n-кратным корнем многочлена $R(x)$ Из условия 2° следует, что число -1 также должно быть n-кратным корнем $R(x)$; значит,

$$R(x)=C(x-1)^n(x+1)^n=(x^2-1)^n.$$

Принято полагать

$$C=\frac{1}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)},$$

тогда полином Лежандра P_n принимает вид:

$$P_n(x)=\frac{1}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Заметим, в частности, что для двух полиномов Лежандра P_n и P_m (где $n\neq m$) имеем:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0.$$

§ 141. Формула Валлиса

Из неравенств, имеющих место в $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,$$

вытекает, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx,$$

откуда

$$\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}<\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\,\frac{\pi}{2}<\frac{2\cdot 4\ldots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}.$$

Из этих неравенств следует:

$$\frac{[2\cdot 4\ldots(2n)]^2}{[1\cdot 3\ldots(2n-1)]^2}\cdot\frac{2}{2n+1}<\pi<\frac{[2\cdot 4\ldots(2n)]^2}{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)^2]^2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Положив

$$u_n=\left[\frac{2\cdot 4\ldots(2n)}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{n},\quad\text{имеем:}\quad\frac{2n}{2n+1}<\frac{\pi}{u_n}<1.$$

Так как

$$\lim\frac{2n}{2n+1}=1,\quad\text{то}\quad\lim\frac{\pi}{u_n}=1;$$

значит,

$$\pi=\lim u_n$$

или

$$\lim\left[\frac{2\cdot 4\ldots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{n}=\pi;$$

это и есть формула Валлиса.

§ 142. Интеграл как аддитивная функция сегмента

Если каждому сегменту K данного множества сегментов соответствует некоторое вполне определенное число $U[K]$, то $U[K]$ называется функцией сегмента.

В анализе и в его приложениях наиболее существенную роль играют аддитивные функции сегмента.

Определение. *Функция $U[K]$ называется аддитивной функцией сегмента, если при любом разбиении сегмента K на конечное число сегментов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ значение $U[K]$ равно сумме значений, соответствующих сегментам, на которые разбит сегмент K:*

$$U[K]=U[K_1]+U[K_2]+\ldots+U[K_n].$$

Примером аддитивной функции сегмента может служить его длина, ибо длина отрезка при любом разбиении равна сумме длин частей, на которые разбит данный отрезок.

Пример неаддитивной функции сегмента.

Положим $U[K]=\max f(x)$ на сегменте K, где $f(x)$—функция, непрерывная в некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ и $K\subset\langle a, b\rangle$. Пусть для определенности $f(x)=x^2$; имеем:

$$U[0, 2]=4,\quad U[0,1]=1,\quad U[1, 2]=4\quad\text{и}\quad U[0, 2]\neq U[0, 1]+U[1, 2].$$

Рассмотрим функцию $f(x)$, интегрируемую на любом сегменте K, содержащемся в данном промежутке $\langle a, b\rangle$; интеграл

$$\int_K f(x)\,dx=I(K)$$

есть функция сегмента K.

Как известно, интеграл обладает следующими свойствами:

I. *Интеграл $I(K)$ есть аддитивная функция сегмента*

$$I(K)=I(K_1)+I(K_2)+\ldots+I(K_m).$$

II. *Если* M_K *и* m_K—нижняя и верхняя грани $f(x)$ на K, то

$$m_K K \leqslant I(K) \leqslant M_K K.$$

Теорема. *Необходимым и достаточным условием интегрируемости ограниченной функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$ *является существование единственной функции сегмента* $U[K]$, *определенной для любого сегмента* $K \subset [a, b]$ *и удовлетворяющей условиям:*

I. $U[K] = U[K_1] + U[K_2] + \ldots + U[K_n]$ (аддитивность).

II. $m_K K \leqslant U[K] \leqslant M_K K$.

Доказательство. Условие необходимо. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема и на любом сегменте $K \subset [a, b]$. Интеграл $I(K)$ есть аддитивная функция сегмента, удовлетворяющая условию II. Покажем, что $I(K)$ есть единственная такая функция.

Пусть (σ)—любое разбиение сегмента K, а $U[K]$—любая функция, удовлетворяющая условиям I и II. Имеем (в силу аддитивности):

$$U[K] = \sum U[\sigma_i].$$

Применяя условие II к каждой ячейке σ_i и суммируя, получим:

$$\sum m_i \sigma_i \leqslant U[K] = \sum U[\sigma_i] \leqslant \sum M_i \sigma_i.$$

Итак, значение аддитивной функции заключено между верхней и нижней суммами при любом разбиении сегмента. Переходя к пределу, получим:

$$I[K] = \lim \underline{S} \leqslant U[K] \leqslant \lim \overline{S} = I[K],$$

и, следовательно,

$$I[K] = U[K].$$

Условие достаточно. Предположим, что для функции $f(x)$ существует единственная аддитивная функция $U[K]$, удовлетворяющая условиям I и II. Покажем, что условиям I и II удовлетворяет предел верхних сумм, распространенных на сегмент K. Эта функция сегмента называется верхним интегралом:

$$\lim \overline{S} = \overline{I}[K].$$

Для доказательства свойства аддитивности достаточно повторить рассуждения § 132 применительно к верхним (а не к произвольным интегральным) суммам. Справедливость свойства II вытекает из неравенств

$$m_K K \leqslant \sum M_i \sigma_i \leqslant M_K K,$$

из которых (переходя к пределу) получим:

$$m_K K \leqslant \overline{I}(K) \leqslant M_K K.$$

Аналогично покажем, что условиям I и II удовлетворяет предел нижних сумм, распространенных на сегмент K:

$$\underline{I}(K) = \lim \underline{S}_K;$$

предел нижних сумм называется нижним интегралом.

По условию, функция $U[K]$, удовлетворяющая условиям I и II, единственна, а потому

$$\overline{I}(K) = \underline{I}(K);$$

значит, $f(x)$ интегрируема на любом сегменте $K \subset [a, b]$, в частности $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, ч. т. д.

В приложениях к геометрии и физике нередко требуется найти значение аддитивной величины $U[K]$, для которой существует такая (обычно непрерывная) функция $f(x)$, что выполняется условие II. Если функция $f(x)$ интегрируема (чаще всего непрерывна), то $U[K]=\int\limits_K f(x)\,dx$. Потому значение аддитивной величины можно рассматривать как предел суммы

$$\sum f(x_i)\,\sigma_i, \quad \text{где} \quad x_i \in \sigma_i.$$

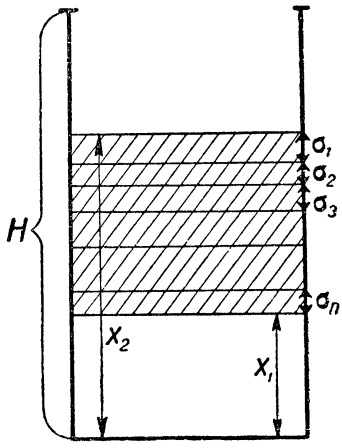
В приложениях обычно пользуются следующей краткой схемой применения интегрального исчисления к нахождению аддитивных величин. Разделив мысленно основной сегмент на любое число ячеек, обозначим через dx (вместо σ_i) произвольную ячейку разбиения. Умножив значение функции $f(x)$ на ячейку dx, получим «элемент» $f(x)\,dx$ аддитивной величины. Значение искомой аддитивной величины равно пределу суммы элементов (т. е. интегральных сумм), т. е. интегралу

$$\int\limits_K f(x)\,dx.$$

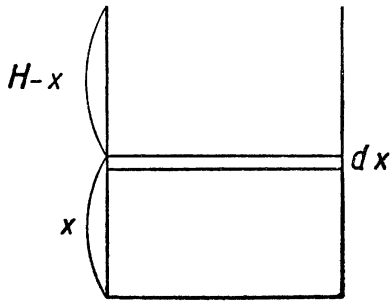
Пример.

Из цилиндрического сосуда с площадью основания Q и высотой H, наполненного водой, выкачивается вода. Вычислить работу, необходимую для поднятия всего количества воды до верхнего основания цилиндра (черт. 326).

Рассмотрим некоторый слой жидкости высотой σ, нижнее и верхнее основания которого находятся на высотах x_1 и x_2. Обозначим через $A[x_1, x_2]$ работу, которую



Черт. 327.



Черт. 328.

надо затратить, чтобы выкачать этот слой жидкости. Функция сегмента $A[x_1, x_2]$ удовлетворяет свойству аддитивности. В самом деле, если разрезать слой с высотой $\sigma=[x_1, x_2]$ на несколько слоев плоскостями, параллельными основанию цилиндра, с высотами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, то вся работа равна сумме работ, необходимых для выкачивания слоев с высотами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$:

$$A[x_1, x_2]=A[\sigma_1]+A[\sigma_2]+\ldots+A[\sigma_n].$$

Предположим, что вся масса жидкости данного слоя сосредоточена на верхнем основании, тогда для поднятия жидкости надо затратить работу, равную весу жидкости, умноженному на расстояние от верхнего основания сосуда до верхнего основания слоя. Эта работа равна

$$Q(H-x_2)(x_2-x_1).$$

Предположим теперь, что вся масса жидкости сосредоточена на нижнем основании слоя, тогда работа подъема будет равна

$$Q(H-x_1)(x_2-x_1).$$

Работа $A[x_1, x_2]$ должна удовлетворить неравенствам:

$$Q(H-x_2)(x_2-x_1) < A[x_1, x_2] < Q(H-x_1)(x_2-x_1).$$

Так как $Q(H-x_2)$ и $Q(H-x_1)$ суть наименьшее и наибольшее значения функции $Q(H-x)$ на сегменте $[x_1, x_2]$, то функция сегмента $A[x_1, x_2]$ удовлетворяет свойству II по отношению к функции $Q(H-x)$; отсюда выводим, что работа, необходимая для того, чтобы выкачать всю воду из сосуда ($x_1=0$, $x_2=H$), равна

$$\int_0^H Q(H-x)\,dx = \left[-Q\frac{(H-x)^2}{2}\right]_0^H = \frac{QH^2}{2}.$$

Обычно рассуждение проводится по следующей сокращенной схеме: чтобы выкачать слой жидкости, находящейся на высоте x с толщиной dx (черт. 327), надо затратить работу, приближенно равную $Q(H-x)\,dx$ (элемент работы). Работа, потребная для выкачивания всей жидкости, равна пределу суммы этих «элементарных» работ, т. е. интегралу

$$\int_0^H Q(H-x)\,dx.$$

ГЛАВА XI

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 143. Вычисление площадей плоских фигур

Вычисление площадей в декартовых координатах. Площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ и ограниченной сверху графиком непрерывной и неотрицательной на $[a, b]$ функции $y=f(x)$ вычисляется посредством интеграла $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

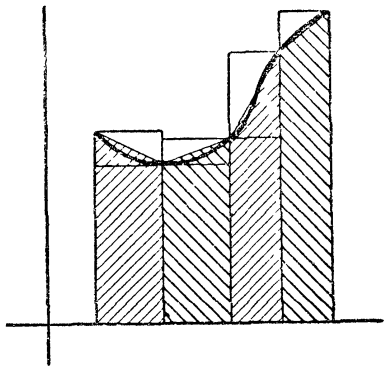
При этом площадь трапеции рассматривается как общий предел площадей ступенчатых входящих $\left(\sum m_i\sigma_i\right)$, ступенчатых выходящих $\left(\sum M_i\sigma_i\right)$, а также ступенчатых промежуточных $\left(\sum f(\xi_i)\,\sigma_i\right)$ многоугольников.

Термин «предел» понимается здесь в том же смысле, как термин «предел интегральных сумм», именно число S есть предел площадей P ступенчатых многоугольников, если при любом заданном числе $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство

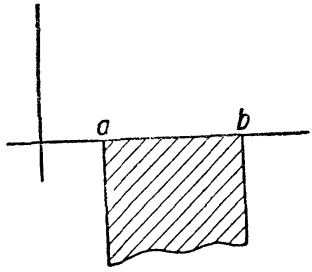
$$|S-P| < \varepsilon$$

выполняется для любого ступенчатого многоугольника, если только все основания (ячейки) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ прямоугольников, составляющих ступенчатый многоугольник P, меньше (по длине), чем δ.

При данном разбиении (σ) основания криволинейной трапеции можно построить вписанный многоугольник, состоящий из прямолинейных трапеций, ограниченных снизу сегментами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, сверху — соответствующими хордами линии $y = f(x)$ (черт. 328) и с боков — параллелями оси ординат. Площадь криволинейной трапеции можно рассматривать как предел площадей вписанных многоугольников. В самом деле, прямолинейные трапеции с основаниями σ_i (заштрихованы на чертеже) заключают



Черт. 328.



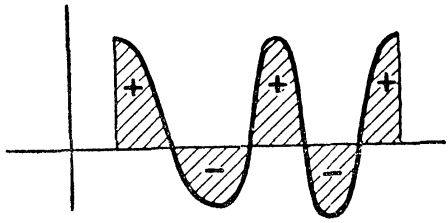
Черт. 329.

в себе входящие прямоугольники и заключены в выходящих; поэтому площадь вписанного многоугольника заключена между площадями соответствующих ступенчатых входящего и выходящего многоугольников. Следовательно, площади входящего, выходящего и вписанного многоугольников имеют общий предел.

Если непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ отрицательна, $f(x) < 0$, то будем рассматривать криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$, ограниченную снизу графиком $y = f(x)$ (черт. 329). В этом случае $\int_a^b f(x)\,dx < 0$ (при этом $a < b$). Интегральная сумма $\sum f(\xi_i)\,\sigma_i$ равна площади соответствующего ступенчатого многоугольника, но взятой со знаком —, ибо высоты $f(\xi_i)$ прямоугольников отрицательны. Предел интегральной суммы равен площади криволинейной трапеции, взятой с противоположным знаком. Чтобы не различать случаи $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, можно условиться площади криволинейных трапеций, лежащих под OX, считать отрицательными.

Если сегмент $[a, b]$ может быть разбит на конечное число сегментов, на каждом из которых значения функции $f(x)$ или неотрицательны $(f(x) \geqslant 0)$, или неположительны $(f(x) \leqslant 0)$, то инте-

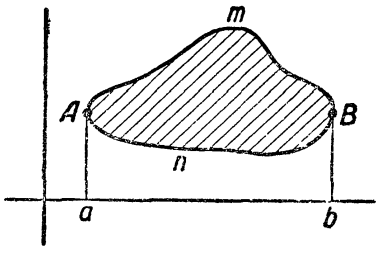
грал равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, лежащих над осью абсцисс, и трапеций, лежащих под осью абсцисс, при этом площади последних отрицательны (черт. 330). Отправляясь от площади криволинейной трапеции, можно вычислять площади разнообразных плоских фигур. Так, например, площадь фигуры, изображенной на чертеже 331, может быть представлена как разность площадей двух криволинейных трапеций: пл. $(aAmBb)$ — —пл. $(aAnBb)$. Пусть $y=f_1(x)$ — уравнение дуги AnB и $y=f_2(x)$ — уравнение дуги AmB; тогда искомая площадь фигуры выразится разностью интегралов:



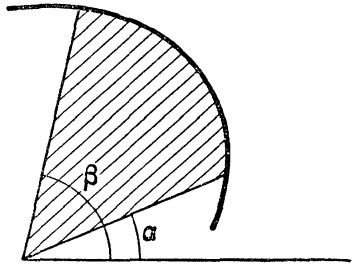
Черт. 330.

$$\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_1(x)\,dx=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx.$$

Вычисление площадей в полярных координатах. Пусть $\varrho=f(\varphi)$, где $f(\varphi)\geqslant 0$ есть уравнение некоторой линии в полярных координатах. Относительно функции $f(\varphi)$ будем предпо-



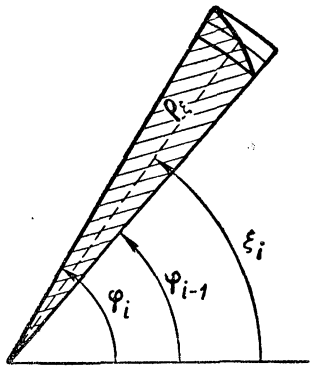
Черт. 331



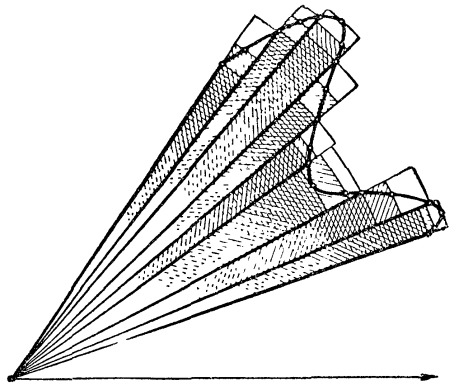
Черт. 332.

лагать, что она непрерывна на некотором сегменте $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, лежащем в пределах $[0,\ 2\pi]$ или $[-\pi,\ \pi]$. Фигура, ограниченная двумя лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и дугой линии $\varrho=f(\varphi)$ (черт. 332), называется криволинейным сектором. Разбиению $\sigma_1=[\alpha,\ \varphi_1]$, $\sigma_2=[\varphi_1,\ \varphi_2]$, ..., $\sigma_i=[\varphi_{i-1},\ \varphi_i]$, ..., $\sigma_n=[\varphi_{n-1},\ \beta]$ сегмента $[\alpha,\ \beta]$ соответствует разбиение данного криволинейного сектора на n криволинейных секторов, ограниченных лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\varphi_1$, ..., $\varphi=\varphi_i$, ..., $\varphi=\beta$ (черт. 333). Рассмотрим криволинейный сектор с углом σ_i при вершине. Пусть ξ_i — любое значение аргумента на сегменте σ_i. Произведение $\frac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\sigma_i$ есть площадь кругового сектора с радиусом, равным $\varrho_i=f(\xi_i)$, и с углом

$\sigma_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ при вершине (черт. 333). Если (в частности) в качестве ϱ_i взять наибольшее (наименьшее) значение $f(\varphi)$ на σ_i, то получится площадь выходящего (входящего) кругового сектора. Сумма $\sum \frac{1}{2}\varrho_i^2\sigma_i = \sum \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\,\sigma_i$ есть площадь фигуры, составленной из построенных круговых секторов. Эта сумма есть интегральная сумма для непрерывной функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$. Верхняя (нижняя) сумма есть площадь выходящей



Черт. 333.



Черт. 334.

(входящей) фигуры, составленной из выходящих (входящих) круговых секторов (черт. 334). *Единственное число, большее площадей всех входящих, но меньшее площадей всех выходящих фигур, есть интеграл*

$$\lim \sum \frac{1}{2}\varrho_i^2\sigma_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Это число рассматривается как площадь данного криволинейного сектора.

Выражения для площадей криволинейной трапеции и криволинейного сектора кратко записывают в виде следующих интегралов:

$$\int_a^b y\,dx \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2\,d\varphi.$$

Примеры.

1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = x^2$ (снизу) и параболой $y = \sqrt{x}$ (сверху). Параболы $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ пересекаются в точках (0, 0) и (1, 1); в интервале (0, 1) имеем $x^2 < \sqrt{x}$.

Искомая площадь (черт. 335) равна:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Вычислить площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Возьмем уравнения эллипса в параметрической форме:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t;$$

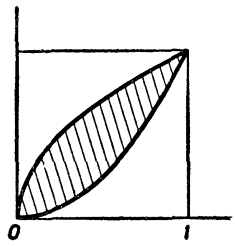
определим площадь полуэллипса:

$$\frac{1}{2}P = \int_{-a}^{a} y\,dx = \int_{\pi}^{0} (b\sin t)(-a\sin t)\,dt =$$

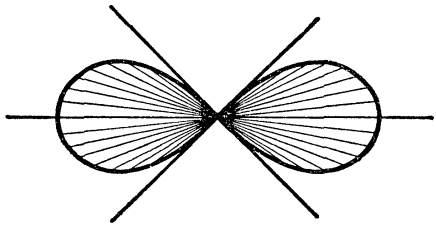
$$= ab\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos 2t)\,dt = \frac{\pi ab}{2}.$$

Отсюда $P = \pi ab$.

3. Найти площадь лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. Лемниската состоит из двух симметричных петель, поэтому достаточно определить площадь одной петли.



Черт. 335.



Черт. 336.

Значения $\cos 2\varphi$ положительны на сегменте $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$; этот сегмент и отображается на правую петлю лемнискаты (черт. 336). Итак, имеем

$$\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2},$$

откуда $P = a^2$.

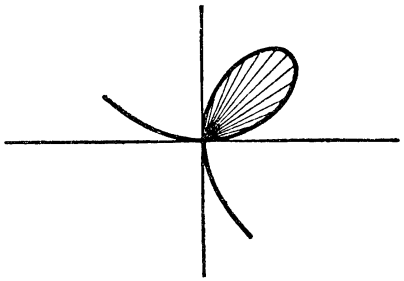
4. Вычислить площадь P петли декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$. Преобразуем уравнение к полярным координатам:

$$\rho(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi) = 3a\cos\varphi\sin\varphi,$$

откуда

$$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

Правая часть положительна внутри сегмента $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, и так как ее значения в концах этого сегмента равны нулю, то сегмент $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ отображается на петлю (черт. 337). Площадь петли находим по формуле:



Черт. 337.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\, d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{[\sin^3\varphi+\cos^3\varphi]^2} d\varphi.$$

Найдем неопределенный интеграл подстановкой $z=\operatorname{tg}\varphi$:

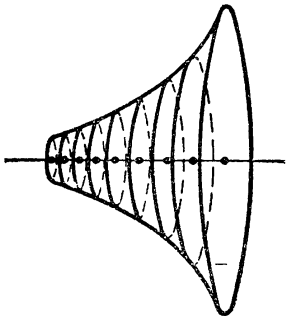
$$\int \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{[\sin^3\varphi+\cos^3\varphi]^2} d\varphi = \int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{[1+\operatorname{tg}^3\varphi]^2 \cos^2\varphi} = \int \frac{z^2\, dz}{[1+z^3]^2} = \frac{-1}{3(1+z^3)} + C = \frac{-\cos^3\varphi}{3(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)} + C,$$

откуда

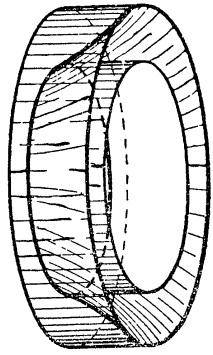
$$P = \frac{9a^2}{2}\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

§ 144. Вычисление объемов тел вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ и ограниченной сверху



Черт. 338.



Черт. 339.

непрерывной линией $y=f(x)$, где $f(x) \geqslant 0$. Всякому разбиению σ сегмента $[a, b]$ соответствует разбиение данного тела вращения на слои с высотами, равными $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ (черт. 338). Если $\xi_i \in \sigma_i$,

то число

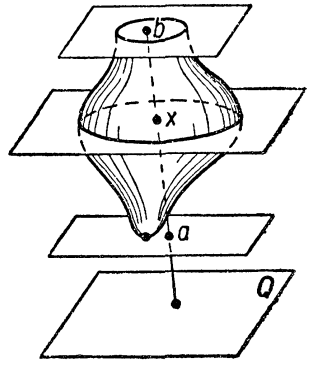
$$\pi y_i^2 \sigma_i = \pi f^2(\xi_i)\,\sigma_i$$

есть объем цилиндрического слоя с высотой σ_i и с радиусом основания $f(\xi_i) = y_i$. В частности, взяв в качестве $f(\xi_i)$ наибольшее (наименьшее) значение $f(x)$ на σ_i, получим выходящий (входящий) цилиндрический слой (черт. 339). Тело, составленное из цилиндрических слоев, имеет объем, равный интегральной сумме, образованной для непрерывной функции $\pi f^2(x)$:

$$\sum \pi y_i^2 \sigma_i = \pi \sum f^2(\xi_i)\,\sigma_i.$$

Верхняя (нижняя) сумма есть объем выходящего (входящего) тела, составленного из выходящих (входящих) цилиндрических слоев. *Единственное число, большее объемов всех входящих, но меньшее объемов всех выходящих фигур, есть интеграл* $\pi \int_a^b f^2(x)\,dx$. *Это число рассматривается как объем данного тела.* Кратко формулу объема тела вращения записывают так:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx.$$



Черт. 340.

К нахождению пределов сумм приводится не только вычисление объемов тел вращения. Рассмотрим некоторое тело, ограниченное замкнутой поверхностью. Предположим, что известна площадь сечения $S(x)$ этого тела любой плоскостью, параллельной некоторой данной плоскости Q (черт. 340), проходящей на расстоянии x от нее. Пусть a и b — расстояния крайних секущих плоскостей до плоскости Q. Разделим все тело на слои при помощи секущих плоскостей на расстояниях

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ \ldots\ < x_i < \ \ldots\ < x_n = b$$

от Q. Подсчитаем объем i-го слоя приближенно, как будто бы это был цилиндр с площадью основания $S(\xi_i)$ и высотой $(x_{i+1} - x_i)$. Складывая найденные объемы, получим число, рассматриваемое как приближенное значение объема всего данного тела.

$$\sum S(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Объемом данного тела будем называть предел полученной суммы:

$$\int_a^b S(x)\,dx.$$

Примеры.

1. Вычислить объемы вытянутого и сжатого эллипсоидов, полученных вращением эллипса $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг его осей.

Будем считать, что $a>b$; из формулы $V=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ найдем объем вытянутого эллипсоида:

$$\pi\int\limits_{-a}^{a} y^2\,dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi b^2a.$$

Для нахождения объема сжатого эллипсоида будем вращать эллипс вокруг оси OY. Для вычисления объема воспользуемся интегралом

$$\pi\int\limits_{-b}^{b} x^2\,dy=\pi\frac{a^2}{b^2}\int\limits_{-b}^{b}(b^2-y^2)\,dy=\frac{4\pi a^2b}{3}.$$

2. Вычислить объем тела, образованного вращением одной арки циклоиды

$$x=r(t-\sin t),\quad y=r(1-\cos t)$$

вокруг оси абсцисс. Имеем:

$$V=\pi\int\limits_0^{2\pi} y^2\,dx=r^3\pi\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=r^3\pi\int\limits_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt=$$

$$=r^3\pi\left[t-3\sin t+\frac{3}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)-\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\right]_0^{2\pi}=5\pi^2r^3.$$

3. Вычислить объем трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. В силу симметрии, достаточно определить $\frac{U}{2}$ — объем верхней части эллипсоида. Пересечем эллипсоид плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY; в сечении получим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

с полуосями $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. Площадь этого эллипса равна $\pi ab\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)$. Крайние положения секущих плоскостей суть $z=0$ и $z=c$, поэтому объем эллипсоида выразится следующим интегралом:

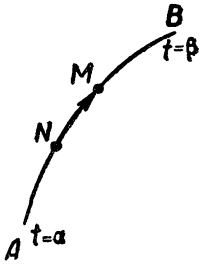
$$V=2\pi ab\int\limits_0^c\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)dh=2\pi ab\left[h-\frac{h^3}{3c^2}\right]_0^c=\frac{4}{3}\pi abc.$$

§ 145. Длина дуги кривой линии

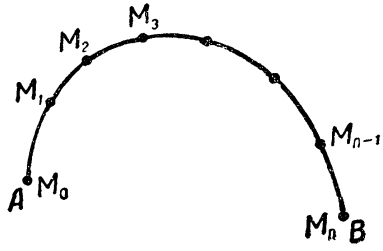
Рассмотрим некоторую простую дугу с концами в точках A и B (мы не исключаем из рассмотрения случай замкнутого контура; тогда точки A и B совпадают). Если данная линия является ломаной, состоящей из конечного числа прямолинейных звеньев, то ее длиной называется сумма длин звеньев. В случае, когда данная линия не является ломаной с конечным числом звеньев, понятие длины дуги нуждается в специальном определении. Будучи простой дугой, данная дуга может быть взаимно однозначно и непрерывно отображена на сегмент $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ посредством системы непрерывных функций

$$x = x(t), \quad y \quad y(t)$$

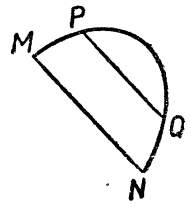
(исключение может представиться в случае, когда линия является простым замкнутым контуром; тогда точки $t = \alpha$ и $t = \beta$ имеют своим образом одну и ту же точку A). Пусть значению $t = \alpha$ соответствует «начало» дуги A, а значению $t = \beta$ – ее «конец» B (черт. 341). Параметризацией определяется направление на дуге,



Черт. 341.



Черт. 342.



Черт. 343.

именно: *точка дуги N считается предшествующей точке M, если соответствующие значения параметра связаны неравенством $t_N < t_M$.* Всякому разбиению

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ \ldots \ < t_i < \ \ldots \ < t_n = \beta$$

сегмента $[\alpha, \beta]$ соответствует разбиение

$$A = M_0, \ M_1, \ M_2, \ \ldots, \ M_i, \ \ldots, \ M_n = B$$

дуги AB (черт. 342), где M_k есть точка дуги с координатами $x(t_k)$ и $y(t_k)$.

Определение.

1° *Дугу MN назовем δ-дугой, если хорда PQ, соединяющая две любые точки P и Q этой дуги, имеет длину, меньшую δ:*

$$PQ < \delta, \ \text{если} \ P \in MN \ \text{и} \ Q \in MN.$$

В частности, длина хорды MN, стягивающей δ-дугу, меньше, чем δ (черт. 343).

2° *Разбиение дуги AB назовем δ-разбиением, если каждая из частичных дуг*

$$\overset{\frown}{M_0M_1},\ \overset{\frown}{M_1M_2},\ \ldots,\ \overset{\frown}{M_{i-1}M_i},\ \ldots,\ \overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$$

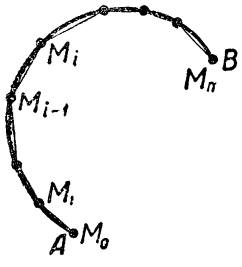
является δ-дугой.

Получить δ-разбиение простой дуги AB можно, взяв достаточно мелкое η-разбиение соответствующего сегмента $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. В самом деле, в силу равномерной непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$, существует такое число η, что

$$|x(t') - x(t'')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad |y(t') - y(t'')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

где бы точки t' и t'' ни были расположены на сегменте $[\alpha, \beta]$, лишь бы только выполнялось неравенство $|t' - t''| < \eta$. Любая хорда, соединяющая соответственные точки M' и M'', имеет длину, меньшую δ:

$$M'M'' = \sqrt{[x(t') - x(t'')]^2 + [y(t') - y(t'')]^2} < \delta.$$



Черт. 344.

Всякому η-разбиению сегмента $[\alpha, \beta]$ соответствует δ-разбиение дуги AB.

Всякому разбиению дуги AB соответствует вписанная ломаная линия $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ с вершинами в точках деления, звеньями которой являются хорды $M_{i-1}M_i$, соединяющие соседние точки деления (черт. 344).

Определение.

1° *Если множество периметров всевозможных ломаных, вписанных в дугу AB, ограничено, то дуга AB называется спрямляемой.*

2° *Если множество периметров вписанных ломаных неограничено, то данная дуга называется неспрямляемой.*

Примеры.

1. Окружность спрямляема. В самом деле, как известно из геометрии, периметр любого вписанного в окружность многоугольника меньше периметра любого описанного многоугольника (например, квадрата); следовательно, множество периметров вписанных многоугольников ограничено.

2. Возьмем на плоскости две последовательности точек

$$A_1(1, 1),\ A_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \ldots,\ A_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),\ \ldots$$

$$B_1(1, 0),\ B_2\left(\frac{1}{2}, 0\right),\ \ldots,\ B_n\left(\frac{1}{n}, 0\right),\ \ldots.$$

Рассмотрим линию, состоящую из бесконечного числа прямолинейных звеньев:

$$B_1A_2,\ A_2B_3,\ B_3A_4,\ A_4B_5,\ \ldots,\ A_{2n}B_{2n+1},\ \ldots$$

и точки 0 (черт. 345) Эта линия является графиком непрерывной на сегменте [0, 1] функции $y=f(x)$, а потому она есть простая дуга. Рассмотрим такую последовательность вписанных в нее ломаных:

$B_1A_2B_3O$; $B_1A_2B_3A_4B_5O$; $B_1A_2 \ldots B_7O$; и т. д. (черт. 346).

Каждая из наклонных B_1A_2 и A_2B_3 по длине больше перпендикуляра A_2B_2, а потому L_1 — периметр первой ломаной — больше, чем $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

Аналогично длины последующих ломаных удовлетворяют неравенствам:

$$L_2 > 1+2\cdot\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2};$$

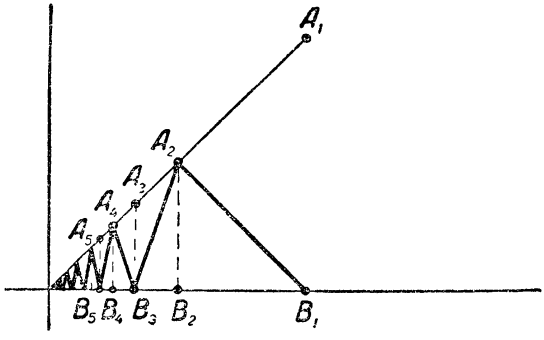
$$L_3 > 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

и т. д. Но последовательность сумм

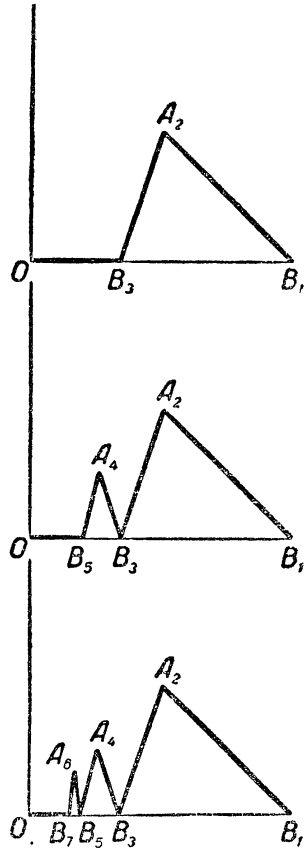
$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}$$

расходится к $+\infty$; а потому и последовательность периметров вписанных ломаных неограничена. Значит, рассматриваемая простая дуга неспрямляема.

Всякому разбиению (σ) дуги AB соответствует периметр L (σ) вписанной ломаной. Не представляет затруднений ввести понятие предела периметров вписанных ломаных посредством определения, аналогичного определению понятия предела интегральных сумм. Именно, *число* s *есть предел периметров вписанных ломаных, если неравенство* $|L(\sigma)-s|<\varepsilon$ *выполняется для любого* δ*-разбиения* (σ) *дуги* AB, *где число* δ *определяется заданием* ε.



Черт. 345.



Черт. 346.

Если при любом наперед заданном (как угодно большом) числе $N>0$ *имеет место неравенство* $L(\sigma)>N$ *для любого* δ*-разбиения дуги* AB (δ *определяется заданием* N), *то говорят, что* $L(\sigma)$ *имеет бесконечный предел, равный* $+\infty$.

Теорема. *Для всякой простой дуги (или простой замкнутой линии) существует предел (конечный или бесконечный) периметров вписанных ломаных* $\lim L(\sigma)$. *Этот предел равен верхней грани множества периметров вписанных ломаных*

$$s = \sup L(\sigma).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы о пределах верхних и нижних интегральных сумм (см. § 126). Чтобы применить метод доказательства этой теоремы, надо установить, что периметрам $L(\sigma)$ вписанных ломаных присущи все те свойства нижних сумм, которые были использованы в доказательстве. Эти свойства таковы:

1° Пусь T — какая-нибудь точка дуги AB. Точка T есть либо внутренняя точка одной из частичных дуг M_iM_{i-1} δ-разбиения (σ), либо является общим концом двух частичных дуг. Дуги (одна или две), покрывающие точку T, дают в периметре вписанной ломаной $L(\sigma)$ привзнос*, меньший 2σ [так как (σ) есть δ-разбиение].

2° При продолжении разбиения периметры вписанных ломаных не убывают. В самом деле, при продолжении разбиения могут добавиться новые вершины, но тогда соответствующее прямолинейное звено заменяется ломаной, в результате чего периметр ломаной может лишь увеличиться.

Рассмотрим для определенности случай спрямляемой дуги (s — действительное число).

Случай неспрямляемой дуги ($s = +\infty$) рассматривается аналогично (предоставляем это читателю). В силу свойств верхней грани, существует такое разбиение

$$A = T_0,\ T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_p = B \qquad (\tau)$$

дуги AB, что периметр $L(\tau)$ вписанной ломаной удовлетворяет неравенствам:

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < L(\tau) \leqslant s. \qquad (1)$$

Рассмотрим любое δ-разбиение

$$A = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n = B \qquad (\sigma)$$

дуги AB. В силу свойств верхней грани,

$$0 < L(\sigma) < s. \qquad (2)$$

---

* Привзнос дуги $\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ в $L(\sigma)$ равен длине стягивающей хорды $M_{i-1}M_i$.

Составим суммарное разбиение (σ^*) для (τ) и (σ). Разбиение (σ^*) есть δ-разбиение. Имеем:

$$s-\frac{\varepsilon}{2}<L(\tau)\leqslant L(\sigma^*)\leqslant s.$$

Разность $L(\sigma^*)-L(\sigma)\leqslant 4(p-1)\delta$, ибо при вычитании остаются привзносы дуг (в обоих δ-разбиениях (σ) и (σ^*)), покрывающих точки $T_1, T_2, \ldots, T_{p-1}$. Эта разность меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при $\delta<\frac{\varepsilon}{8(p-1)}$, откуда и получим:

$$s-\varepsilon<L(\sigma)\leqslant s, \quad \text{ч. т. д.}$$

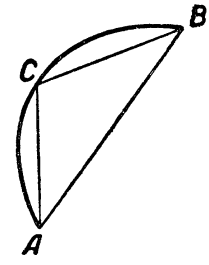
Определение. *Предел периметров $L(\sigma)$ ломаных, вписанных в дугу AB, называется длиной дуги AB.*

Всякая спрямляемая дуга имеет конечную длину

$$s=\lim L(\sigma).$$

Длина неспрямляемой дуги считается равной $+\infty$.

Примечание. Для нахождения длины дуги можно пользоваться разбиением специального вида. Например, можно составить некоторую последовательность $\delta_1, \delta_2, \ldots$ $\delta_n, \ldots$-разбиений, но при непременном условии $\lim \delta_n=0$. Так, зная, что окружность спрямляема, можно для вычисления ее длины пользоваться (в частности) последовательностью периметров вписанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа сторон.



Черт. 347.

Теорема. *Длина криволинейной дуги AB больше длины хорды AB* (черт. 347).

В самом деле, возьмем любую точку C дуги, не лежащую на прямой AB, и рассмотрим двухзвенную вписанную ломаную ACB. Длина дуги s, будучи верхней гранью длин вписанных ломаных, не меньше длины ACB, а потому

$$AB<AC+CB\leqslant s, \quad \text{ч. т. д.}$$

Значит, из всех дуг, соединяющих две данные точки, прямолинейный отрезок имеет наименьшую длину.

Теорема (свойства аддитивности).

1° *Если дуга s спрямляема, то при любом ее разбиении на некоторое количество n дуг $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n$ каждая из частей s_i спрямляема и*

$$\text{дл.}s=\text{дл.}s_1+\text{дл.}s_2+\ldots+\text{дл.}s_n.$$

2° *Если каждая из частичных дуг s_i спрямляема, то вся дуга также спрямляема.*

Доказательство точно такое же, как доказательство аддитивности интеграла: достаточно воспользоваться таким разбиением, при котором концы дуг $s_1, s_2, \ldots, s_n$ входят в состав точек деления (см. § 132).

Выясним, каким условиям должны удовлетворять функции $x(t)$ и $y(t)$ для того, чтобы дуга $x=x(t)$, $y=y(t)$, $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ была спрямляемой. Длина вписанной ломаной равна

$$L(\sigma)=\sum \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2}.$$

Как легко видеть, имеют место неравенства;

$$L(\sigma) \geqslant \sum |x(t_i)-x(t_{i-1})|, \quad L(\sigma) \geqslant \sum |y(t_i)-y(t_{i-1})|.$$

Значит, необходимым условием спрямляемости данной дуги является ограниченность каждой из сумм

$$\sum |x(t_i)-x(t_{i-1})| \quad \text{и} \quad \sum |y(t_i)-y(t_{i-1})|$$

при любом разбиении сегмента $[\alpha, \beta]$. Это условие является и достаточным. Для доказательства примем во внимание неравенство:

$$\sum \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum |x(t_i)-x(t_{i-1})| + \sum |y(t_i)-y(t_{i-1})|.$$

Если каждая из сумм, находящихся в правой части последнего неравенства, ограничена, т. е. меньше некоторого числа Q при любом разбиении сегмента $[\alpha, \beta]$, то $L(\sigma) < 2Q$. Следовательно, множество периметров вписанных ломаных ограничено, т. е. дуга спрямляема.

Определение. *Функция $f(x)$, ограниченная на сегменте $[\alpha, \beta]$, называется функцией ограниченной вариации на этом сегменте, если множество сумм*

$$V(\sigma)=\sum |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

ограничено при всевозможных разбиениях сегмента $[a, b]$.

Верхняя грань множества сумм $V(\sigma)$ называется вариацией функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначается так: $\operatorname{var} f[a, b]$.

Предлагаем читателю доказать, что если функция непрерывна и ограниченной вариации, то

$$\lim V(\sigma)=\operatorname{var} f[a, b],$$

а также что $\operatorname{var} f[a, b]$ есть аддитивная функция сегмента.

Отметим весьма важный класс функций ограниченной вариации. *Всякая монотонная на сегменте функция есть функция ограниченной вариации.* Предположим для определенности, что $f(x)$ не убывает, тогда

$$\sum |f(x_i)-f(x_{i-1})|=[f(x_1)-f(a)]+[f(x_2)-f(x_1)]+\ldots$$
$$+[f(b)-f(x_{n-1})]=f(b)-f(a);$$

значит,

$$\operatorname{var} f[a, b]=f(b)-f(a).$$

Вернемся к условию спрямляемости дуг: *для спрямляемости дуги*

$$x=x(t), \quad y=y(t); \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$ и $y(t)$ были функциями ограниченной вариации на сегменте $[\alpha, \beta]$.

В частности, если непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$ монотонны или сегмент $[\alpha, \beta]$ можно разбить на конечное число частей, на которых каждая из этих функций монотонна, то соответствующая дуга спрямляема.

Примерами непрерывных функций неограниченной вариации могут служить:

1) функция, рассмотренная в примере 2 на стр. 504.

2) функция $f(x)=x\cos\frac{\pi}{x}$ на сегменте $[0, 1]$.

Имеем;

$$f(1)=-1;\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2};\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3},\ \ldots,\ f\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^n\frac{1}{n},$$

Для разбиения

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\ \left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$$

получим:

$$\left|f(1)-f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right)-f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right|+\left|f\left(\tfrac{1}{3}\right)-f\left(\tfrac{1}{4}\right)\right|+\ \ldots\ +$$
$$+\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right)-f(0)\right|=\left(\tfrac{1}{2}+1\right)+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)+\ \ldots\ +\frac{1}{n},$$

а эта сумма неограничена.

§ 146. Вычисление длины дуги посредством интеграла

Определение. *Дуга AB называется гладкой, если она может быть параметризована посредством системы функций*

$$x=x(t),\ y=y(t);\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

*имеющих непрерывные производные на сегменте $[\alpha, \beta]$, причем ни в какой точке интервала (α, β) производные x' и y' обе не обращаются в нуль, т. е. $x'^2+y'^2>0$ *.*

Дуга AB называется кусочно гладкой, если она может быть разбита на конечное число гладких дуг.

Гладкая дуга в каждой своей внутренней точке имеет касательную и односторонние касательные в концах. Кусочно гладкие дуги могут иметь конечное число угловых точек.

Примеры.

1. График функции $y=f(t)$, имеющей непрерывную на $[a, b]$ производную, есть гладкая дуга.
2. Эллипс $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ есть гладкая линия.
3. Многоугольник есть кусочно гладкая линия.
4. Дуга $y=x\cos\frac{1}{x}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ не является кусочно гладкой, так как в точке $x=0$ она не имеет касательной ни правой, ни левой.

---

* Точки, в которых при любой параметризации $x'=y'=0$ рассматриваются как особые и изучаются в дифференциальной геометрии.

5. Ломаная с бесконечным числом звеньев не является кусочно гладкой.

Теорема. *Кусочно гладкая дуга*

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

спрямляема, ее длина выражается интегралом:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Доказательство. Достаточно провести доказательство для случая гладкой дуги, так как всякую кусочно гладкую дугу можно (в силу определения) разбить на конечное число гладких звеньев и воспользоваться свойством аддитивности длины дуги и интеграла.

Пусть (σ) — любое разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$. Составим выражение для длины соответствующей вписанной ломаной:

$$L(\sigma) = \sum \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

Применим теорему Лагранжа:

$$L(\sigma) = \sum \sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + y'(\vartheta_i)]^2}(t_i - t_{i-1}),$$

где $\theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ и $\vartheta_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

Составим какую-нибудь интегральную сумму функции

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

для того же разбиения

$$S(\sigma) = \sum \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}\,(t_i - t_{i-1}).$$

Рассмотрим разность $\Delta(\sigma) = L(\sigma) - S(\sigma)$.
Докажем, что $\lim \Delta(\sigma) = 0$. В самом деле,

$$|\Delta(\sigma)| = \left|\sum \left\{\sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2} - \sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + [y'(\vartheta_i)]^2}\right\}(t_i - t_{i-1})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum \left|\sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2} - \sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + [y'(\vartheta_i)]^2}\right|(t_i - t_{i-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum |x'(\xi_i) - x'(\theta_i)|\,(t_i - t_{i-1}) + \sum |y'(\xi_i) - y'(\vartheta_i)|\,(t_i - t_{i-1})\ *.$$

---

* Мы пользуемся следующим неравенством:

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}\right| \leqslant |a - c| + |b - d|.$$

В самом деле,

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}\right| = \left|\frac{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}}\right| =$$

В силу равномерной непрерывности производных $x'(t)$ и $y'(t)$ при любом достаточно мелком разбиении (σ) во всех ячейках будем иметь:

$$|x'(\xi_i)-x'(\theta_i)|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \quad \text{и} \quad |y'(\xi_i)-y'(\vartheta_i)|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)};$$

но тогда

$$|\Delta(\sigma)|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\sum(t_i-t_{i-1})+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\sum(t_i-t_{i-1})=\varepsilon.$$

Так как

$$\lim S(\sigma)=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \quad \lim\Delta(\sigma)=0 \text{ и } L(\sigma)=S(\sigma)+\Delta(\sigma),$$

то $\lim L(\sigma)$ существует и равен $\lim S(\sigma)$:

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \qquad \text{ч. т. д.}$$

В частности, если дуга задана уравнением $y=f(x)$ и производная $f'(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, можно положить $t=x$ $x(t)=x$, $y(t)=f(x)$, откуда

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Для дуги, заданной в полярных координатах уравнением $\varrho=f(\varphi)$, приняв за параметр полярный угол, получим:
$x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, $x'=\varrho'\cos\varphi-\varrho\sin\varphi$, $y'=\varrho'\sin\varphi+\varrho\cos\varphi$, откуда

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho'^2+\varrho^2}\,d\varphi=\int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\varphi)]^2+[f(\varphi)]^2}\,d\varphi.$$

Для удобства запоминания общей формулы внесем dt под знак радикала, тогда получим:

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{dx^2+dy^2},$$

$$=\left|\frac{(a^2-c^2)+(b^2-d^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}\right|\leqslant|a-c|\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}+$$

$$+|b-d|\frac{|b+d|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}};$$

так как множители при $|a-c|$ и $|b-d|$ не превосходят 1, то утверждение становится очевидным. Рассуждения не применимы, если $a=b=c=d=0$, но в этом случае имеет место равенство.

где dx^2 и dy^2 суть квадраты дифференциалов координат. Эта формула сохраняет один и тот же вид при любой параметризации.

Примечание I. Можно доказать, что формула для длины дуги в виде интеграла Дирна в предположении, что производные x' и y' являются интегрируемыми.

Примечание II. Все сказанное о длине дуги плоских линий применимо к пространственным линиям. Если дуга задана уравнениями

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t);\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

и если производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ интегрируемы, то длина дуги выражается интегралом:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

Примеры.

1. Вычислить длину дуги l астроиды (черт. 238):

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t.$$

В силу симметрии линии, достаточно вычислить длину дуги $\frac{s}{4}$, лежащей в первом квадранте:

$$\frac{s}{4}=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=3a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{3a}{2},\ \text{откуда}\ s=6a.$$

2. Вычислить длину цепной линии $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ от точки (0,1 до точки с абсциссой $x>0$·

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx=\int_0^x\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$$

3. Вычислить длину дуги кардиоды $\varrho=2a(1+\cos\varphi)$. Линия симметрична относительно полярной оси, поэтому достаточно найти длину ее верхней половины:

$$\frac{s}{2}=\int_0^{\pi}\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2a}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a,$$

откуда $S=16a$.

Примечание. Длина дуги с данными концами определяется заданием спрямляемой дуги:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

поэтому ее (длину) можно называть функцией линии. Ограничимся простейшим случаем, когда дуга задана уравнением

$$y = f(x); \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

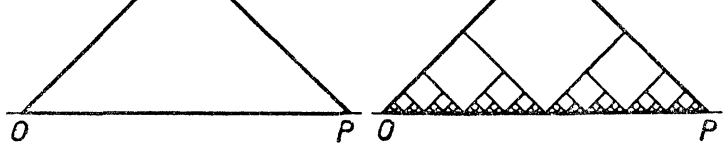
Поставим следующий вопрос; будет ли длина дуги линии $y = \varphi(x)$ «близка» к длине дуги линии $y = f(x)$, если первая линия «близка» ко второй? Иными словами, пусть $\varepsilon > 0$—заданное число, S_f и S_φ—длины дуг $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$; будет ли выполняться неравенство

$$|S_f - S_\varphi| < \varepsilon;$$

для любой линии $y = \varphi(x)$, коль скоро неравенство

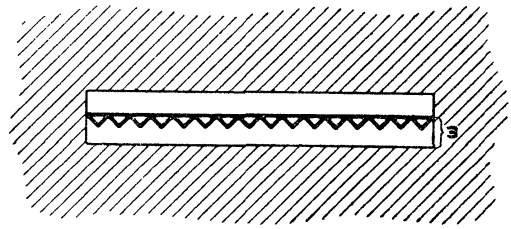
$$|\varphi(x) - f(x)| < \delta$$

выполняется при всех значениях x на сегменте $[a, b]$, где $\delta > 0$ надлежащим образом подобранное число? Ответ отрицательный. Достаточно при-



Черт. 348

вести хотя бы один пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \text{const} = 0$ на сегменте $[0, 1]$. Длина отрезка $[0, 1]$ есть 1. Проделаем теперь следующее построение: как на гипотенузе, на отрезке $[0, 1]$ построим равнобедренный прямоугольный треугольник (левый черт. 348) и рассмотрим функцию, графиком которой является ломаная OMP. Длина этой ломаной равна $\sqrt{2}$. Разделим отрезок OP на 2^n равных частей и для каждой части проделаем описанное построение. Мы получим последовательность ломаных, изображенную на правом чертеже 348. Длина ломаной L_n равна $2^n \dfrac{\sqrt{2}}{2^n} = \sqrt{2}$. Высота прямоугольников, входящих в состав L_n, равна $\dfrac{1}{2^n}$, поэтому при достаточно большом n линия L_n будет лежать в любой наперед заданной как угодно узкой полосе, для которой $[0, 1]$ есть средняя линия, однако разность между длинами L_n и отрезка $[0, 1]$ есть константа, равная $\sqrt{2} - 1$(черт. 349). Образно говоря, зигзагообразный путь может оказаться значительно длиннее прямого, хотя он и мало отклоняется от прямого пути.



Черт. 349.

§ 147. Длина дуги как параметр

Рассмотрим спрямляемую дугу AB:

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Пусть $t \in [\alpha, \beta]$ — любое значение параметра, T — соответствующая точка дуги. Длина дуги AT (черт. 350) есть функция параметра t

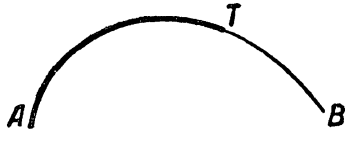
$$\text{дл. } \overset{\smile}{AT} = s(t).$$

Функция $s(t)$ является возрастающей.
В самом деле, если $t_1 < t_2$, то

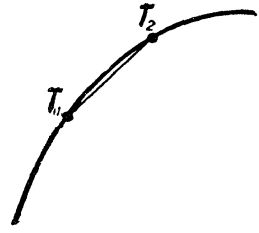
$$s(t_2) - s(t_1) = \text{дл. } \overset{\smile}{TT_2} \geqslant \text{дл. } \overline{TT_2} > 0 \quad \text{(черт. 351).}$$

Функция $s(t)$ *непрерывна на сегменте* $[\alpha, \beta]$.

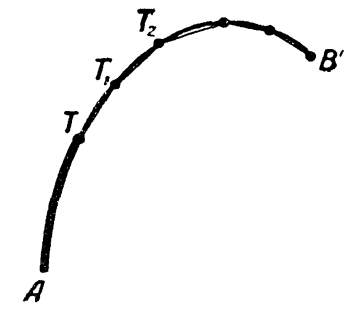
Для кусочно гладкой дуги длина будет $s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, а поэтому она является непрерывной функцией параметра t.



Черт. 350.



Черт. 351.



Черт. 352.

Пусть AB — любая спрямляемая дуга. Докажем, что $s(t)$ непрерывна справа в любой точке $t \in [\alpha, \beta]$ (непрерывность слева доказывается аналогично). Рассмотрим любое δ-разбиение дуги TB, взятое при условии

$$\text{дл. } \overset{\smile}{TB} - \text{дл. } (TT_1T_2 \ldots B) < \varepsilon_1,$$

где $TT_1 \ldots B$ (черт. 352) — соответствующая вписанная ломаная. Так как

$$\text{дл. } \overset{\smile}{TB} = \text{дл. } \overset{\smile}{TT_1} + \text{дл. } \overset{\smile}{T_1B}$$

и дл. $(TT_1 \ldots B) = \text{дл. } TT_1 + \text{дл. } (T_1T_2 \ldots B)$,

то

$$\text{дл. } \overset{\smile}{TT_1} = \text{дл. } \overset{\smile}{TB} - \text{дл. } \overset{\smile}{T_1B} = \text{дл. } \overset{\smile}{TB} - \text{дл. } (TT_1T_2 \ldots B) -$$

$$-(\text{дл. } \overset{\smile}{T_1B} - \text{дл. } (T_1T_2 \ldots B)) + \text{дл. } (TT_1T_2 \ldots B) - \text{дл. } (T_1T_2 \ldots B) <$$

$$< \varepsilon_1 - [\text{дл. } \overset{\smile}{T_1B} - \text{дл. } (T_1T_2 \ldots B)] + \text{дл. } \overline{TT_1} < 2\varepsilon_1 + \delta.$$

Если числа ε_1 и δ взять меньшими $\frac{\varepsilon}{3}$ и принять во внимание, что дл. $\overset{\smile}{TT_1} = s(t_1) - s(t)$, то получим:

$$0 < s(t_1) - s(t) < \varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{t_1 \to t+} s(t_1) - s(t), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Будучи непрерывной возрастающей функцией, $s = s(t)$ имеет обратную функцию $t = t(s)$. Система $x = x[t(s)]$ и $y = y[t(s)]$ дает параметрическое представление данной линии, где за параметр принята длина дуги, отсчитываемая от точки A.

Для гладкой дуги ее длина $s(t)$, отсчитываемая от точки A, является дифференцируемой функцией:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Из последнего равенства получим:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Если приращение параметра $dt > 0$, т. е. отсчет дуг ведется в «положительном» направлении, устанавливаемом на дуге данной параметризацией, то

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Последнее выражение называется дифференциалом дуги. В этом виде формула для дифференциала дуги остается одной и той же (инвариантной) при любом способе параметризации дуги посредством дифференцируемых функций $x(t)$ и $y(t)$.

Пример.

В примере 2 предыдущего параграфа мы получим для длины дуги цепной линии $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, отсчитываемой от точки (0, 1), значение

$$s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Отсюда

$$x = \ln(s + \sqrt{s^2 + 1}).$$

Подставив выражение x через s в равенство

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{получим:} \quad y = \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \sqrt{1 + s^2}.$$

Итак, параметрические уравнения цепной линии суть

$$x = \ln(s + \sqrt{1 + s^2}), \quad y = \sqrt{1 + s^2},$$

где s—длина дуги. Начало отсчета дуг в точке (0, 1).

§ 148. Площадь поверхности тел вращения

Рассмотрим спрямляемую дугу

$$x = x_1^n(t), \quad y = y_1^n(t); \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $y = y(t) \geqslant 0$. В результате вращения этой дуги вокруг оси OX получается некоторая поверхность. К вопросу об общем определении площади, ограниченной кривой поверхностью, мы обратимся во второй части настоящего курса, теперь же ограничимся рассмотрением площади поверхности тела вращения. Возьмем какое-нибудь разбиение дуги и построим ломаную с вершинами в точках деления. В результате вращения ломаной получается поверхность, которую можно разбить на конечное число (по числу звеньев) поверхностей усеченных конусов; площадью этой поверхности называется сумма площадей поверхностей соответствующих усеченных конусов. *Площадью поверхности тела вращения называется предел площади поверхности, образованной вращением вписанной ломаной линии.*

Докажем, что в случае вращения спрямляемой дуги этот предел конечен.

Возьмем в качестве параметра длину дуги, отсчитываемую от точки $A(x(\alpha), y(\alpha))$. Обозначим через S длину всей дуги. Произведем разбиение сегмента $[0, S]$:

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = S.$$

Площадь поверхности, образованной вращением звена $M_{i-1}M_i$, равна

$$\pi (y_i + y_{i-1}) \overline{M_i M_{i-1}},$$

где $\overline{M_i M_{i-1}}$ есть длина i-го звена ломаной. Площадь поверхности, образованной вращением ломаной линии, равна

$$\pi \sum (y_i + y_{i-1}) \overline{M_i M_{i-1}}.$$

Если длину звена $M_i M_{i-1}$ заменить длиной стягиваемой ею дуги $s_i - s_{i-1}$, то получим сумму

$$\pi \sum (y_i + y_{i-1})(s_i - s_{i-1}),$$

которая имеет пределом интеграл

$$2\pi \int_0^s y(s)\, ds.$$

Докажем, что разность между обеими суммами

$$\pi \sum (y_i + y_{i-1})(s_i - s_{i-1}) - \pi \sum (y_i + y_{i-1}) \overline{M_i M_{i-1}}$$

имеет пределом нуль. Отсюда будет следовать, что предел

$$\lim \pi \sum (y_i + y_{i-1}) \overline{M_i M_{i-1}}$$

существует и равен интегралу $2\pi \int_0^s y(s)\, ds$.

Пусть N — верхняя грань функции $|y(s)|$. Имеем:

$$0 < \pi \sum (y_i + y_{i-1})(s_i - s_{i-1}) - \pi \sum (y_i + y_{i-1})(\overline{M_i M_{i-1}}) =$$
$$= \pi \sum (y_i + y_{i-1})[(s_i - s_{i-1}) - \overline{M_i M_{i-1}}] \leqslant$$
$$\leqslant \pi 2N [\sum (s_i - s_{i-1}) - \sum \overline{M_i M_{i-1}}];$$

но $\sum (s_i - s_{i-1})$ есть длина всей дуги S, а $\sum M_i M_{i-1}$ есть длина вписанной ломаной. Разность между этими суммами имеет пределом нуль, ч. т. д.

Итак, площадь поверхности тела вращения выражается интегралом

$$2\pi \int_0^s y(s)\, ds.$$

Переходя к параметру t, получим в случае кусочно гладкой дуги

$$2\pi \int_0^s y(s)\, ds = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \frac{ds}{dt} dt = 2\pi \int_\alpha^\beta y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

В частности, если дуга задана уравнением

$$y = f(x); \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то площадь поверхности тела вращения выразится интегралом:

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

В полярных координатах будем иметь:

$$2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, dx.$$

Пример.

Круг

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (\text{где } 0 < r < b)$$

вращается вокруг оси абсцисс; поверхность вращения есть тор. Вычислить площадь поверхности тора. Возьмем параметрические уравнения круга, для чего поместим полюс полярной системы координат в точку $(0, b)$ (полярная

ось параллельная оси абсцисс) Имеем: $x=r\cos t$, $y=b+r\sin t$, где t — полярный угол. Площадь поверхности тора выразится интегралом:

$$2\pi\int_0^{2\pi}(b+r\sin t)\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt=2\pi r\int_0^{2\pi}(b+r\sin t)\,dt=4\pi^2br.$$

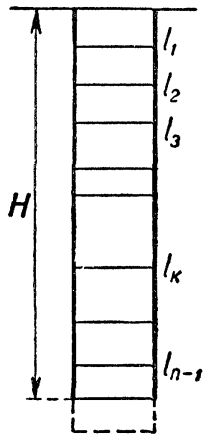
§ 149. Физические приложения интегрального исчисления

Рассмотрим несколько примеров на приложение интегрального исчисления к вопросам физики.

1. Растяжение под влиянием собственного веса.

Рассмотрим металлический стержень в форме цилиндра высоты H с площадью основания A.

Если его подвесить, то длина стержня увеличится. Вычислим удлинение стержня. Разобьем цилиндр плоскостями, перпендикулярными образующей, на n цилиндров. Обозначим расстояния плоскостей от точки подвеса через $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ (черт. 353). Рассмотрим цилиндр номера k, считая сверху. Этот цилиндр высоты l_k-l_{k-1} растягивается силой веса цилиндров, лежащих ниже. Этот вес равен $A(H-l_k)\delta$ (δ — плотность материала).



Черт. 353.

Величина удлинения λ_k по закону Гука равна:

$$\frac{A(H-l_k)\,\delta\,(l_k-l_{k-1})}{AE}\quad (E\text{ — модуль растяжения}).$$

Итак,

$$\lambda_k=\frac{\delta}{E}(H-l_k)(l_k-l_{k-1}).$$

Таким образом, сумма удлинений всех цилиндров, т. е. всего стержня, приближенно равна сумме

$$\frac{\delta}{E}\sum(H-l_k)(l_k-l_{k-1}).$$

Вычисление тем точнее, чем l_k-l_{k-1} меньше. Растяжение цилиндра есть предел суммы:

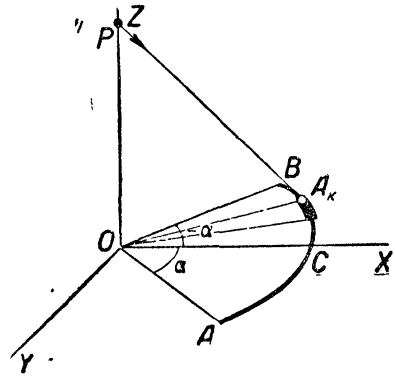
$$\lim\frac{\delta}{E}\sum(H-l_k)(l_k-l_{k-1})=\frac{\delta}{E}\int_0^H(H-l)\,dl=\frac{\delta H^2}{2E}.$$

Обозначим критическую нагрузку через P (т. е. P — наименьшая сила, разрывающая цилиндр из того же металла с площадью основания 1). Тогда данный цилиндр, расположенный горизонтально, разорвется под действием силы PA. Таким образом, подвешенный стержень разорвется под влиянием собственного веса, если удлинение его будет то же, что под действием силы AP. Но это последнее равно

$$\frac{H\cdot PA}{E\cdot A}=\frac{HP}{E}.$$

Отсюда $\frac{\delta H^2}{2E}=\frac{HP}{E}$ и $H=\frac{2P}{\delta}$. Таким образом, наименьшая длина стержня, разрывающегося под влиянием собственного веса, равна $\frac{2P}{\delta}$.

2. Вычислить компоненты силы притяжения дугой AB окружности радиуса a, с центральным углом 2α материальной точки P, имеющей массу μ и отстоящей на расстоянии h от плоскости круга, причем проекция O точки P на эту плоскость есть центр круга (черт. 354). Пусть δ—плотность дуги AB. Расположим систему прямоугольных координат так: точка O есть начало, ось OX проходит через середину C дуги AB, при этом абсцисса точки C и аппликата точки P положительны. Разобьем дугу AB точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ на n дуг. Вычислим компоненты силы притяжения точки P дугой $A_{k-1}A_k$, полагая массу дуги сосредоточенной в точке A_k.



Черт. 354.

Обозначим угол A_kOC через φ_k $(-\alpha \leqslant \varphi_k \leqslant \alpha)$. Масса дуги $A_{k-1}A_k$ равна $a(\varphi_k - \varphi_{k-1})\,\delta$.

Сила F_k притяжения этой дугой точки P приближенно равна

$$\frac{\mu a \delta (\varphi_k - \varphi_{k-1})}{PA_k},$$

и направлена от точки P к A_k. Компоненты по осям OX, OY, OZ соответственно равны $F_k \cos\alpha_k$, $F_k \cos\beta_k$ и $F_k \cos\gamma_k$, где α_k, β_k и γ_k — углы прямой PA_k с положительными направлениями осей OX, OY, OZ (соответственно). Зная координаты точки A_k $(a\cos\varphi_k, a\sin\varphi_k, 0)$ и точки $P(0, 0, h)$, найдем компоненты силы F_k по осям OX, OY и OZ (соответственно);

$$\frac{\mu a^2 \delta \cos\varphi_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}}; \quad \frac{\mu a^2 \delta \sin\varphi_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}}; \quad -\frac{\mu a \delta h (\varphi_k - \varphi_{k-1})}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}}.$$

Суммы компонентов притяжения точки P всеми дугами A_kA_{k-1} равны

$$\frac{\mu a^2 \delta}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}} \sum \cos\varphi_k (\varphi_k - \varphi_{k-1});$$

$$\frac{\mu a^2 \delta}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}} \sum \sin\varphi_k (\varphi_k - \varphi_{k-1}); \quad -\frac{\mu a \delta h}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}} \sum (\varphi_k - \varphi_{k-1}).$$

Пределы этих сумм суть компоненты притяжения точки P и дуги AB

$$F_x = \frac{\mu a^2 \delta}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}} \int_{-a}^{a} \cos\varphi\, d\varphi; \qquad F_y = \frac{\mu a^2 \delta}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}} \int_{-a}^{a} \sin\varphi\, d\varphi;$$

$$F_z = -\frac{\mu a \delta h}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}} \int_{-a}^{a} d\varphi.$$

Итак, $F_x = \dfrac{2\mu a^2 \delta \sin\alpha}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}}$; $F_y = 0$; $F_z = -\dfrac{2\mu a \delta h \alpha}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}}$.

Отсюда по компонентам найдем силу притяжения

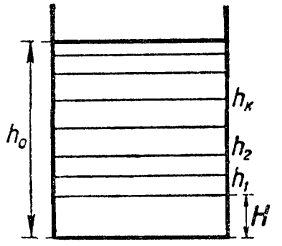
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Если $h=0$, т. е. точка P совпадает с O, то компоненты силы притяжения дугой AB центра O равны:

$$F_x=\frac{2\mu\delta\sin\alpha}{a}; \qquad F_y=0; \qquad F_z=0.$$

3. Вычислить работу, необходимую для сжатия идеального газа в цилиндрическом сосуде от объема v_0 до объема V; площадь основания цилиндра обозначена через A. Пусть объем v_0 заключен в цилиндре высоты h_0, а объем V — в цилиндре высоты H.

Разделим мысленно цилиндр плоскостями, параллельными основанию, на n цилиндров и обозначим расстояния этих плоскостей до плоскости основания через $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ (черт. 355), объем цилиндра с высотой h_k через v_k.



Черт. 355.

Работа для сжатия объема v_{k-1} до v_k равна приближенно произведению силы на путь. Так как сила равна давлению газа на площадь поршня, то из формулы $v_k p_k = c$ имеем $p_k=\frac{c}{v_k}$. Итак, работа силы приближенно равна

$$\frac{cA}{v_k}(h_k-h_{k-1}), \quad \text{т. е.} \quad \frac{c}{h_k}(h_k-h_{k-1}) \quad (v_k=Ah_k).$$

Мы получили не точное, а приближенное выражение работы, так как сила давления газа не постоянна при сокращении объема. Таким образом, работа по сжатию газа от объема v_0 до объема V приближенно равна сумме работ, необходимых для сжатия объема v_0 до v_{n-1}, v_{n-1} до v_{n-2}, ..., v_1 до V. Итак, приближенно, работа силы равна:

$$Q=\sum\frac{c}{h_k}(h_k-h_{k-1})=c\sum\frac{h_k-h_{k-1}}{h_k}.$$

В качестве числа, измеряющего работу, принимается $\lim Q$:

$$P=c\lim\sum\frac{h_k-h_{k-1}}{h_k}, \quad \text{т. е.} \quad P=c\int_H^{h_0}\frac{dh}{h}=c\ln\frac{v_0}{V},$$

но $v_0p_0=c$, а потому $P=v_0p_0\ln\frac{v_0}{V}$,

или $P=v_0p_0\ln\frac{p}{p_0}$, где p и p_0 — давления газа при объемах V и v_0 соответственно.

§ 150. Приближенное вычисление определенных интегралов

Формула прямоугольников. Пусть требуется вычислить

$$\int_a^b f(x)\,dx, \text{ где } f(x) \text{ — непрерывная функция;}$$

согласно определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\sum f(\xi_i)\,\sigma_i,$$

поэтому можно приближенно считать:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum f(\xi_i)\,\sigma_i. \tag{1}$$

Это равенство, вообще говоря, тем точнее, чем max σ_i меньше. В частности,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum M_i\sigma_i \tag{2}$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum m_i\sigma_i. \tag{3}$$

В первом случае мы имеем приближенное значение интеграла с избытком, а во втором с недостатком. Приближенные формулы эти имеют простой геометрический смысл: если $f(x) \geqslant 0$, то площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей ступенчатых прямоугольников. Ошибка при вычислении интеграла по этим формулам не превышает

$$\sum (M_i - m_i)\,\sigma_i.$$

Если производная $f'(x)$ ограничена, т. е. $|f'(x)| \leqslant N$, то по формуле Лагранжа получим $M_i - m_i = f(\xi_i) - f(\eta_i) = |\xi_i - \eta_i|\,f'(\xi_i)$, а потому $|M_i - m_i| \leqslant \sigma_i N$. Значит,

$$\sum (M_i - m_i)\,\sigma_i \leqslant N \sum \sigma_i^2.$$

Если сегмент $[a, b]$ разделен на n равных частей $\sigma_i = \frac{b-a}{n}$, тогда

$$\sum \sigma_i^2 = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Итак,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum f(\xi_i)\,\sigma_i \right| < \frac{N(b-a)^2}{n}.$$

Ошибка будет меньше данного числа $\varepsilon > 0$, если $n > N\frac{(b-a)^2}{\varepsilon}$. Практически при вычислении интегралов по формуле (1) берут в качестве ξ_i либо начальные, либо конечные точки сегментов σ_i, а длины этих сегментов полагают равными:

$$\sigma_k = \frac{b-a}{n}.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(a) + f(x_1) + \ \ldots\ + f(x_{n-1})],$$

или

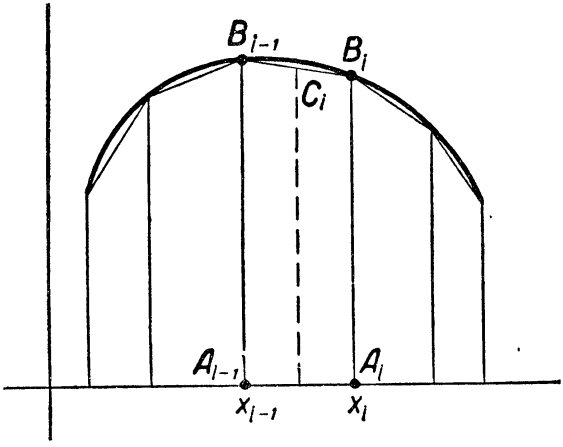
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \ \ldots\ + f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Формула трапеции. Частным случаем формулы (1) является следующая формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\,\sigma_i. \qquad (4)$$

В самом деле, так как число $\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$ заключено между числами $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, то, в силу непрерывности функции $f(x)$, найдется такое число ξ_i промежуточное между x_{i-1} и x_i, что

$$f(\xi_i)=\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}.$$



Черт. 356.

Формула (4) имеет простой геометрический смысл:

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$$

есть полусумма ординат $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ графика функции $f(x)$.

Таким образом, $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$ есть ордината середины c_i хорды $B_{i-1}B_i$, соединяющей точки графика с абсциссами x_{i-1} и x_i (черт. 356). Значит, $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\,\sigma_i$ есть площадь прямолинейной трапеции $A_{i-1}B_{i-1}B_iA_i$.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей некоторых прямолинейных трапеций.

Если положим $\sigma_k=\frac{b-a}{n}$, то получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\,[f(a)+f(b)+2(f(x_1)+f(x_2)+\ \dots\ +f(x_{n-1}))]; \qquad (5)$$

формула (5) носит название формулы трапеций.

Выведем формулу, позволяющую установить ошибку при вычислении интеграла по формуле трапеций

Предположим, что нужно вычислить $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, где $f(x)$ имеет ограниченную вторую производную $|f''(x)|<M$ на сегменте $[\alpha, \beta]$. Из неравенства $|f''(x)|<M$ следует, что

$$\left|\int_\alpha^x f''(x)\,(x-\alpha)\,dx\right| < \int_\alpha^x M(x-\alpha)\,dx=\frac{M(x-\alpha)^2}{2}. \qquad (6)$$

К интегралу $\int_\alpha^x f''(x)\,(x-\alpha)\,dx$ применяем формулу интегрирования по

частям:

$$\int_{\alpha}^{x} f''(x)(x-\alpha)\,dx=(x-\alpha)f'(x)-\int_{\alpha}^{x} f'(x)\,dx.$$

Неравенство (6) перепишется так:

$$|(x-\alpha)f'(x)-[f(x)-f(\alpha)]|<\frac{M(x-\alpha)^2}{2}.$$

Отсюда

$$\left|\int_{\alpha}^{x}(x-\alpha)f'(x)-f(x)+f(\alpha))\,dx\right|<\int_{\alpha}^{x}\frac{M(x-\alpha)^2}{2}\,dx=\frac{M(x-\alpha)^3}{6}. \qquad (7)$$

Далее,

$$\int_{\alpha}^{x}[(x-\alpha)f'(x)-f(x)+f(\alpha)]\,dx=\int_{\alpha}^{x}(x-\alpha)f'(x)\,dx-\int_{\alpha}^{x}f(x)\,dx+f(\alpha)\int_{\alpha}^{x}dx.$$

Применив к интегралу $\int_{\alpha}^{x}(x-\alpha)f'(x)\,dx$ формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int_{\alpha}^{x}(x-\alpha)f'(x)\,dx=f(x)(x-\alpha)-\int_{\alpha}^{x}f(x)\,dx.$$

Неравенство (7) перепишется так:

$$\left|f(x)(x-\alpha)-\int_{\alpha}^{x}f(x)\,dx-\int_{\alpha}^{x}f(x)\,dx+f(\alpha)(x-\alpha)\right|<\frac{M(x-\alpha)^3}{6}.$$

Положив $x=\beta$, получим:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx-(\beta-\alpha)-\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}\right|<\frac{M(\beta-\alpha)^3}{12}. \qquad (8)$$

Если мы вычисляем $\int_{a}^{b}f(x)\,dx$, причем $|f''(x)|<M$, то, разбивая сегмент на n равных сегментов длины $h=\frac{b-a}{n}=\sigma_i$ точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, получим:

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{b}f(x)\,dx.$$

Значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\sigma_i = \left[\int_a^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(a)+f(x_1))\right] +$$

$$+\left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2))\right] + \ldots + \left[\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(x_{n-1})+f(b))\right].$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum \frac{h}{2}(f(x_{i-1})+f(x_i))\right| \leqslant \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(a)+f(x_1))\right| +$$

$$+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2))\right| + \ldots +$$

$$+\left|\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(x_{n-1})+f(b))\right|. \qquad (9)$$

Применяя неравенство (8) к каждой ячейке σ_i, получим:

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(x_{i-1})+f(x_i))\right| < M\frac{h^3}{12},$$

а поэтому неравенство (9) перепишется так:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\sum [f(x_{i-1})+f(x_i)]\right| < \frac{nh^3}{12}M = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M.$$

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ величина ошибки будет меньше ε, если $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M < \varepsilon$, т. е. если $n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}$.

Формула Симпсона. Предварительно вычислим интеграл:

$$\int_0^{2h} (ax^2+bx+c)\,dx;$$

он равен:

$$\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^{2h} = \frac{8ah^3}{3}+2bh^2+2ch = \frac{h}{3}(8ah^2+6bh+6c).$$

Обозначим ординаты точек параболы $y=ax^2+bx+c$ в точках 0, h, $2h$ соответственно через $y_{\text{л.}}$, $y_{\text{с.}}$, $y_{\text{п.}}$ (левая, средняя и правая ординаты). Тогда

$$y_{\text{л.}} = c,\quad y_{\text{с.}} = ah^2+bh+c,\quad y_{\text{п.}} = 4ah^2+2bh+c.$$

Отсюда

$$y_{\text{л.}}+4y_{\text{с.}}+y_{\text{п.}} = 8ah^2+6bh+6c.$$

Итак,

$$\int_0^{2h} (ax^2+bx+c)\,dx = \frac{h}{3}(y_{\text{л.}}+4y_{\text{с.}}+y_{\text{п.}}).$$

Мы вычислили площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой параболы $y=ax^2+bx+c$, с отрезком оси абсцисс и отрезками прямых $x=0$ и $x=2h$.

Пусть x_0 — произвольное значение аргумента. Обозначим значения функции ax^2+bx+c в точках x_0, x_0+h, x_0+2h соответственно через $\bar{y}_{\text{л.}}$, $\bar{y}_{\text{с.}}$, $\bar{y}_{\text{п.}}$.

Очевидно,

$$\int_{x_0}^{x_0+2h}(ax^2+bx+c)\,dx=\int_0^{2h}[a(x_0+t)^3+b(x_0+t)+c]\,dt$$

(после подстановки $x=x_0+t$).

Но

$$a(x_0+t)^2+b(x_0+t)+c=\bar{a}t^2+\bar{b}t^2+c=\varphi(t).$$

$$y_{\text{л.}}=\varphi(0)=\bar{y}_{\text{л.}},\quad y_{\text{с.}}=\varphi(h)=\bar{y}_{\text{с.}},\quad y_{\text{п.}}=\varphi(2h)=\bar{y}_{\text{п.}}.$$

Значит,

$$\int_{x_0}^{x_0+2h}(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{h}{3}(\bar{y}_{\text{л.}}+4\bar{y}_{\text{с.}}+\bar{y}_{\text{п.}}). \tag{10}$$

Формула (10) выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой через основание и ординаты крайних и средней точек дуги параболы.

Перейдем к приближенному вычислению $\int_a^b f(x)\,dx$; разобьем сегмент $[a, b]$ на n сегментов длины $2h$.

$$\frac{b-a}{n}=2h.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{a+2h}f(x)\,dx+\int_{a+2h}^{a+4h}f(x)\,dx+\ldots+\int_{a+2(n-1)h}^{b}f(x)\,dx.$$

На каждом из этих сегментов будем график $f(x)$ приближенно рассматривать как дугу параболы, ординаты которой в точках $a+2kh$, $a+(2k+1)h$, $a+(2k+2)h$ соответственно равны значениям $f(x)$ в этих точках; очевидно,

$$y_{\text{л.}}=f(a+2kh),\quad y_{\text{с.}}=f(a+(2k+1)h),\quad y_{\text{п.}}=f(a+(2k+2)h).$$

Тогда

$$\int_{a+2kh}^{a+2(k+1)h}f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}[f(a+2kh)+4f(a+(2k+1)h)+f(a+2(k+1)h)].$$

Обозначим

$$f_{2k}(a+2kh)=y_{2k};\quad f(a+(2k+1)h)=y_{2k+1};$$

$$f(a+2(k+1)h)=y_{2k+2}.$$

Тогда

$$\int_{a+2kh}^{a+2(k+1)h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_{2k}+4y_{2k+1}+y_{2k+2}).$$

Итак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a+2(n-1)h}^{b} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})] =$$

$$= \frac{h}{3}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})].$$

Эта формула называется формулой Симпсона.

Для оценки погрешности при пользовании формулой Симпсона рассмотрим разность

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\{f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\}$$

в предположении, что функция $f(x)$ имеет ограниченную четвертую производную на сегменте $[c-h,\ c+h]$. Составим вспомогательную функцию:

$$F(t)=\psi(t)-\left(\frac{t}{h}\right)^5\psi(h),$$

где

$$\psi(t)=\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3}\{f(c-t)+4f(c)+f(c+t)\} \text{ и } 0\leqslant t\leqslant h.$$

Дифференцируя три раза, получим:

$$F'(t)=\frac{2}{3}\{f(c-t)-2f(c)+f(c+t)\}-\frac{t}{3}\{f'(c+t)-f'(c-t)\}-\frac{5t^4}{h^5}\psi(h);$$

$$F''(t)=\frac{1}{3}\{f'(c+t)-f'(c-t)\}-\frac{t}{3}\{f''(c+t)+f''(c-t)\}-\frac{20t^3}{h^5}\psi(h);$$

$$F'''(t)=-\frac{t}{3}\{f'''(c+t)-f'''(c-t)\}-\frac{60t^2}{h^5}\psi(h).$$

По формуле Лагранжа получим:

$$F'''(t)=-\frac{2}{3}t^2\left\{f^{\mathrm{VI}}(\xi)+\frac{90}{h^5}\psi(h)\right\}, \qquad (F''')$$

где $\xi\in(c-t,\ c+t)$.

Так как $F(0)=F(h)=0$, то по теореме Ролля $F'(t_1)=0$, где $0<t_1<h$. Далее, так как $F'(0)=0$, то $F''(t_2)=0$, где $0<t_2<t_1$, и, наконец, так как $F''(0)=0$, то $F'''(t_3)=0$, где $0<t_3<t_2$. Положив в формуле (F''') $t=t_3$, получим:

$$F'''(t_3)=0 \text{ и } \psi(h)=-\frac{h_5}{90}f^{\mathrm{IV}}(\xi), \text{ где } \xi\in(c-t_3,\ c+t_3),$$

или

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\{f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\} = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi).$$

Применив это равенство к k-й ячейке

$$[a+2kh,\ a+2(k+1)h],$$

получим

$$\int_{a+2kh}^{a+2(k+1)h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}[y_{2k}+4y_{2k+1}+y_{2k+2}] = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi_k)$$

(где $c = a+(2k+1)h$).

Если модуль четвертой производной $|f^{IV}(x)| < M$ ограничен на сегменте $[a, b]$, то для погрешности ω, допускаемой при вычислении интеграла при помощи формулы Симпсона, получим следующую оценку:

$$|\omega| = \frac{h^5}{90}\left|\sum_{k=1}^{n} f^{IV}(\xi_k)\right| < \frac{nh^5}{90} M = \frac{(b-a)^5 M}{2880n^4}.$$

Таким образом, величина ошибки при пользовании формулой Симпсона будет меньше $\varepsilon > 0$, если $\frac{(b-a)^5}{2880n^4} M < \varepsilon$, т. е. если

$$n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M}{2880\varepsilon}}.$$

ГЛАВА XII

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 151. Простейшие несобственные интегралы

Если функция $f(x)$ неограничена в промежутке $<a, b>$, то интегральные суммы, составленные для $f(x)$ в данном промежутке $<a, b>$, не могут иметь конечного предела. В самом деле, если, например, $f(x)$ неограничена сверху в ячейке σ_i, то точку ξ_i можно выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$f(\xi) > \frac{N}{\sigma_i},$$

где $N > 0$—любое заданное число. Тогда σ_i даст привзнос $f(\xi_i)\,\sigma_i$ больший, чем N. Выбрав точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n$, можно путем подходящего подбора точки ξ_i получить для интегральной суммы как угодно большое значение. Значит, множество интеграль-

ных сумм не имеет предела (конечного). Следовательно, к неограниченным функциям определение интеграла как предела интегральных сумм неприменимо.

Это определение неприменимо также к функции, рассматриваемой в бесконечном промежутке. В самом деле, бесконечный промежуток нельзя разбить на конечное число ячеек (конечных), а поэтому теряет смысл построение интегральных сумм.

Понятия интеграла от неограниченной функции, а также интеграла, распространенного на бесконечный промежуток, можно обобщить лишь посредством новых (дополнительных) определений.

Рассмотрим функцию, определенную на полусегменте $[a, b]$ (где a — действительное число), при выполнении следующих условий:

1° *Функция* $f(x)$ *интегрируема (следовательно, и ограничена) на любом сегменте* $[a, t]$, *где* $t < b$.

2° *Для верхнего предела* b *имеет место по крайней мере одна из следующих особенностей:*

A) $f(x)$ *неограничена в окрестности точки* b.

B) $b = +\infty$.

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx = I, \quad (t < b), \tag{1}$$

то условимся считать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx = I$$

и называть интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходящимся к числу* I.

Если предел (1) (конечный) не существует, то символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется расходящимся интегралом. Если $I = +\infty$ (или $-\infty$), то говорят, что данный интеграл расходится к $+\infty$ (или к $-\infty$). Расходящемуся интегралу не будем приписывать никакого численного значения.

Аналогично, *если функция* $f(x)$ *в полуинтервале* $(a, b]$:

1° *интегрируема на любом сегменте* $[t, b]$;

2° *для нижнего предела* a *имеет место по крайней мере одна из особенностей*:

A) $f(x)$ *неограничена в окрестности точки* a,

B) $a = -\infty$,

то полагаем по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a} \int_t^b f(x)\,dx, \quad (a<t)$$

в предположении, что этот предел конечен.

Термины «сходящийся» и «расходящийся» интеграл применяются в том же смысле, что и выше.

Интегралы, для которых особенности A и B (хотя бы одна) имеют место лишь на одном верхнем или нижнем пределе, будем называть простейшими несобственными интегралами.

Примеры.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ сходится. Действительно,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim (-e^{-t}+1) = 1.$$

2. Имеем:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to-1} \int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim [-\arcsin t] = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ расходится. В самом деле, $\int_0^t \cos x\,dx = \sin t$, но $\lim\limits_{t\to+\infty} \sin t$ не существует.

4. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad \text{где } p>0.$$

Если $p \neq 1$, то $\int_1^t \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^t = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$.

Если $p<1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{p-1}} = +\infty$, а потому интеграл расходится к $+\infty$.

Если $p>1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{p-1}} = 0$, и интеграл сходится: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

Если $p=1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim \ln t = +\infty$.

Итак, интеграл сходится, если $p>1$, и расходится к $+\infty$, если $p\leqslant 1$.

5. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$, где $p>0$ и $a>0$. Если $p\neq 1$, то

$$\int\limits_t^a \frac{dx}{x^p}=\left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_t^a=\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{a^{p-1}}-\frac{1}{t^{p-1}}\right).$$

Если $p>1$, то $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t^{p-1}}=+\infty$, и данный интеграл расходится к $+\infty$.

Если $0<p<1$, то $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t^{p-1}}=0$, а потому данный интеграл сходится:

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{(1-p)a^{p-1}}.$$

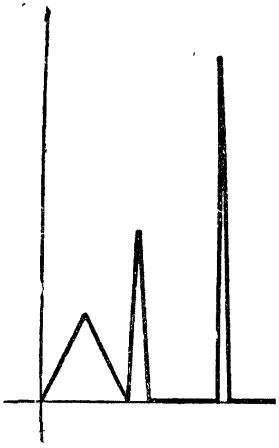
Если $p=1$, то $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_t^a \frac{dx}{x}=\lim\limits_{t\to 0}(\ln a-\ln t)=+\infty$.

Итак, интеграл $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$ сходится, если $0<p<1$, и расходится к $+\infty$, если $p\geqslant 1$.

6. Рассмотрим сегменты

$$[0,1],\ \left[1,1+\frac{1}{2^2}\right],\ \left[2,2+\frac{1}{2^4}\right],\ \ldots,\ \left[n,n+\frac{1}{2^{2n}}\right],\ \ldots \qquad (1)$$

На каждом из сегментов $\left[n,n+\frac{1}{2^{2n}}\right]$, как на основании, построим равнобедренный треугольник с высотой, равной 2^n. Рассмотрим функцию $f(x)$, равную нулю вне сегментов (1) и изображающуюся графически при помощи боковых сторон равнобедренных треугольников, построенных на каждом из сегментов $\left[n,n+\frac{1}{2^{2n}}\right]$ (черт. 357).



Черт. 357.

Интеграл на сегменте $[n,n+1]$, где n — натуральное число, равен площади треугольника с основанием $\frac{1}{2^{2n}}$ и высотой 2^n; следовательно,

$$\int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_0^{n+1} f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Пусть x — любое положительное число и $n=[x]$; имеем $n\leqslant x<n+1$:

$$\int_0^n f(x)\,dx\leqslant\int_0^x f(x)\,dx\leqslant\int_0^{n+1} f(x)\,dx,$$

или, что то же, $1-\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant\int_0^x f(x)\,dx\leqslant 1-\frac{1}{2^{n+2}}$. Из этих неравенств следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

Этот пример показывает, что функция $f(x)$ может быть неограниченной в окрестности точки $+\infty$, а интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ быть сходящимся. Иначе говоря, *возможно, что на верхнем (нижнем) пределе имеют место обе особенности* A *и* B.

§ 152. Теоремы о простейших несобственных интегралах

Доказательства нижеследующих теорем будут даны для несобственных интегралов с особенностью на верхнем пределе. Доказательства для интегралов с особенностью на нижнем пределе аналогичны.

Теорема I (*свойство аддитивности*). *Если* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,\ \text{где}\ a<c<b.$$

Доказательство. Пусть $c<t<b$; по свойству аддитивности собственных (обычных) интегралов имеем:

$$\int_a^t f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^t f(x)\,dx.$$

Так как предел левой части (по предположению) существует, то существует

$$\lim_{t\to b}\int_c^t f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx.$$

Перейдя к пределу, получим доказываемое равенство.

Теорема II (*свойства непрерывности*). *Если* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*

и $b < +\infty$, *то функция* $\Phi(x) = \int_a^x f(z)\,dz$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$.

Доказательство. Для любой точки x, $a \leqslant x < b$ функция $\Phi(x)$ изображается собственным интегралом, а потому непрерывна в этой точке. Если $x = b$, то по определению имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b} \Phi(x) = \Phi(b), \text{ ч. т. д.}$$

Аналогично доказывается непрерывность интеграла $\int_x^b f(x)\,dx$.

Теорема III. *Если* $F(x)$ *есть функция, примитивная относительно* $f(x)$ *на полусегменте* $[a, b)$, *то необходимым и достаточным условием сходимости интеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$ *является существование конечного предела примитивной* $\lim\limits_{x \to b} F(x)$. *При этом условии имеет место формула Лейбница—Ньютона:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b} F(x) - F(a).$$

Доказательство. По формуле Лейбница—Ньютона, для собственных интегралов имеем при $a \leqslant x < b$:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Если в точке b существует предел левой части, то существует предел $F(x)$; обратно, если существует предел $F(x)$, то существует предел левой части. Перейдя к пределу, получим формулу Лейбница—Ньютона, ч. т. д.

Обычно, в целях единообразия в обозначениях, и для несобственных интегралов пишут:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

подразумевая под $F(b)$ предел $\lim\limits_{x \to b} F(x)$ или соответственно под $F(a)$ предел $\lim\limits_{x \to a} F(x)$.

Теорема IV (*интегрирование подстановкой*). *Если функция* $x=\varphi(t)$, *непрерывная в промежутке* $[\alpha, \beta)$ *, удовлетворяет следующим условиям:*

1° *при* $t \in [\alpha, \beta)$ *имеем* $a \leqslant \varphi(t) < b$;

2° $\varphi(\alpha)=a$ и $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t)=b$;

3° *на любом сегменте* $[\alpha, \beta']$ (*положительном или отрицательном*), *содержащемся в* $[\alpha, \beta)$, *выполнены условия, при которых справедлива теорема о подстановке* (*для собственных интегралов*, *§ 138*), *то имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

в предположении, что один из этих интегралов сходится.

Доказательство. Пусть интеграл в левой части равенства (1) сходится.

Если $t \in [\alpha, \beta)$, то по формуле подстановки для собственных интегралов получим:

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx = \int_a^t f(\varphi(t))\,\varphi'(t))\,dt. \tag{2}$$

Так как интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$ сходится, то по формуле о пределе сложной функции существует предел

$$\lim_{t\to\beta} \int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, правая часть равенства (2) сходится к тому же пределу. Переходя к пределу, получим (1).

Обратно, если

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = I$$

сходится, то существует предел правой части (2) в точке β. Функция $x=\varphi(t)$ непрерывна и отображает заданный промежуток $[\beta', \beta)$ на некоторый промежуток $[b', b)$.

---

* Возможность $\alpha > \beta$ не исключается.

Выберем число β' при условии:

$$\left| \int_a^t f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt - I \right| < \varepsilon, \quad \text{если } t \in [\beta', \beta),$$

но тогда [в силу равенства (2)]

$$\left| \int_a^x f(x)\,dx - I \right| < \varepsilon, \quad \text{если } x \in [b', b).$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(x)\,dx = I, \text{ ч. т. д.}$$

Примечание. Формула подстановки может преобразовать собственный интеграл в несобственный, и обратно. Все рассуждения остаются в силе и в том случае, если один из интегралов в формуле является собственным. Всякий собственный интеграл условимся рассматривать как сходящийся.

Теорема V (*интегрирование по частям*). *Если*

1° *производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *интегрируемы на любом сегменте* $[a, t] \subset [a, b]$;

2° *существует предел* $\lim\limits_{x \to b} [f(x)\,\varphi(x)]$,

3° *один из интегралов* $\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx$ *и* $\int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx$ *сходится, то сходится и другой, и имеет место формула:*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \lim_{x \to b} [f(x)\,\varphi(x)] - f(a)\,\varphi(a) - \int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. При $a < x < b$ имеем:

$$\int_a^x f(x)\,\varphi'(x)\,dx = f(x)\,\varphi(x) - f(a)\,\varphi(a) - \int_a^x f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Перейдя к пределу, получим доказываемое равенство. Чтобы сохранить обозначения, обычно пишут:

$$\lim_{x \to b} [f(x)\,\varphi(x) - f(a)\,\varphi(a)] = [f(x)\,\varphi(x)]_a^b.$$

Теорема VI (*свойство дистрибутивности*). *Если*

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

и если сходятся интегралы $\int_a^b f_1(x)\,dx$ и $\int_a^b f_2(x)\,dx$, *то имеет место равенство:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Доказательство основывается на теореме о пределе суммы двух функций (предлагаем провести его учащимся).

Примечание. Предположение, что интегралы в правой части сходятся, существенно. Так, например, функцию $\frac{1}{x^2}$ можно представить в виде следующей суммы: $\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x^2} - x\right) + x$.

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, но интегралы от каждого слагаемого $\int_1^{+\infty} x\,dx$ и $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx$ расходятся.

Теорема VII. *Если*

1° $b < +\infty$,

2° $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$),

3° *интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится, то функция*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

рассматриваемая на сегменте $[a, b]$, *в точке* b *имеет бесконечную производную:*

$$\Phi'(b) = +\infty \text{ (или } -\infty).$$

Доказательство. Предположим для определенности, что $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$; тогда в некоторой окрестности U_b точки b имеем $f(x) \geqslant N$, откуда при $x \in U_b$

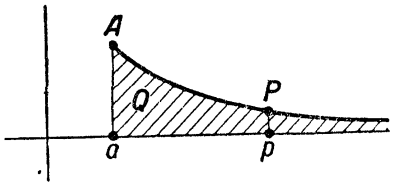
$$\frac{\Phi(x) - \Phi(b)}{x-b} = \frac{\Phi(b) - \Phi(x)}{b-x} = \frac{\int_x^b f(x)\,dx}{b-x} > \frac{N(b-x)}{b-x} = N.$$

Значит, $\Phi'(b) = \lim\limits_{x\to b} \frac{\Phi(x) - \Phi(b)}{x-b} = +\infty$, ч. т. д.

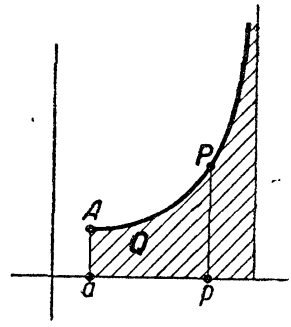
Аналогичная теорема имеет место, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ (или } -\infty).$$

Геометрические предположения. На чертеже 358 изображена часть плоскости Q, ограниченная сверху некоторой линией, имеющей ось OX асимптотой, снизу — осью абсцисс и слева — отрезком прямой. Возьмем на линии точку P с достаточно



Черт. 358.



Черт. 359.

большой абсциссой p. Если существует конечный предел площади криволинейной трапеции $aAPp$

$$\lim_{p \to +\infty} (\text{пл. } aAPp),$$

то этот предел называется площадью Q. Если данная линия является графиком функции $f(x)$, то

$$\text{пл. } (aAPp) = \int_a^p f(x)\,dx \text{ и пл. } Q = \lim_{p \to +\infty} \int_a^p f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Аналогично, площадью фигуры Q, изображенной на чертеже 359, называется конечный предел $\lim\limits_{p \to +\infty}$ (пл. $aAPp$) в предположении, что этот предел существует. Если $y = f(x)$ есть уравнение линии, ограничивающей фигуру Q сверху, то площадь Q выражается несобственным интегралом:

$$\text{пл. } Q = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично могут быть обобщены понятия объема и площади поверхности тел вращения.

Примеры.

1. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Имеем по формуле Лейбница—Ньютона;

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arc\,tg}\, x]_0^{+\infty} = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) - \operatorname{arc\,tg}\, 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$. Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx = [x \ln x]_0^1 - \int\limits_0^1 dx = -1.$$

Формула интегрирования по частям законна, ибо $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$ существует, а интеграл, находящийся в правой части, является собственным.

3. Рассмотрим интеграл $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$ (где n — натуральное число).

Если $n=0$, имеем сходящийся интеграл:

$$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

Сходимость интеграла I_1 можно обнаружить интегрированием по частям

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Далее применяем метод индукции; допустим, что I_{n-1} сходится. Имеем

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = [-e^x x^n]_0^{+\infty} + n \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = nI_{n-1}.$$

Отсюда следует, что I_n сходится.

Применяя последовательно полученную рекуррентную формулу, найдем

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \ldots = n!\ I_0 = n!$$

4. Применим к интегралу $\int\limits_0^{+\infty} z^n e^{-z}dz = n!$ подстановку $z = -(m+1)\ln x$, где $m > -1$. При этой подстановке интеграл $0 < z < +\infty$ отобразится на отрицательный интервал (1, 0), и мы получим:

$$n! = \int\limits_0^{+\infty} z^n e^{-n}dz = (-1)^{n+1}(m+1)^{n+1} \int\limits_1^0 \ln^n x \cdot x^m dx.$$

Отсюда находим:

$$\int_0^1 \ln^n x \cdot x^m dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

5. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Функция $x=\operatorname{tg} t$ отображает интервал $0<x<+\infty$ на интервал $0<t<\frac{\pi}{2}$. Подстановка $x=\operatorname{tg} t$ преобразует данный интеграл в собственный интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t\, dt = \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-3)}{2\cdot 4 \ldots (2n-2)} \frac{\pi}{2}$$ (см. стр 488).

6. Подобно предыдущему примеру, подстановкой $x=\sin t$ найдем:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3 \ldots (n-1)}{2\cdot 4 \ldots n} \dfrac{\pi}{2} & \text{(если } n \text{ четно);} \\ \dfrac{2\cdot 4 \ldots (n-1)}{1\cdot 3 \ldots n} & \text{(если } n \text{ нечетно).} \end{cases}$$

7. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной сверху линией $y=\frac{-x}{\sqrt{x+1}}$, снизу отрезком оси абсцисс $[-1, 0]$ и слева прямой $x=-1$. Имеем: $S=\int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{1+x}} dx$. Произведем подстановку $z^2=1+x$; получим:

$$S=\int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{1+x}} dx = 2\int_0^1 (1-z^2)\, dz = \frac{4}{3}.$$

8. Часть гиперболы $y=\frac{1}{x}$, лежащая вправо от прямой $x=1$, вращается вокруг оси абсцисс; вычислить объем тела вращения. Имеем:

$$V=\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = \pi.$$

§ 153. Интегралы с несколькими особыми точками

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$, для которого особенности имеют место на обоих пределах, тогда как функция $f(x)$ интегрируема на

любом сегменте, содержащемся в промежутке $<a, b>$. Таковы, например, интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и т. п.}$$

Пусть c — некоторая точка, лежащая внутри $<a, b>$. Предположим, что оба простейшие интеграла $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$ сходятся.

Докажем, что значение их суммы не зависит от выбора точки c. Возьмем, например, вместо точки c точку c_1, $c < c_1 < b$; тогда, в силу свойства аддитивности простейших интегралов:

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^c + \int_c^{c_1} + \int_{c_1}^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^b.$$

Определение. Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *считается сходящимся, если сходится каждый из простейших интегралов* $\int_a^c f(x)\,dx$ *и* $\int_c^b f(x)\,dx$, *где* $a < c < b$, *и расходящимся, если хотя бы один из этих интегралов расходится. Значение сходящегося интеграла считается равным сумме:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если в промежутке интеграции $<a, b>$ содержится конечное число особых точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, то выберем n промежуточных точек: $x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < c_3 < \ldots$ $\ldots < c_n < x_n$, и рассмотрим простейшие интегралы

$$\int_{x_0}^{c_1} f(x)\,dx, \quad \int_{c_1}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{c_n}^{x_n} f(x)\,dx.$$

Если каждый из простейших интегралов сходится, то и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *считается сходящимся и равным сумме этих интегралов.*

При таком определении сохраняется свойство аддитивности, а также свойство непрерывности интегралов $\int_a^x f(z)\,dz$ и $\int_x^b f(z)\,dz$.

Примеры.

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_{-\infty}^{0}+\Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_{0}^{+\infty}=\pi$$

2. $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}\Big[x^{\frac{2}{3}}\Big]_{-1}^{0}+\frac{3}{2}\Big[x^{\frac{2}{3}}\Big]_{0}^{1}=0.$$

3. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ расходится, ибо расходятся интегралы $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ и $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}$.

4. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ (где $p>0$) расходится при всех значениях p, так как при $p\geqslant 1$ расходится интеграл $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^p}$, а при $p\leqslant 1$ расходится интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Примечание I. Допустим, что существует $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$, отсюда еще не следует, что существует $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. В самом деле, каждый из интегралов $\int_{-t}^{c} f(x)\,dx$ и $\int_{c}^{t} f(x)\,dx$ в отдельности может не иметь предела, тогда как предел их суммы может существовать.

Так, например, $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx=\lim 0=0$, но $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ расходится, так как расходятся интегралы $\int_{0}^{+\infty} x\,dx$ и $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$.

Примечание II. Идею обобщения понятия интеграла можно сформулировать следующим образом. Зная значение интеграла для любого сегмента $a\leqslant x\leqslant t$, лежащего в промежутке $[a, b)$, мы методом предельного перехода находим значение интеграла, распространенного на весь промежуток $[a, b)$. Тем же методом предельного перехода определяется интеграл с особенностью на нижнем пределе. Пользуясь свойством аддитивности, мы определяем значение интеграла для случая, когда промежуток интеграции содержит конеч-

ное число «особых» точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в окрестности каждой из которых функция $f(x)$ неограничена. Обозначим множество особых точек функции $f(x)$ через E.

Мы рассмотрели лишь частный случай, когда множество E является конечным. Однако метод предельного перехода может быть применен и в некоторых случаях, когда множество E является бесконечным.

Пусть, например, дан сегмент $[0, 1]$, а множество E состоит из точек $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0$.

На любом сегменте $[x, 1]$, где $0<x<1$, содержится лишь конечное число точек множества E, а потому мы умеем вычислить интеграл

$$\int_x^1 f(x)\,dx.$$

Зная этот интеграл, методом предельного перехода можно вычислить

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 f(x)\,dx.$$

Указанным путем можно постепенно вычислять интегралы для случаев все более и более сложной структуры множества E. Однако множество E не может быть произвольным. Рассмотрим, например, функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[0, 1]$ следующим законом соответствия. Если x — иррациональное число или $x=0$, то $f(x)=0$. Если x — рациональное число $\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q>0$, то $f(x)=q$. Функция $f(x)$ неограничена в окрестности любой точки сегмента $[0, 1]$; значит, множество E есть сегмент $[0, 1]$. Так как нет ни одного сегмента, свободного от точек множества E, то предыдущие рассуждения неприменимы.

§ 154. Обобщенная формула Лейбница—Ньютона

Предположим, что промежуток интегрирования $<a, b>$ можно разбить на конечное число промежутков $<a, x_1>$, $<x_1, x_2>$, $\ldots$, $<x_{n-1}, b>$ и что известны примитивные $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots$, $F_n(x)$ относительно подинтегральной функции $f(x)$ на этих промежутках (соответственно).

Теорема. *Если существует* $\int_a^b f(x)\,dx$, *то существует функция* $F(x)$, *непрерывная в интервале* (a, b) *и являющаяся примитивной относительно* $F(x)$ *на каждом из интервалов* (x_i, x_{i+1}).

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_1(x)$, примитивную в интервале (a, x_1).

Так как существует интеграл $\int_a^{x_1} f(x)\,dx$, то существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+} F_1(x) = F_1(a+0)$ и $\lim\limits_{x\to x_1-} F_1(x) = F_1(x_1-0)$ (см. стр. 532, теорема III).

По аналогичной причине существует $\lim\limits_{x\to x_1+} F_2(x) = F_2(x_1+0)$. Всякая функция, примитивная относительно $f(x)$ в интервале (x_1, x_2) имеет вид

$F_2(x)+C$. Число C можно определить так, чтобы функция $F(x)$, определенная в полуинтервале $(a, x_2]$ законом соответствия

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x) & x\in(a, x_1);\\ F_1(x_1-0) & x=x_1;\\ F_2(x)+C & x\in(x_1, x_2);\\ F_2(x_2-0)+C & x=x_2, \end{cases}$$

была непрерывна в $(a, x_2]$. Для этого достаточно соблюдения условия $F(x_1-0)=F(x_1+0)=F(x_1)$, или, что то же,

$$F_1(x_1-0)=F_2(x_1+0)+C, \text{ откуда } C=F_1(x_1-0)-F_2(x_1+0).$$

Итак, функция $F(x)$ построена в интервале (a, x_2). Точно таким же способом продолжим $F(x)$ на интервал (a, x_3) и так далее, пока не получим функцию $F(x)$, непрерывную во всем интервале (a, b), ч. т. д.

Функция, непрерывная в (a, b) и являющаяся примитивной относительно $f(x)$ в каждом интервале (x_i, x_{i+1}), называется кусочно примитивной функцией.

Теорема. *Если существует интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *и функция* $F(x)$ *является кусочно примитивной относительно* $f(x)$ *в* (a, b), *то имеет место обобщенная формула Лейбница—Ньютона*;

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Доказательство. В силу свойства аддитивности и формулы Лейбница—Ньютона, имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\ldots+\int_{x_n}^{b}=[F(x_1)-F(a)]+[F(x_2)-F(x_1)]+\ldots+$$
$$+[F(b)-F(x_n)]=F(b)-F(a), \text{ ч. т. д.}$$

Примеры.

1. Для функции $f(x)=\operatorname{sign}x$ функция $-x$ есть примитивная в интервале $(-\infty, 0)$, а функция x примитивная в интервале $(0, +\infty)$. Функция $|x|$ есть одна из кусочно примитивных функций для $f(x)$ в $(-\infty, +\infty)$; при любых a и b имеем:

$$\int_a^b \operatorname{sign}x\,dx=|b|-|a|.$$

2. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$. Область определения—множество трех интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{[в интервалах } (-\infty, -1) \text{ и } (1, +\infty)\text{]}.\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{[в интервале } (-1,1)\text{]}. \end{cases}$$

Для построения кусочно-примитивной функции примем [illegible] дующее: функция $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$ есть примитивная [illegible] в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, а функция $\arcsin x$ [illegible] $(-1, 1)$.

Положим $F(x)=\ln(-x-\sqrt{x^2-1})$ в интервале $(-\infty, -1)$. В интервале $(-1, 1)$ мы должны иметь $F(x)=\arcsin x+C$. Значение C определится из условия непрерывности во всем интервале $(-\infty, 1)$, для чего необходимо соблюдение равенства $F(-1)=\lim\limits_{x\to-1-}F(x)=\lim\limits_{x\to-1+}F(x)$, откуда

$$0=\arcsin(-1)+C, \quad \text{т. е.} \quad C=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $F(x)=\arcsin x+\frac{\pi}{2}$ в интервале $(-1, 1)$. В интервале $(1, +\infty)$ мы должны иметь.

$$F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C_1.$$

Значение C_1 определяется из условия непрерывности в точке 1:

$$F(1)=\lim_{x\to1-}F(x)=\lim_{x\to1+}F(x),$$

т. е.

$$\arcsin 1+\frac{\pi}{2}=C_1 \quad \text{и} \quad C_1=\pi.$$

Итак, имеем окончательно:

$$F(x)=\begin{cases}\ln(-x-\sqrt{x^2-1}) & (-\infty<x\leqslant-1);\\ \arcsin x+\frac{\pi}{2} & (-1\leqslant x\leqslant 1);\\ \ln(x+\sqrt{x^2-1})+\pi & (1\leqslant x<+\infty)\end{cases}$$

Вычислим, например,

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}=F(2)-F(0)=\ln(2+\sqrt{3})+\pi-\left(\arcsin 0+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}.$$

Михаил Кузьмич Гребенча,
Сергей Иосифович Новоселов

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Редактор издательства *Д. А. Тальский*
Технический редактор *С. С. Горохова*
Корректор *Я. А. Шалина*

Сдано в набор 25/III 1960 г.
Подписано к печати 9/VI 1960 г.
Бумага $60\times92^{1}/_{16}=34$ печ. л. $=32{,}24$
уч.-изд. л. Тираж 22 тыс. Цена 10 р. 70 к.
С 1 января 1961 года новая цена 1 р. 07 к.
Зак. 177

Государственное издательство
«Высшая школа»
Москва, Б—62, Подсосенский п., 20

Московская тип. № 5 Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., д. 9